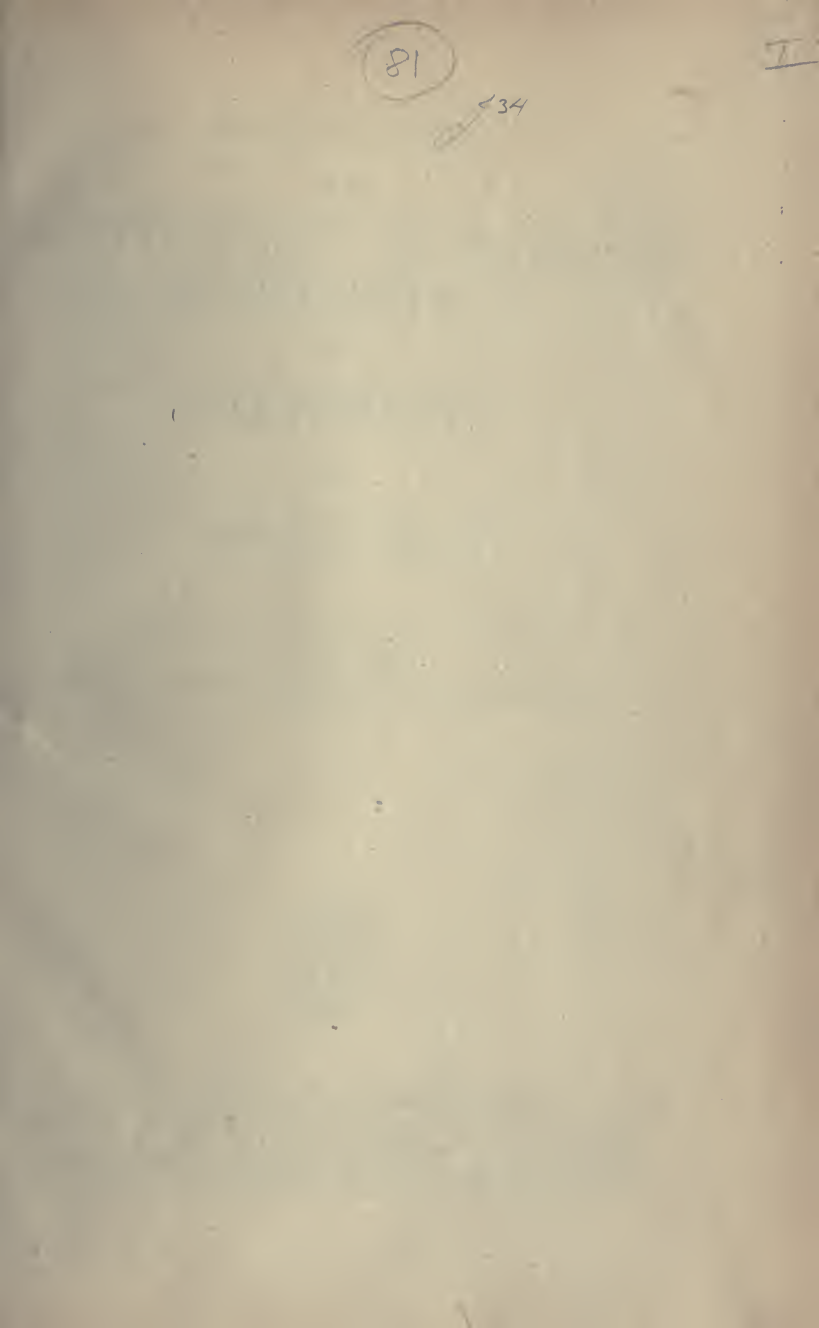

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01197497 9


81

ANWENDUNG
DER
DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG
AUF
GEOMETRIE

VON

GEORG SCHEFFERS

ZWEITER BAND

EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER FLÄCHEN



BERLIN UND LEIPZIG 1922
VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER
WALTER DE GRUYTER & CO.
VORMALS G. J. GÖSCHENSCHE VERLAGSHANDLUNG · J. GUTTENTAG, VERLAGS-BUCHHANDLUNG GEORG REIMER · KARL J. TRÜBNER · VEIT & COMP.

EINFÜHRUNG

IN DIE

THEORIE DER FLÄCHEN

VON

GEORG SCHEFFERS

DRITTE VERBESSERTE AUFLAGE

MIT 110 FIGUREN IM TEXT



BERLIN UND LEIPZIG 1922
VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER
WALTER DE GRUYTER & CO.
VORMALS G. J. GÖSCHENSCHE VERLAGSHANDLUNG · J. GUTTENTAG, VERLAGSBUCHHANDLUNG GEORG REIMER · KARL J. TRÜBNER · VEIT & COMP.

Aus dem Vorworte zur ersten Auflage.

Diesem zweiten, abschließenden Bande der Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie seien zunächst einige Bemerkungen über die Art der Benutzung des Buches durch Lernende vorausgeschickt.

Der Inhalt des ersten Bandes wird als bekannt vorausgesetzt. Es ist aber auch möglich, daß man unmittelbar mit diesem zweiten Bande beginnt, sobald man nur die wichtigeren Sätze der Kurventheorie anderswo schon kennen gelernt hat. Zwar ist es am besten, die vier Abschnitte, in die dies Buch zerfällt, der Reihenfolge nach durchzunehmen; aber der dritte, schwierigste, Abschnitt braucht nur zum Teil vor dem vierten studiert zu werden. Man findet die nötigen Hinweise darüber an den betreffenden Stellen im Buche und im Inhaltsverzeichnis. Damit die Theorie deutlicher hervortrete, sind die Beispiele, wenn sie nicht ganze Paragraphen umfassen, in kleineren Lettern gedruckt worden.

Der Umfang des Buches möge den Anfänger nicht erschrecken, denn nur bei entsprechendem Raume ist es möglich, die Dinge so ausführlich zu behandeln, daß sie vollkommen verständlich werden.

Es sei mir gestattet, mich noch hinsichtlich einiger Punkte den Fachgenossen gegenüber zu äußern:

Dem Haupttitel des Werkes entsprechend habe ich auch in diesem Bande grundsätzlich die analytische Methode benutzt und rein geometrische Betrachtungen nur zum Erleichtern des Verstehens, bei der Andeutung weiterer Ausblicke, ferner da, wo sie besonders interessant sind, und endlich noch hin und wieder da, wo ihre rechnerische Wiedergabe auf der Hand liegt, eingefügt. Aber die Tendenz des Ganzen ist doch eine geometrische, indem ich solche Probleme aus der Flächentheorie ausgewählt habe, die in erster Linie von geometrischem Interesse sind. Man wird daher manche schöne Anwendung der Analysis auf die Geometrie vermissen, möge aber bedenken, daß das Gebiet der Flächentheorie

so groß ist, daß eine Auswahl daraus gestattet ist. Manches, was andere Lehrbücher bringen, fehlt hier; andererseits bringe ich manches, was andere nicht haben. Ich erwähne z. B. die Anwendung auf die Herstellung geographischer Karten, das Kongruenzproblem für Flächen und die geodätische Abbildung.

Zwei grundsätzliche Abweichungen von den sonstigen elementaren Lehrbüchern sind hier diese: Erstens die beständige Mitberücksichtigung des Imaginären, zweitens die infolge hiervon unabweisliche Mitberücksichtigung derjenigen Flächen, die eine Schar von Minimalgeraden enthalten, da auf diesen Flächen z. B. die Eulersche Krümmungstheorie nicht gilt.

Eine Hauptschwierigkeit für den Anfänger in der Flächentheorie ist die Fülle der Formeln und der stehenden Bezeichnungen. In Hinsicht auf das Eine habe ich die Sache durch den Anhang von Formeltafeln zu erleichtern versucht, in Hinsicht auf das Andere dadurch, daß ich nur ziemlich wenige stehende Zeichen, diese aber beständig, benutzt habe. Ich denke, ein Kenner der Flächentheorie wird beim Blättern in diesem Buche überall orientiert sein, sobald er nur weiß, daß u, v die Parameter auf der Fläche, E, F, G und L, M, N ihre Fundamentalgrößen, X, Y, Z die Richtungskosinus der Flächennormale, R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien, K das Gaussische Krümmungsmaß und H die mittlere Krümmung bedeuten. In Tafel XXIV findet man übrigens eine vergleichende Zusammenstellung der Bezeichnungen bei verschiedenen Autoren.

Noch muß ich hervorheben, daß ich es für ausgeschlossen halte, dem Anfänger die Flächentheorie als Invariantentheorie zweier quadratischer Differentialformen beibringen zu wollen. Das kann er später aus den großen Werken, wie z. B. aus Bianchis Differentialgeometrie, lernen; für den Anfang bietet die Geometrie der Flächen selbst schon fast zu viel des Neuen und Ungewohnten.

Darmstadt, im Januar 1902.

Aus dem Vorworte zur zweiten Auflage.

Ebenso wie der erste ist auch dieser zweite Band einer gründlichen Durchsicht unterzogen worden; doch lag auch hier kein Anlaß vor, den Gang der Entwicklungen wesentlich abzuändern, abgesehen von einer Stelle:

Die Bestimmung der Flächen mit gegebenen und den drei Fundamentalgleichungen Genüge leistenden Fundamentalgrößen konnte ich diesmal, von einer Bemerkung Engels Gebrauch machend, derart in mehrere Teile zerlegen, daß die Schwierigkeiten für den Anfänger recht verringert werden: In § 3 des dritten Abschnittes wird zunächst nur das Vorhandensein einer Fläche mit den gegebenen Fundamentalgrößen bewiesen; mittels der in § 7 aufgestellten Differentialinvarianten wird alsdann gezeigt, daß alle Flächen mit denselben Fundamentalgrößen einander kongruent sind. Mit diesen beiden Ergebnissen kann man sich, wenn man will, begnügen. Nachträglich wird jedoch in den überschlagbaren §§ 8 und 9 des dritten Abschnittes erörtert, wie man eine unter diesen Flächen und damit auch alle durch Integration einer Riccatischen Gleichung und einige Quadraturen zu bestimmen vermag.

Eine andere mehr untergeordnete Abänderung ist diese: In der ersten Auflage hatte ich die natürlichen Gleichungen einer Fläche, die Hauptkrümmungsradien zuläßt, dadurch zum Ausdrucke gebracht, daß ich die Ableitungen dieser Radien längs der Krümmungskurven als Funktionen der Radien darstellte. Die hierbei auftretenden Größen sind nun aber keine absoluten Invarianten gegenüber Bewegungen und gegenüber der Einführung neuer Parameter. Deshalb habe ich es diesmal vorgezogen, statt der Radien das Krümmungsmaß K und das Quadrat der mittleren Krümmung H zu benutzen, die ja absolute Invarianten sind. Aus ihnen werden mit Hilfe der Differentialparameter vier andere absolute Invarianten gebildet, und nun sind die natürlichen Gleichungen der Fläche diejenigen Gleichungen, die aussagen, wie sich diese letzten vier Invarianten als Funktionen von K und H^2 darstellen. Selbstverständlich kann man von diesen natürlichen Gleichungen wieder zu denen zurückgelangen, die in der ersten Auflage benutzt wurden (vgl. S. 443). Die Flächen, auf denen K und H voneinander abhängig sind, oder wie man nicht ganz einwandfrei zu sagen pflegt, eine Gleichung zwischen den beiden Hauptkrümmungsradien besteht, sind bei jenen Betrachtungen auszuschließen. Auf die Frage, wie man für sie zweckmäßig die natürlichen Gleichungen aufstellt, bin ich nicht näher eingegangen.

Im ersten Abschnitte ist der § 4 über die Einhüllende einer zweifach unendlichen Ebenenschar neu.

Der zweite Abschnitt ist um folgende Paragraphen bereichert worden: § 5 über die Schnittkurve von Fläche und Tangentenebene, § 7 über oskulierende Flächen zweiter Ordnung, § 12 über dreifache orthogonale Flächensysteme, § 17 über Flächen von Minimalgeraden. Viele andere geringfügigere Zusätze finden sich an den verschiedensten Stellen des Buches. Die wie im ersten Bande in der neuen Auflage auch hier überall durchgeführte naturgemäße Orientierung des räumlichen Koordinatensystems erforderte die Umänderung mehrerer Figuren, außerdem wurden mehrere neue Abbildungen eingeschaltet. Insbesondere möchte ich auf die Fig. 93, S. 363, hinweisen, die die stetige Verbiegung einer gemeinen Schraubenfläche auf ein Katenoid veranschaulicht.

Berlin-Steglitz, im August 1913.

Vorwort zur dritten Auflage.

Diesmal habe ich mich in der Hauptsache darauf beschränkt, die mir bekannt gewordenen Druckfehler und Versehen auszubessern. Außerdem sind nur einige durchgreifendere Änderungen vorgenommen worden: Auf Grund von wertvollen Ratschlägen meines Freundes Engel konnte ich einige Betrachtungen wesentlich vereinfachen, nämlich den § 17 des zweiten Abschnittes über die Flächen von Minimalgeraden und den § 8 des dritten Abschnittes über den Ansatz zur Ermittelung einer Fläche mit gegebenen Fundamentalgrößen, im Zusammenhange hiermit auch den auf den Fall $E = G = 0$ bezüglichen Teil des § 9 desselben Abschnittes.

Selbstverständlich hätte ich gern das ganze Buch einer durchgreifenden Erneuerung unterzogen; aber wegen der gewaltig gestiegenen Kosten für die Herstellung von Büchern war es geboten, den alten Text möglichst schonend zu behandeln, damit das Buch nicht gar zu teuer werde. Deshalb habe ich auch auf die Erfüllung einiger anderer Wünsche von befreundeter Seite verzichten müssen. Ich hoffe, daß das Buch trotz alledem seinem Zwecke, dem Anfänger zu einer wirklich auch geometrischen Auffassung der Flächentheorie zu verhelfen, wie bisher so auch in Zukunft dienen wird.

Berlin-Dahlem, im April 1922.

Georg Scheffers.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Das Bogenelement der Fläche.

Zweiter Abschnitt.

Die Krümmung der Fläche.

Dritter Abschnitt.

Die Fundamentalgleichungen der Fläche.

Vierter Abschnitt.

Kurven auf der Fläche.

Anhang.

[1] Vorläufig zum Teil überschlagbar, vgl. die Anm. zu S. 345 u. S. 391.
[2] Vorläufig überschlagbar.

Erster Abschnitt.

Das Bogenelement der Fläche.

§ 1. Analytische Darstellung von Flächen.

Die am nächsten liegende analytische Darstellung einer Fläche ist die durch eine Gleichung zwischen den drei rechtwinkligen Punktkoordinaten x, y, z des Raumes:

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

vgl. I S. 208.[1] Insbesondere benutzt man gern die Auflösung der Gleichung nach einer der drei Koordinaten, namentlich die nach z:

$$z = f(x, y). \tag{2}$$

Bei der Darstellungsweise (2) einer Fläche haben sich Bezeichnungen für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von z nach x und y eingebürgert, die wir gelegentlich benutzen wollen, nämlich diese:

$$\left\{\begin{array}{c} p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}; \\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \end{array}\right. \tag{3}$$

Allerdings muß man diese Bezeichnungen vermeiden, wenn z. B. schon eine Bogenlänge s oder ein Radius r oder ein Parameter t auftritt.

1. Beispiel: Der Darstellungsform (1) einer Fläche ordnet sich unter die Gleichung einer Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

und die Gleichung einer Kugel:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Die Darstellungsform (2) ist unmöglich, wenn die Gleichung (1) der Fläche von z frei ist:

$$F(x, y) = 0.$$

[1] Die Zahl I soll den ersten Band bezeichnen. Bezüglich der Voraussetzungen über die vorkommenden Funktionen sei zunächst auf I S. 2 u. 3 verwiesen.

Diese Gleichung wird zunächst von den Punkten (x, y) einer oder mehrerer Kurven der xy-Ebene erfüllt, dann aber auch von allen denjenigen Punkten, deren senkrechte Projektionen auf die xy-Ebene gerade auf jenen Kurven liegen; mit anderen Worten: die Gleichung stellt einen oder mehrere Zylinder dar, deren Mantellinien der z-Achse parallel sind. (Vgl. I S. 205).

Die bequeme Darstellungsform (2) ist demnach nicht erschöpfend, da sie diese Zylinder nicht mit umfaßt. Das tut nun zwar die Darstellungsform (1), aber diese ist wiederum nicht sehr bequem. Wir wollen daher die Flächen analytisch auf eine andere Art darstellen. Dazu werden wir geführt, wenn wir einen Rückblick auf einige im ersten Bande betrachtete Flächen werfen:

Die Tangentenfläche einer Kurve

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t)$$

mit dem Parameter t wurde durch die drei Gleichungen gegeben:

$$(4) \quad x = \varphi(t) + \tau\varphi'(t), \quad y = \chi(t) + \tau\chi'(t), \quad z = \psi(t) + \tau\psi'(t).$$

Vgl. I S. 351. Legt man den veränderlichen Größen t und τ bestimmte Werte bei, so liefern die drei Gleichungen (4) die Koordinaten x, y, z eines Punktes auf der Tangente einer Stelle (t) der gegebenen Kurve. Die Veränderliche τ läßt sich leicht eliminieren. Es bleiben dann zwei Gleichungen zwischen x, y, z und t. Siehe I S. 352. Wenn man aus ihnen dann noch die Veränderliche t eliminieren würde, bliebe eine Gleichung zwischen x, y und z übrig, so daß man zu einer Darstellungsform der Tangentenfläche gelangen würde, die sich der Form (1) unterordnet.

Wir erinnern ferner daran, daß man nach I S. 397 die Koordinaten x, y, z der Punkte derjenigen Ebene, die durch einen bestimmten Punkt (x_0, y_0, z_0) geht und zwei zueinander senkrechte Richtungen mit den Kosinus α, β, γ und l, m, n enthält, in dieser Form ausdrücken kann:

$$(5) \quad x = x_0 + \alpha\mathfrak{x} + l\mathfrak{y}, \quad y = y_0 + \beta\mathfrak{x} + m\mathfrak{y}, \quad z = z_0 + \gamma\mathfrak{x} + n\mathfrak{y}.$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinaten des Punktes (x, y, z) in demjenigen Achsenkreuze, dessen Anfangspunkt der Punkt (x_0, y_0, z_0) ist und dessen Achsen die erwähnten beiden Richtungen haben. Jedem Wertepaare $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ entspricht also ein Punkt (x, y, z) jener Ebene, und umgekehrt: zu jedem Punkte (x, y, z) der Ebene gehört ein bestimmtes Wertepaar $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$. Die Koordinaten aller Punkte (x, y, z) jener Ebene werden mithin

durch zwei Veränderliche $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ ausgedrückt, die eine einfache geometrische Bedeutung haben.

Endlich erinnern wir daran, daß man auf der Kugel, aufgefaßt als Erd- oder Himmelskugel, zur Festlegung eines Punktes die geographische Breite β und Länge λ benutzt. Ist r der Radius der Kugel, die Äquator-Ebene die xy-Ebene, die Nordsüd-Achse die z-Achse, und setzt man fest, daß die xz-Ebene die des Längenkreises Null sein soll (siehe Fig. 1), so sind

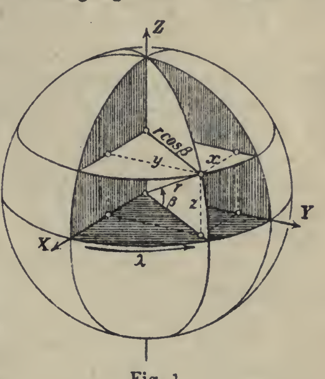


Fig. 1.

$$(6)\begin{cases} x = r\cos\beta\cos\lambda, \quad y = r\cos\beta\sin\lambda, \\ z = r\sin\beta \end{cases}$$

die rechtwinkligen Koordinaten des Kugelpunktes von der Breite β und Länge λ. Um im Einklange mit unseren früheren Festsetzungen zu bleiben, haben wir die Länge positiv im Sinne der Drehung von der x-Achse zur y-Achse und die Breite β vom Äquator nach der positiven z-Achse hin positiv gerechnet. Natürlich kann man β auf das reelle Gebiet

$$-\frac{\pi}{2} < \beta \leqq +\frac{\pi}{2}$$

und λ auf das reelle Gebiet

$$-\pi < \lambda \leqq +\pi$$

beschränken; innerhalb dieses Gebietes gehört dann zu jedem Wertepaare β, λ nur ein Punkt (x, y, z) der Kugel und umgekehrt zu jedem Punkte (x, y, z) der Kugel, abgesehen vom Nord- und Südpol, nur ein Wertepaar β, λ. Dabei verstehen wir unter diesen Polen die Punkte der Kugel auf der positiven bzw. negativen z-Achse. In (6) ist die Kugel durch drei Gleichungen dargestellt, vermöge deren die Punktkoordinaten x, y, z als Funktionen zweier anderer Veränderlichen, β und λ, gegeben werden.

In den Formeln (4), (5) und (6) haben wir solche analytische Darstellungsarten einer Tangentenfläche, einer Ebene und einer Kugelfläche vor uns, die eines miteinander gemein haben: Jedesmal werden die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z der Punkte der betreffenden Fläche als Funktionen von zwei anderen Veränderlichen gegeben, nämlich von t, τ bzw. $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bzw. β, λ.

Diese Tatsache führt uns zu der allgemeinen Frage: Es seien die Punktkoordinaten x, y, z als Funktionen von zwei anderen Veränderlichen, sagen wir u und v, gegeben:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v). \tag{7}$$

Was ist dann der geometrische Ort aller Punkte (x, y, z), die sich hieraus ergeben, wenn die Veränderlichen u und v alle möglichen Werte erhalten? Wir setzen dabei wie früher (vgl. I S. 2) voraus, daß die Funktionen φ, χ, ψ wenigstens in einem gewissen gemeinsamen Bereiche für u und v — in dem wir alsdann verbleiben — einwertig analytisch seien.

Bei der Beantwortung der aufgeworfenen Frage sind drei Fälle zu unterscheiden:

Erstens: Die Funktionen φ, χ und ψ sind in Wirklichkeit frei von u und v, also Konstanten. Dann stellt (7) nur einen Punkt dar.

Zweitens: Die Funktionen φ, χ und ψ sind nicht sämtlich konstant, aber je zwei sind voneinander abhängig, d. h. die drei Funktionaldeterminanten

$$\chi_u \psi_v - \psi_u \chi_v, \quad \psi_u \varphi_v - \varphi_u \psi_v, \quad \varphi_u \chi_v - \chi_u \varphi_v$$

sind gleich Null, vgl. I S. 120, 121. Nach einem Satze der Funktionentheorie sind alsdann alle drei Funktionen φ, χ, ψ einwertige analytische Funktionen von nur einer ebenfalls einwertigen analytischen Funktion w von u und v; so daß die drei Gleichungen (7) etwa die Form annehmen:

$$x = X(w), \quad y = Y(w), \quad z = Z(w).$$

Sie zeigen, daß x, y, z jetzt als Funktionen von nur einer Veränderlichen w betrachtet werden können. Mithin liegt hier nach I S. 203 eine Parameterdarstellung einer Kurve vor.

Drittens: Zwei der drei Funktionen φ, χ, ψ sind voneinander unabhängig, z. B. φ und χ. Hier müssen wir einen Satz der Funktionentheorie über das Vorhandensein von Auflösungen benutzen, von dem schon andeutungsweise in I S. 144 die Rede war. Nach Voraussetzung ist die Funktionaldeterminante $\varphi_u \chi_v - \chi_u \varphi_v$ für beliebige Wertepaare u, v innerhalb des erlaubten Bereiches nicht gleich Null. Man kann demnach ein Wertepaar u_0, v_0 bestimmt wählen, für das die Funktionaldeterminante nicht verschwindet. Wenn nun $\varphi(u_0, v_0)$ und $\chi(u_0, v_0)$ die Werte x_0 und y_0 haben, besagt der zu benutzende Satz, daß das Gleichungenpaar

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v) \tag{8}$$

in der Umgebung des Wertepaares x_0, y_0 Auflösungen hinsichtlich u und v hat. Unter den gemachten Voraussetzungen werden nämlich alle Wertepaare u, v, die den Gleichungen (8) genügen, falls man das Wertepaar x, y in einer hinreichend engen Umgebung des Paares x_0, y_0 wählt, durch zwei einwertige analytische Funktionen

$$(9) \qquad u = \Phi(x, y), \qquad v = X(x, y)$$

dargestellt, die für $x = x_0$, $y = y_0$ die Werte u_0 und v_0 annehmen und deren Funktionaldeterminante

$$\Phi_x X_y - X_x \Phi_y$$

überdies von Null verschieden ist, so daß Φ und X voneinander unabhängige Funktionen sind. Hiernach ist es leicht, die weiteren Folgerungen aus den gemachten Annahmen zu ziehen: Wenn wir die Auflösungen (9) der beiden Gleichungen (8), d. h. der beiden ersten Gleichungen (7), in die dritte Gleichung (7) einsetzen, ergibt sich eine Gleichung:

$$z = \psi\big(\Phi(x, y), X(x, y)\big),$$

und nach dem Satze der Funktionentheorie über Funktionen von Funktionen wird somit z eine einwertige analytische Funktion von x und y:

$$(10) \qquad z = f(x, y),$$

vorausgesetzt immer, daß alle Wertepaare x, y einer hinreichend engen Umgebung des Wertepaares x_0, y_0 angehören. Demnach hat sich gezeigt, daß alle Punkte (x, y, z), die durch (7) gegeben werden, falls man die Wertepaare u, v auf eine gewisse Umgebung des Wertepaares u_0, v_0 beschränkt, durch die Gleichung (10) bestimmt werden. Folglich liegt senkrecht über jedem Punkte (x, y) der xy-Ebene, der hinreichend nahe beim Punkte (x_0, y_0) liegt, ein und nur ein Punkt (x, y, z), der durch (7) bestimmt wird und der Umgebung des Punktes (x_0, y_0, z_0) angehört. Dabei soll natürlich z_0 den Wert von $z = \psi(u, v)$ für $u = u_0$, $v = v_0$ bedeuten. Dies Ergebnis berechtigt uns zu sagen, daß diejenigen Punkte (x, y, z), die durch (7) definiert werden, falls man alle Wertepaare u, v in einer gewissen Umgebung des Wertepaares u_0, v_0 wählt, eine Fläche erfüllen. Wir sind, nebenbei bemerkt, in (10) wieder zur Darstellungsform (2) einer Fläche zurückgelangt.

Umgekehrt: Wenn die Darstellungsform (2) vorliegt, läßt sie sich, indem man $x = u$ und $y = v$ setzt, durch die drei Gleichungen

$$(11) \qquad x = u, \qquad y = v, \qquad z = f(u, v)$$

ersetzen, die sich der Darstellungsform (7) unterordnen, indem jetzt insbesondere $\varphi = u$ und $\chi = v$ ist und φ und χ also voneinander unabhängige Funktionen bedeuten.

Entsprechendes läßt sich von der am nächsten liegenden Darstellungsform (1) einer Fläche sagen. Denn wenn eine Gleichung $F(x, y, z) = 0$ vorliegt, darf man voraussetzen, daß wenigstens eine der drei partiellen Ableitungen F_x, F_y, F_z nicht verschwindet, z. B. F_z nicht. Setzt man dann wieder einfach $x = u$, $y = v$, so wird die hervorgehende Gleichung $F(u, v, z) = 0$ nach dem Satze über das Vorhandensein einer unentwickelten Funktion (vgl. I S. 3) in einem gewissen Bereiche durch eine einwertige analytische Funktion $z = \psi(u, v)$ befriedigt, so daß man wieder zu einer Darstellung (11) gelangt, die sich, wie gesagt, der Darstellung (7) unterordnet.

Nach allem diesen definieren wir nunmehr endgültig eine Fläche analytisch durch drei Gleichungen von der Form

$$(12) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v).$$

Darin sollen φ, χ, ψ innerhalb eines gewissen Bereiches einwertige analytische Funktionen der beiden unabhängigen Veränderlichen u und v sein, und zwei dieser drei Funktionen sollen voneinander unabhängig sein, d. h. nicht alle drei Funktionaldeterminanten

$$(13) \qquad \chi_u \psi_v - \psi_u \chi_v, \quad \psi_u \varphi_v - \varphi_u \psi_v, \quad \varphi_u \chi_v - \chi_u \varphi_v$$

sollen für beliebige erlaubte Wertepaare u, v verschwinden. Wenn nämlich diese letzte Bedingung nicht erfüllt wäre, würde (12), wie sich im ersten und zweiten Falle zeigte, nur Punkte oder Kurven darstellen. Man nennt (12) die allgemeine Parameterdarstellung einer Fläche, u und v heißen die Parameter (Hilfsveränderlichen) der Fläche.[1]

Oben haben wir in (4), (5) und (6) Beispiele hierzu gehabt, nämlich Parameterdarstellungen einer Tangentenfläche, einer Ebene und einer Kugel. Dabei waren die Parameter u, v mit t, τ bzw. $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ bzw. β, λ bezeichnet.

Man hat wohl zu beachten, daß allgemeine Betrachtungen, die sich an die Darstellungsform (12) einer Fläche anschließen, zunächst

[1] Diese Parameterdarstellung wurde von Gauss eingeführt in seinen grundlegenden und noch öfters zu erwähnenden „Disquisitiones generales circa superficies curvas", Commentationes Soc. Scient. Gottingensis recentiores Vol. VI (ad a. 1823—1827), Göttingen 1828, siehe auch Gauss' Werke 4. Bd. Eine Übersetzung durch Wangerin findet man in Nr. 5 von Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften, Leipzig 1889.

immer nur innerhalb einer gewissen Umgebung eines bestimmten Wertepaares $u = u_0$, $v = v_0$ gelten; erst wenn man über die Funktionen φ, χ, ψ noch besondere Annahmen macht, kann man den Bereich erweitern. Dann ist es wohl möglich, daß alle drei Funktionaldeterminanten (13) für einzelne sonst erlaubte Wertepaare u, v gleich Null werden. Alsdann soll der zugehörige Flächenpunkt singulär heißen im Gegensatze zu den übrigen regulären Punkten. Wenn künftig von einem beliebigen Flächenpunkte die Rede ist, soll stets ein regulärer Punkt gemeint sein, dessen Parameter u und v dem erlaubten Bereiche angehören, Innerhalb dieses Bereiches entspricht jedem Wertepaare u, v ein und nur ein Flächenpunkt (x, y, z) und jedem Flächenpunkte (x, y, z) ein und nur ein Wertepaar u, v. Daher können wir einen Flächenpunkt auch als einen Punkt (u, v) bezeichnen, und diese Bezeichnung ist oft vorzuziehen, weil sie die Parameterwerte enthält, die dem betrachteten Punkte zukommen.

Wir sprechen von einer reellen Fläche, wenn x, y, z in dem erlaubten Bereiche reell ausfallen. Zumeist wird man alsdann Parameterdarstellungen vor sich haben derart, daß zu diesen reellen Werten von x, y, z auch reelle Parameterwerte u, v gehören. Ist dies der Fall, so werden wir immer kurz vom reellen Falle sprechen.

Jede Fläche kann auf unendlich viele verschiedene Arten in Parameterdarstellung gegeben werden. Wenn man nämlich in (12) für u und v zwei voneinander unabhängige Funktionen

(14) $$u = \lambda(\bar{u}, \bar{v}), \qquad v = \mu(\bar{u}, \bar{v})$$

von zwei neuen Parametern $\bar{u}, \bar{v}$ setzt, werden x, y, z Funktionen von $\bar{u}$, $\bar{v}$, so daß sich eine neue Parameterdarstellung der Fläche (12) ergibt:

(15) $$x = \Phi(\bar{u}, \bar{v}), \qquad y = X(\bar{u}, \bar{v}), \qquad z = \Psi(\bar{u}, \bar{v}).$$

Auch jetzt sind zwei der drei Funktionen Φ, X, Ψ voneinander unabhängig. Denn nach der Entstehung der Gleichungen (15) ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}} = \varphi_u \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} + \varphi_v \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{v}} = \varphi_u \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} + \varphi_v \frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}},$$

und entsprechend drücken sich die Ableitungen von X und Ψ nach $\bar{u}$ und $\bar{v}$ aus. Nach dem Satze über die Multiplikation von Determinanten ist somit die Funktionaldeterminante von Φ und X

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \bar u} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial \bar v} \\ \dfrac{\partial X}{\partial \bar u} & \dfrac{\partial X}{\partial \bar v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \lambda}{\partial \bar u} & \dfrac{\partial \lambda}{\partial \bar v} \\ \dfrac{\partial \mu}{\partial \bar u} & \dfrac{\partial \mu}{\partial \bar v} \end{vmatrix},$$

und Entsprechendes gilt von den Funktionaldeterminanten von X, Ψ und Ψ, Φ.[1] Da nun nach Voraussetzung wenigstens eine der drei Funktionaldeterminanten (13) von Null verschieden ist, können wir annehmen, daß die erste in (16) rechts stehende Determinante nicht für beliebige Werte von u und v verschwindet. Dasselbe gilt von der zweiten, weil λ und μ voneinander unabhängige Funktionen sind, also nach (16) auch von der Funktionaldeterminante von Φ und X, was bewiesen werden sollte.

Daß neue Parameter nur in der Art (14) eingeführt werden können, sieht man so ein: Angenommen, es seien:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

und

$$x = \Phi(\bar u, \bar v), \quad y = X(\bar u, \bar v), \quad z = \Psi(\bar u, \bar v)$$

zwei Parameterdarstellungen einer und derselben Fläche mit den Parametern u, v bzw. $\bar u$, $\bar v$. Zu jedem erlaubten Wertepaare u, v gehört dann ein Punkt (x, y, z) der Fläche, und zu diesem ein erlaubtes Wertepaar $\bar u$, $\bar v$, d. h $\bar u$ und $\bar v$ müssen Funktionen von u und v sein wie in (14). Hätte man die Funktionen (14) nicht unabhängig voneinander gewählt, so würden die Funktionen Φ, X und Ψ von $\bar u$ und $\bar v$, die durch die Substitution der Werte (14) in φ, χ, ψ hervorgehen, voneinander abhängig werden, d. h. die neuen Gleichungen würden gar nicht die Fläche, sondern nur eine Kurve oder einen Punkt von ihr darstellen (vgl. den ersten und zweiten Fall auf S. 4). Hieraus folgt:

Satz 1: Liegt eine Darstellung

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

einer Fläche mittels zweier Parameter u und v vor, so ergibt sich aus ihr die allgemeinste Parameterdarstellung derselben Fläche dadurch, daß u und v gleich zwei voneinander unabhängigen Funktionen

$$u = \lambda(\bar u, \bar v), \quad v = \mu(\bar u, \bar v)$$

zweier neuer Parameter $\bar u$ und $\bar v$ gesetzt und diese Funktionen statt u und v in die gegebenen Gleichungen eingeführt werden.

[1] Dies ist ein Satz von Jacobi, vgl. die Amerkung zu I S. 120.

Die Parameter, mittels derer man eine Fläche darstellt, nennt man auch **krummlinige Koordinaten der Fläche**. Das Beiwort: krummlinig soll den Unterschied gegenüber den beiden gewöhnlichen Koordinaten x und y ausdrücken.

Liegt nämlich eine Fläche in der Form

$$z = f(x, y)$$

vor, so sind x und y solche Koordinaten, deren Angabe zur Bestimmung eines Flächenpunktes genügt, da das zugehörige z aus der Gleichung gewonnen wird. Wählt man für x einen bestimmten Wert x_0, läßt man aber y noch beliebig, so gehören dazu unendlich viele Punkte (x_0, y) in der xy-Ebene, nämlich die Punkte einer Parallelen

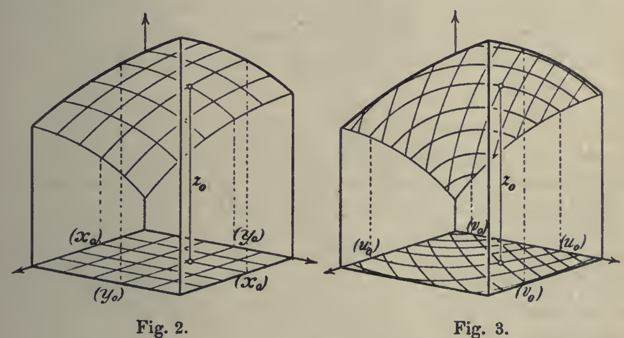


Fig. 2. Fig. 3.

zur y-Achse, und senkrecht über jedem dieser Punkte liegt ein Punkt (x_0, y, z) der Fläche. Mit anderen Worten: Wir betrachten (siehe Fig. 2) eine Kurve auf der Fläche, deren senkrechte Projektion auf die xy-Ebene eine Gerade parallel zur y-Achse ist. Entsprechendes gilt, wenn y statt x bestimmt gewählt und x beliebig gelassen wird. Jeder Punkt (x, y, z) der Fläche erscheint hiernach als Schnittpunkt zweier Kurven auf der Fläche, und die senkrechten Projektionen aller dieser Kurven auf die xy-Ebene sind die Parallelen zur y- und x-Achse. Die Fläche ist demnach mit einem Kurvennetze überzogen zu denken, das, auf die xy-Ebene projiziert, ein orthogonales Netz von **geraden** Linien liefert.

Liegt dagegen die Fläche in Parameterdarstellung vor:

(17) $$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

so sind u und v die Bestimmungsstücke. Geben wir u einen be-

stimmten Wert u_0, während wir v veränderlich lassen, so ergeben sich diejenigen Punkte (x, y, z) der Fläche, für die

$$x = \varphi(u_0, v), \quad y = \chi(u_0, v), \quad z = \psi(u_0, v)$$

ist. Hierin tritt rechts nur eine Veränderliche v auf. Es liegt also eine Kurve vor und zwar dargestellt mittels des Parameters v. Diese Kurve liegt auf der Fläche und ist durch die Angabe des Wertes u_0, den wir u beilegten, völlig bestimmt. Sie heißt daher die Parameterlinie (u_0) der Fläche. Ihre senkrechte Projektion auf die xy-Ebene wird durch die beiden Gleichungen

$$x = \varphi(u_0, v), \quad y = \chi(u_0, v)$$

mit dem Parameter v dargestellt (siehe Fig. 3, S. 9) und ist im allgemeinen eine krumme Linie. Geben wir zweitens dem Parameter v einen bestimmten Wert v_0, während u beliebig veränderlich sein soll, so betrachten wir diejenigen Punkte (x, y, z) der Fläche, die auf der Kurve

$$x = \varphi(u, v_0), \quad y = \chi(u, v_0), \quad z = \psi(u, v_0)$$

mit dem Parameter u liegen. Diese Kurve auf der Fläche heißt die Parameterlinie (v_0) der Fläche, und ihre senkrechte Projektion auf die xy-Ebene ist die im allgemeinen krumme Linie

$$x = \varphi(u, v_0), \quad y = \chi(u, v_0)$$

mit dem Parameter u. Wollen wir einen Punkt auf der Fläche bestimmt wählen, so haben wir u und v bestimmte Werte u_0, v_0 zu erteilen. Der zugehörige Punkt:

$$x_0 = \varphi(u_0, v_0), \quad y_0 = \chi(u_0, v_0), \quad z_0 = \psi(u_0, v_0)$$

ist der Schnittpunkt der beiden Parameterlinien (u_0) und (v_0). Mithin haben wir uns die Fläche mit einem Netze von Parameterlinien (u_0) und (v_0) überzogen zu denken, und die Projektion dieses Netzes auf die xy-Ebene liefert ein im allgemeinen krummliniges Kurvennetz

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v) \tag{18}$$

in der Ebene. Vgl. I, 1. Abschn. § 18 u. 20, wo wir die ebenen Kurvennetze ausführlich behandelt haben, insbes. I S. 145.

Die Bestimmung (17) der Punkte einer Fläche vermöge zweier Parameter u und v ist die natürliche Verallgemeinerung der Bestimmung der Punkte einer Ebene vermöge zweier Parameter u und v. Es tritt eben bei der Fläche zu den zwei Gleichungen (18) noch eine dritte $z = \psi(u, v)$ hinzu, die bei der xy-Ebene — diese im Raum betrachtet — einfach durch $z = 0$ zu ersetzen wäre.

2. Beispiel: Die Tangentenfläche (4) einer Kurve hat, wenn wir jetzt statt t und τ die Zeichen u und v gebrauchen, die Darstellung:

$$x = \varphi(u) + v\varphi'(u), \quad y = \chi(u) + v\chi'(u), \quad z = \psi(u) + v\psi'(u).$$

Geben wir u einen bestimmten Wert u_0, so heißt dies: Wir betrachten die von einem bestimmten Punkte der Gratlinie

$$x = \varphi(u), \quad y = \chi(u), \quad z = \psi(u)$$

ausgehende Tangente. Die Parameterlinie (u_0) ist demnach eine der Geraden der Fläche, während die Parameterlinien (v_0) krummlinig sind. Wenn u insbesondere die Bogenlänge der Gratlinie ist, bedeutet v die Strecke, die auf der Tangente des Punktes (u) der Gratlinie abgetragen wird, nach I S. 352. Die Linie (v_0) ist daher der Ort der Punkte, die sich ergeben, wenn man auf allen Tangenten der Gratlinie die Strecke v_0 von den Berührungspunkten aus abträgt. Die Parameterlinie $v = 0$ ist die Gratlinie selbst.

3. Beispiel: Bezeichnen wir die Breite β und die Länge λ auf der Kugel (6) mit u bzw. v, so liegt die Kugel vor:

$$x = r\cos u\cos v, \quad y = r\cos u\sin v, \quad z = r\sin u.$$

Die Parameterlinie (u_0) ist eine Kurve konstanter geographischer Breite u_0, d. h. ein Breitenkreis, und die Parameterlinie (v_0) eine Kurve konstanter geographischer Länge v_0, d. h. ein Längenkreis der Kugel.

Eine geometrisch gegebene Fläche kann willkürlich mit Kurvennetzen, d h. mit zwei Scharen von einfach unendlich vielen Kurven, überzogen werden. Dem entspricht es, daß man eine Fläche nach S. 7 auf beliebig viele Weisen mittels Parameter darstellen kann. Zu jeder Parameterdarstellung gehören ganz bestimmte Scharen von Parameterlinien, aber nicht umgekehrt: Wir erkennen vielmehr wie früher in der Ebene, I S. 150, daß die Scharen der Parameterlinien nur dann ungeändert bleiben, wenn man statt der alten Parameter u und v solche neue Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ einführt, von denen jeder nur von einem der beiden alten Parameter abhängt:

$$\bar{u} = A(u), \quad \bar{v} = B(v).$$

Diese Bemerkung kann man gelegentlich zur Vereinfachung der Parameterstellung benutzen, wenn man Wert darauf legt, die Natur der Parameterlinien selbst nicht zu ändern.

Da zu jedem Wertepaare (u, v) ein und nur ein Punkt der Fläche

$$(19) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

gehört, falls man den Bereich der erlaubten Werte u, v gehörig begrenzt (vgl. S. 7), so schneidet jede Parameterlinie (u) jede Parameterlinie (v) einmal und nur einmal. Wird also eine Kurve auf der Fläche gezogen, so gehört längs der Kurve zu jedem Werte

von u ein und nur ein Wert von v, siehe Fig. 4, d. h. zwischen u und v besteht längs der Kurve eine Gleichung

$$\Omega(u, v) = 0,$$

vermöge derer zu jedem u ein v und umgekehrt gehört. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Kurve keine Parameterlinie sei, denn sonst wäre entweder u oder v konstant. Aber auch die Gleichungen $u =$ konst. und $v =$ konst. ordnen sich der allgemeinen Gleichung $\Omega(u, v) = 0$ unter.

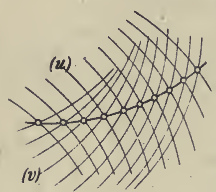


Fig. 4.

Wir sagen also:

Satz 2: Auf einer Fläche mit den Parametern u und v wird jede Kurve durch eine Gleichung

$$\Omega(u, v) = 0$$

zwischen u und v definiert.

Gerade so also, wie in der Ebene eine Kurve zunächst durch eine Gleichung zwischen den beiden Koordinaten x und y gegeben wurde, vgl. I S. 1, wird auf der Fläche eine Kurve durch eine Gleichung zwischen den beiden krummlinigen Koordinaten u und v gegeben. Zu diesem Ergebnisse kommen wir auch, indem wir von der allgemeinsten Darstellungsform einer Raumkurve mittels eines Parameters t ausgehen:

$$x = \alpha(t), \quad y = \beta(t), \quad z = \gamma(t),$$

vgl. I S. 203. Diese Kurve gehört der Fläche (19) dann und nur dann an, wenn es zu jedem Werte t ein Wertepaar u, v derart gibt, daß

$$\varphi(u, v) = \alpha(t), \quad \chi(u, v) = \beta(t), \quad \psi(u, v) = \gamma(t)$$

wird, d. h. wenn u und v zwei Funktionen

$$u = \lambda(t), \quad v = \mu(t) \tag{20}$$

von t sind, die diesen drei Gleichungen Genüge leisten. Alsdann gibt die Substitution der Werte (20) in (19) eine Darstellung der Flächenkurve in der Form:

$$x = \varphi(\lambda(t), \mu(t)), \quad y = \chi(\lambda(t), \mu(t)), \quad z = \psi(\lambda(t), \mu(t))$$

mittels des Parameters t. Wenigstens eine der beiden Gleichungen (20) ist nicht frei von t, weil sich sonst nur ein Punkt $u =$ konst., $v =$ konst. auf der Fläche und keine Kurve ergäbe. Demnach hat wenigstens eine der beiden Gleichungen (20) eine Auflösung nach t. Ihre Substitution in die andere Gleichung (20) liefert alsdann eine

Gleichung $\Omega(u, v) = 0$ zwischen u und v allein. Somit kommen wir zu Satz 2 zurück.

Während man bei der Untersuchung von Raumkurven die Darstellung der Kurven mittels eines Parameters t bevorzugt, siehe I S. 203 u. f., macht man bei der Untersuchung einer Kurve auf einer gegebenen Fläche lieber unmittelbar von derjenigen Gleichung $\Omega(u, v) = 0$ Gebrauch, die längs der Kurve zwischen den Parametern u und v der Fläche besteht.

Wie in der xy-Ebene eine einfach unendliche Schar von Kurven durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und y definiert wird (siehe I S. 128 u. f.), so wird eine einfach unendliche Schar von Kurven auf der Fläche (19) durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen u und v definiert:

(21) $$U(u, v)\,dv - V(u, v)\,du = 0.$$

Denn, wenn $f(u, v)$ ein Integral dieser Differentialgleichung ist, vgl. I S. 130, gibt $f(u, v) =$ konst. alle Lösungen der Differentialgleichung, vgl. I S. 131, d. h. alle Funktionen v von u (oder alle Funktionen u von v), die zusammen mit ihren Differentialquotienten $dv:du$ (oder $du:dv$) die Gleichung (21) befriedigen. Jede Gleichung $f(u, v) =$ konst. definiert aber nach Satz 2 eine Flächenkurve, so daß sich eine einfach unendliche Kurvenschar auf der Fläche ergibt, da die Konstante willkürlich ist.

Sehr oft gelangt man in der Theorie der Flächenkurven zu Gleichungen, die in du und dv homogen und quadratisch sind:

(22) $$A(u, v)\,du^2 + 2B(u, v)\,du\,dv + C(u, v)\,dv^2 = 0.$$

Nach der Theorie der quadratischen Gleichungen läßt sich eine derartige Gleichung zerspalten in

$$[A\,du + (B + \sqrt{B^2 - AC})\,dv]\,[A\,du + (B - \sqrt{B^2 - AC})\,dv] = 0,$$

so daß sie in zwei Differentialgleichungen von der Form (21), nämlich in

$$A\,du + (B \pm \sqrt{B^2 - AC})\,dv = 0$$

zerfällt, die allerdings nur im Falle $B^2 - AC \neq 0$ voneinander verschieden sind. Jede definiert eine einfach unendliche Kurvenschar auf der Fläche, und wenn A, B, C, wie wir immer annehmen, einwertige analytische Funktionen sind, geht durch jeden Flächenpunkt (u, v) nur eine Kurve von jeder Schar. Demnach definiert eine Gleichung von der Form (22) ein Kurvennetz

auf der Fläche, sobald $B^2 - AC \neq 0$ ist. Beispielsweise definiert die Gleichung $du\,dv = 0$, die sich der Form (22) unterordnet, die beiden Scharen $u =$ konst., $v =$ konst., also das Netz der Parameterlinien der Fläche. Wenn dagegen $B^2 - AC = 0$ ist, also die linke Seite von (22) ein vollständiges Quadrat in du und dv vorstellt, fallen beide Kurvenscharen in eine und dieselbe zusammen.

§ 2. Die Fundamentalgrößen erster Ordnung auf einer Fläche.

Werden die Punkte der Ebene durch rechtwinklige Koordinaten x, y bestimmt, so wird das Quadrat des Bogenelements ds gegeben durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

In der Formel (7), I S. 147, fanden wir den Ausdruck von ds^2 für ein bestimmtes Parametersystem v, v in der Ebene, wobei

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

war, in der Form:

$$ds^2 = (\varphi_u{}^2 + \psi_u{}^2)\,du^2 + 2(\varphi_u\varphi_v + \psi_u\psi_v)\,du\,dv + (\varphi_v{}^2 + \psi_v{}^2)\,dv^2.$$

Eine Überlegung, die durchaus der in I S. 147 entspricht, liefert uns nun das Quadrat des Bogenelements ds einer Fläche

(1) $$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v).$$

Wir betrachten nämlich zwei Punkte (u, v) und $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ der Fläche. Die rechtwinkligen Koordinaten des ersten seien x, y, z, die des zweiten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$. Das Quadrat der Strecke Δs zwischen beiden Punkten, also

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

wird beim Übergange zu den Differentialen verwandelt in das Quadrat des Bogenelements

(2) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

wobei

$$dx = \varphi_u du + \varphi_v dv, \quad dy = \chi_u du + \chi_v dv, \quad dz = \psi_u du + \psi_v dv$$

wird. Mithin ergibt sich als Quadrat des Bogenelements der Fläche (1) der Ausdruck:

(3) $$\begin{aligned} ds^2 = (\varphi_u{}^2 + \chi_u{}^2 + \psi_u{}^2)\,du^2 &+ \\ + 2(\varphi_u\varphi_v + \chi_u\chi_v + \psi_u\psi_v)\,du\,dv &+ \\ + (\varphi_v{}^2 + \chi_v{}^2 + \psi_v{}^2)\,dv^2&. \end{aligned}$$

Siehe Fig. 51 in I S. 147, die man sich auch auf einer Fläche statt in der Ebene denken kann.

Die Formel (3) ist von grundlegender Bedeutung. Da sie sehr oft angewandt wird, empfiehlt es sich, zur Abkürzung neue Bezeichnungen einzuführen. Wir setzen[1] ganz entsprechend wie in I S. 147:

$$(4)\qquad \begin{cases} E = \varphi_u^2 + \chi_u^2 + \psi_u^2, \\ F = \varphi_u\varphi_v + \chi_u\chi_v + \psi_u\psi_v, \\ G = \varphi_v^2 + \chi_v^2 + \psi_v^2 \end{cases}$$

oder, was dasselbe ist:[2]

$$(5)\qquad \begin{cases} E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \mathbf{S}\, x_u^2, \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = \mathbf{S}\, x_u x_v, \\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = \mathbf{S}\, x_v^2. \end{cases}$$

Diese drei Größen heißen die Fundamentalgrößen erster Ordnung auf der Fläche (1), und zwar deshalb erster Ordnung, weil sie nur die ersten partiellen Differentialquotienten von x, y, z nach u und v enthalten. Mit ihrer Hilfe nimmt die Formel (3) für das Quadrat des Bogenelements die einfache Gestalt an:

$$(6)\qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Die Fundamentalgrößen E, F, G können nicht alle drei identisch gleich Null sein, denn sonst würde aus (5) folgen:

$$x_u^2 = -y_u^2 - z_u^2, \qquad x_u x_v = -y_u y_v - z_u z_v, \qquad x_v^2 = -y_v^2 - z_v^2$$

und hieraus durch Elimination von x_u und x_v:

$$y_u z_v - z_u y_v = 0.$$

Also wären y und z voneinander abhängig; ebenso würde sich ergeben, daß z und x sowie x und y voneinander abhängig sein müßten, was der Voraussetzung widerspricht (vgl. S. 6).

Liegt die Fläche in der speziellen Form $z = f(x, y)$ vor, die man nach S. 5 sofort auf die Form

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = f(u, v)$$

bringt und damit unter (1) unterordnet, so ist $\varphi = u$, $\chi = v$ und $\psi = f$, so daß nach (4) die Werte $1 + f_u^2$, $f_u f_v$, $1 + f_v^2$ für E, F, G hervorgehen. Führt man wieder x und y statt u und v ein und benutzt man die auf S. 1 unter (3) erwähnten Abkürzungen, so kommt:

$$(7)\qquad E = 1 + p^2, \qquad F = pq, \qquad G = 1 + q^2.$$

[1] Nach Gauss' „Disquisitiones".

[2] Wie im ersten Bande geben wir hinter dem Summenzeichen **S** nur das erste Glied der Summe an. Die übrigen Glieder gehen daraus durch zyklische Vertauschung von x, y, z hervor. Vgl. I S. 228 u. f.

Die Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G haben eine wichtige Eigenschaft: Sie ändern sich nicht, wenn die starr gedachte Fläche einer Bewegung (I S. 194) unterworfen wird. Man kann dies schon daraus schließen, daß ds^2 als Quadrat des Bogenelements bei der Bewegung ungeändert bleibt. Es soll aber auch durch die Rechnung bestätigt werden: Die Bewegung führe den Punkt (x, y, z) oder (u, v) der Fläche (1) in den Punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ über. Dann ist nach den Formeln I (A)[1] des ersten Bandes:[2]

$$\bar{x} = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a,$$
$$\bar{y} = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + b,$$
$$\bar{z} = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c,$$

wobei die α_i, β_i, γ_i die in I (C) bis (F) angegebenen Bedingungen erfüllen. Infolge dieser drei Formeln und infolge von (1) sind die Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ der Punkte der Fläche in ihrer neuen Lage ebenfalls Funktionen der beiden Parameter u und v, und für diese Funktionen ist:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial y}{\partial u} + \alpha_3 \frac{\partial z}{\partial u}$$

usw., so daß nach I (C) sofort folgt:

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

usw., d. h. nach (5):

$$\bar{E} = E, \quad \bar{F} = F, \quad \bar{G} = G,$$

wenn $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ die Fundamentalgrößen der Fläche in ihrer neuen Lage bedeuten. Daher:

Satz 3: Die Fundamentalgrößen erster Ordnung einer Fläche bleiben bei Ausführung von Bewegungen ungeändert.

Ganz anders verhält es sich, wenn man auf der Fläche neue krummlinige Koordinaten $\bar{u}$, $\bar{v}$ einführt. Setzen wir nämlich wie auf S. 7

(8) $$u = \lambda(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = \mu(\bar{u}, \bar{v}),$$

---

[1] Die Formeln der Tafeln im Anhang zum ersten Bande werden wir immer durch die römische Ziffer der betreffenden Tafel und den Buchstaben der Formelbezeichnung zitieren.

[2] Nach I S. 198 haben wir in jenen Formeln x, y, z mit $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ zu vertauschen, da jetzt x, y, z die Koordinaten des ursprünglichen Punktes bedeuten.

so werden x, y, z nach (1) Funktionen von $\bar{u}$, $\bar{v}$, und es kommt:

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{u}} = x_u \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} + x_v \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \bar{v}} = x_u \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} + x_v \frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}$$

usw. Bedeuten nun $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ die auf die neuen Parameter bezüglichen Fundamentalgrößen erster Ordnung der Fläche, d. h. ist entsprechend (5):

$$\bar{E} = \mathsf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{u}}\right)^2, \qquad \bar{F} = \mathsf{S}\,\frac{\partial x}{\partial \bar{u}}\,\frac{\partial x}{\partial \bar{v}}, \qquad \bar{G} = \mathsf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{v}}\right)^2,$$

so ergibt sich aus den vorhergehenden Formeln:

$$\bar{E} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\right)^2 \mathsf{S}\, x_u^2 + 2\,\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\,\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\,\mathsf{S}\, x_u x_v + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\right)^2 \mathsf{S}\, x_v^2,$$

und ähnlich drücken sich $\bar{F}$ und $\bar{G}$ aus. Die hierin auftretenden Summen sind nach (5) gleich E, F, G. Also kommt:

$$(9)\quad \begin{cases} \bar{E} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\right)^2 E + 2\,\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\,\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\, F + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\right)^2 G, \\ \bar{F} = \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\,\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\, E + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\,\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\,\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\right) F + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\,\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}\, G, \\ \bar{G} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\right)^2 E + 2\,\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\,\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}\, F + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}\right)^2 G. \end{cases}$$

Hierin sind rechts die Funktionen E, F, G von u und v mit Hilfe der Formeln (8) in $\bar{u}$ und $\bar{v}$ auszudrücken. Das Quadrat des Bogenelements hat in der neuen Parameterdarstellung die Form:

$$(10)\qquad ds^2 = \bar{E}\, d\bar{u}^2 + 2\bar{F}\, d\bar{u}\, d\bar{v} + \bar{G}\, d\bar{v}^2.$$

Die Formeln (9) zeigen, daß die Fundamentalgrößen erster Ordnung tatsächlich neue Formen bei Einführung neuer Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$ annehmen. —

Im reellen Falle (vgl. S. 7) sind die Fundamentalgrößen E und G nach (5) reell und positiv, während F zwar reell ist, aber auch negativ sein kann.

Häufig wird auch die Größe

$$(11)\qquad D = \sqrt{EG - F^2}$$

gebraucht. Der Radikand

$$D^2 = EG - F^2 = \mathsf{S}\, x_u^2\, \mathsf{S}\, x_v^2 - (\mathsf{S}\, x_u x_v)^2$$

läßt sich so umformen (vgl. die Formel (11) in I S. 194):

$$(12)\qquad D^2 = (y_u z_v - z_u y_v)^2 + (z_u x_v - x_u z_v)^2 + (x_u y_v - x_v y_u)^2.$$

Mithin ist D^2 die Summe der Quadrate der drei im ersten Paragraphen wiederholt betrachteten Funktionaldeterminanten (siehe z. B. (13) auf S. 6).

Sobald man sich auf einen Bereich beschränkt, innerhalb dessen $EG - F^2$ nirgends gleich Null wird, kann man die Quadratwurzel daraus, also D, bekanntlich durch geeignete Festsetzungen einwertig machen. Insbesondere sieht man aus (12), daß D^2 im reellen Falle stets positiv ist, so daß wir in diesem Falle festsetzen dürfen, D bedeute die positive Quadratwurzel aus $EG - F^2$. Man erkennt übrigens aus (12) sofort, daß D^2 bei reellen Flächen mit reeller Parameterdarstellung nur in den singulären Punkten verschwinden kann (vgl. S. 7). Aber in anderen Fällen kann D^2 sehr wohl den Wert Null annehmen, ohne daß einzeln alle drei in (12) auftretende Funktionaldeterminanten gleich Null werden, also auch an gewissen nicht singulären Stellen. Deshalb schließen wir grundsätzlich solche Stellen einer Fläche, an denen $EG - F^2$ oder D^2 gleich Null wird, bei allen Betrachtungen aus, in denen das Quadrat des Bogenelements der Fläche eine Rolle spielt, es sei denn, daß ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird. Man kann dies auch so ausdrücken: Wir schließen alle Stellen der Fläche aus, an denen das Quadrat des Bogenelements

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

ein vollständiges Quadrat in du und dv wird.

Schließlich sei noch angemerkt, daß bei der Ausführung einer Bewegung, bei der ja E, F und G nach Satz 3 ungeändert bleiben, auch die nach dem Vorhergehenden einwertig gemachte Größe D nicht verändert wird.

Liegt eine Fläche in der besonderen Form $z = f(x, y)$ vor, so hat D nach (7) und (11) den Wert:

$$D = \sqrt{1 + p^2 + q^2}. \tag{13}$$

1. Beispiel: Auf der Kugel um den Anfangspunkt als Mittelpunkt mit dem Radius r — vgl. (6) auf S. 3 —:

$$x = r \cos u \cos v, \qquad y = r \cos u \sin v, \qquad z = r \sin u$$

ist:

$$E = r^2, \qquad F = 0, \qquad G = r^2 \cos^2 u. \qquad D^2 = r^4 \cos^2 u$$

und das Quadrat des Bogenelements:

$$ds^2 = r^2 du^2 + r^2 \cos^2 u \, dv^2.$$

2. Beispiel: Bedeutet u die Bogenlänge der Kurve

$$\mathfrak{x} = \varphi(u), \qquad \mathfrak{y} = \chi(u), \qquad \mathfrak{z} = \psi(u),$$

so hat derjenige Punkt der Tangente der Stelle (u), dessen Abstand vom Berührungspunkte gleich v ist, die Koordinaten:

$$x = \mathfrak{x} + \alpha v, \qquad y = \mathfrak{y} + \beta v, \qquad z = \mathfrak{z} + \gamma v, \tag{14}$$

wobei $\alpha = \varphi'(u)$, $\beta = \chi'(u)$, $\gamma = \psi'(u)$ die Richtungscosinus der Tangente sind. Die Gleichungen (14) sind also, wenn u und v als Parameter aufgefaßt werden, die der Tangentenfläche der Kurve (vgl. 2. Beispiel S. 11 u. I S. 352, Formeln (4)). Hier ist nach III (C):

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \alpha + \frac{l}{r} v, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \beta + \frac{m}{r} v, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \gamma + \frac{n}{r} v,$$

wenn l, m, n die Richtungscosinus der Hauptnormale, r den Krümmungsradius der Gratlinie bedeuten. Ferner kommt:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \beta, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \gamma,$$

so daß nach II (A):

$$E = 1 + \frac{v^2}{r^2}, \qquad F = 1; \qquad G = 1. \qquad D^2 = \frac{v^2}{r^2}$$

und also:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{v^2}{r^2}\right) du^2 + 2\,du\,dv + dv^2$$

ist. Dies steht im Einklange mit Formel (6) in I S. 353.

§ 3. Tangentenebenen einer Fläche.

Für den Fall, daß eine Fläche durch eine Gleichung $F(x, y, z) = 0$ zwischen x, y, z gegeben ist, haben wir in I S. 310 den Begriff und analytischen Ausdruck ihrer Tangentenebenen aufgestellt. Wir wollen jetzt für den Fall, wo die Fläche mittels zweier Parameter u und v in der Form

(1) $$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

vorgelegt ist, ihre Tangentenebenen definieren und bestimmen.

Nach der Definition in I S. 306 berührt eine Gerade die Fläche (1) in einem Flächenpunkte P, falls es auf der Fläche eine Kurve durch P gibt, die in P die Gerade zur Tangente hat. Demnach sind alle Tangenten der Fläche im Punkte P identisch mit den Tangenten, die man in P an alle durch P gehenden Flächenkurven legen kann.

Bedeutet nun (x_0, y_0, z_0) denjenigen Flächenpunkt P, der zu bestimmt gewählten Parametern u_0 und v_0 gehört, so wird irgendeine Flächenkurve durch P nach S. 12 dadurch gewonnen, daß man u und v in (1) als solche Funktionen eines einzigen Parameters t auffaßt, die etwa für $t = t_0$ gerade die Werte u_0 und v_0 annehmen. Da alsdann die Ableitungen von x, y, z nach t die Werte

$$x' = x_u u' + x_v v', \qquad y' = y_u u' + y_v v', \qquad z' = z_u u' + z_v v'$$

haben, kommt der Flächenkurve im Punkte P oder (u_0, v_0) nach Satz 5, I S. 217, die Tangente mit den Gleichungen

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = x_0 + (x_u^0 u_0' + x_v^0 v_0')\tau, \\ \mathfrak{y} = y_0 + (y_u^0 u_0' + y_v^0 v_0')\tau, \\ \mathfrak{z} = z_0 + (z_u^0 u_0' + z_v^0 v_0')\tau \end{cases}$$

zu, wobei der Index Null überall die Substitution $t = t_0$, also $u = u_0$, $v = v_0$ nach vollzogener Differentiation andeuten soll.

Über die Funktionen u und v von t wurde bisher nur insoweit verfügt, als sie für $t = t_0$ die bestimmt gewählten Werte u_0 und v_0 haben sollten. Deshalb sind u_0' und v_0' noch beliebig wählbar. Folglich stellt (2) die Gesamtheit aller Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ aller Tangenten des Punktes (u_0, v_0) dar, wenn v_0', v_0' und τ willkürlich bleiben. Diese Größen treten aber nur in den Produkten $u_0'\tau$ und $v_0'\tau$ auf. Bezeichnen wir sie mit $\bar{u}$ und $\bar{v}$, so folgt: Alle Punkte aller Tangenten des Flächenpunktes (u_0, v_0) werden durch die Gleichungen

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = x_0 + x_u^0 \bar{u} + x_v^0 \bar{v}, \\ \mathfrak{y} = y_0 + y_u^0 \bar{u} + y_v^0 \bar{v}, \\ \mathfrak{z} = z_0 + z_u^0 \bar{u} + z_v^0 \bar{v} \end{cases}$$

gegeben, worin $\bar{u}$ und $\bar{v}$ beliebige Werte haben können.

Da alle übrigen in (3) rechts vorkommenden Größen bestimmte Werte haben, liegt somit ein Gleichungsystem vor, das sich der auf S. 6 gegebenen allgemeinen Darstellung einer Fläche unterordnet, indem $\bar{u}$ und $\bar{v}$ die Parameter sind. Und zwar wird auch die damals ausdrücklich festgesetzte Forderung erfüllt, daß von den drei Funktionen (3) von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ zwei voneinander unabhängig sind. Denn z. B. die Funktionaldeterminante von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ hinsichtlich $\bar{u}$ und $\bar{v}$ hat den Wert

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \bar{v}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u^0 & x_v^0 \\ y_u^0 & y_v^0 \end{vmatrix} = x_u^0 y_v^0 - y_u^0 x_v^0.$$

Entsprechendes gilt von den beiden anderen Funktionaldeterminanten. Folglich handelt es sich um die Werte der drei Determinanten

$$y_u z_v - z_u y_v, \quad z_u x_v - x_u z_v, \quad x_u y_v - y_u x_v$$

für $u = u_0$, $v = v_0$. Diese drei Werte sind aber nach S. 6 nicht alle drei gleich Null, weil ja nach der auf S. 7 getroffenen Festsetzung ein **regulärer** Punkt (u_0, v_0) der Fläche (1) ins Auge gefaßt worden ist.

Bilden somit alle Tangenten des Flächenpunktes (u_0, v_0) eine Fläche, so kann man weiterhin leicht sehen, daß diese Fläche eine

Ebene ist, denn weil jene drei Determinanten nicht sämtlich verschwinden, gibt die Elimination der beiden Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ aus (3) die in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ lineare Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x} - x_0 & x_u^0 & x_v^0 \\ \mathfrak{y} - y_0 & y_u^0 & y_v^0 \\ \mathfrak{z} - z_0 & z_u^0 & z_v^0 \end{vmatrix} = 0,$$

also die Gleichung einer Ebene, die übrigens natürlich durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) geht. Dies Ergebnis formulieren wir, indem wir statt des Flächenpunktes (u_0, v_0) irgend einen Flächenpunkt (u, v) betrachten:

Satz 4: Die Tangenten eines Punktes (u, v) der Fläche

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

bilden eine Ebene, deren Gleichung in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ lautet:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x} - x & x_u & x_v \\ \mathfrak{y} - y & y_u & y_v \\ \mathfrak{z} - z & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

Vgl. hierzu Satz 39, I S. 310. Die gefundene Ebene aller Tangenten eines Flächenpunktes heißt die Tangentenebene oder Tangentialebene des Punktes. Nach der auf S. 7 getroffenen Vereinbarung sind die singulären Punkte einer Fläche ausgeschlossen. Für sie ist der Satz 4 nicht bewiesen und tatsächlich auch nicht immer richtig. Zu einem singulären Punkte gehören nicht wie in einem von solchen Stellen freien Bereiche zu verschiedenen Wertepaaren u, v auch stets verschiedene Punkte der Fläche. Schon deshalb versagt hier die Gültigkeit der vorausgehenden Betrachtungen.

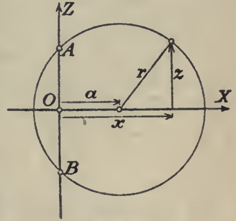


Fig. 5.

Beispiel: Ein Kreis in der xz-Ebene mit dem Radius r und dem Mittelpunkte mit der Abszisse a auf der x-Achse kann mittels des Radiuswinkels u so dargestellt werden:

$$x = a + r\cos u, \qquad y = 0, \qquad z = r\sin u,$$

siehe Fig. 5. Wird der Kreis um die z-Achse gedreht, bis seine Ebene den Winkel v mit der xz-Ebene bildet, so wird er durch

(4) $$x = (a + r\cos u)\cos v, \qquad y = (a + r\cos u)\sin v, \qquad z = r\sin u$$

dargestellt. Bleiben u und v willkürlich, so liegt hier eine Parameterdarstellung der durch die Drehung des Kreises entstehenden Ringfläche vor, die wir

schon im Beispiel in I S. 312 u. f. betrachteten. Hier haben die drei Funktionaldeterminanten die leicht zu berechnenden Werte:

$$y_u z_v - z_u y_v = -r(a + r\cos u)\cos u \cos v,$$
$$z_u x_v - x_u z_v = -r(a + r\cos u)\cos u \sin v,$$
$$x_u y_v - y_u x_v = -r(a + r\cos u)\sin u\,.$$

Sie verschwinden alle drei dann und nur dann, wenn $\cos u = -a:r$ gewählt wird. In diesem Falle gibt (4) die beiden singulären Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = \pm\sqrt{r^2 - a^2}$, die Schnittpunkte A und B der Fläche mit der z-Achse, vgl. Fig. 82, I S. 313. Man sieht, daß sich die Werte $x = 0$, $y = 0$, $z = \pm\sqrt{r^2 - a^2}$ aus (4) für $\cos u = -a:r$ stets ergeben, wie auch der Wert des Parameters v gewählt sein mag. Hier also hört die Gültigkeit der Voraussetzung auf, daß zu einem bestimmten Flächenpunkte nur ein bestimmtes Wertepaar der Parameter u, v vorhanden sei, und deshalb darf auch der Satz 4 für die beiden singulären Punkte nicht benutzt werden. In der Tat bilden die Tangenten in diesen beiden Punkten keine Ebenen, sondern Rotationskegel, vgl. I S. 314, es sei denn, daß $a = 0$ angenommen wird. Im Falle $a = 0$ wird die Ringfläche zur Kugel

$$x = r\cos u \cos v, \qquad y = r\cos u \sin v, \qquad z = r\sin u$$

(vgl. auch das 3. Beispiel, S. 11). Auch auf ihr sind die Schnittpunkte mit der z-Achse als singulär zu bezeichnen, obgleich diese beiden Punkte rein geometrisch einen durchaus regulären Charakter haben und auch Ebenen von Tangenten aufweisen. Die Schuld liegt an der gewählten Parameterdarstellung der Kugel.

Auf die Untersuchung der Tangenten eines singulären Flächenpunktes wollen wir nicht eingehen.

Dagegen ist aber zu erwähnen, daß wir zwar auf S. 18 grundsätzlich auch diejenigen Flächenpunkte ausschlossen, an denen $EG - F^2$ den Wert Null hat, daß aber unsere Bestimmung der Tangentenebenen eines Flächenpunktes auch für solche Stellen gilt. Man kommt gerade zu derartigen Punkten der Fläche, wenn man sich die Frage vorlegt, wann eine Tangentenebene eine Minimalebene ist.

Nach I S. 231 ist nämlich die Ebene

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{B}\mathfrak{y} + \mathfrak{C}\mathfrak{z} = \mathfrak{D} \tag{5}$$

eine Minimalebene, sobald $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2$ den Wert Null hat. Schreibt man aber die Gleichung der Tangentenebene

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x} - x & x_u & x_v \\ \mathfrak{y} - y & y_u & y_v \\ \mathfrak{z} - z & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

in der Form (5), so kommt:

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = y_u z_v - z_u y_v, \quad \mathfrak{B} = z_u x_v - x_u z_v, \quad \mathfrak{C} = x_u y_v - y_u x_v, \\ \mathfrak{D} = \begin{vmatrix} x & x_u & x_v \\ y & y_u & y_v \\ z & z_u & z_v \end{vmatrix}, \end{cases}$$

und daraus sieht man nach (12), S. 17, daß die Tangentenebene dann und nur dann eine Minimalebene ist, wenn $EG - F^2$ für den betrachteten Flächenpunkt verschwindet. Wir haben also den

Satz 5: Die Tangentenebene eines Flächenpunktes ist nur dann eine Minimalebene, wenn $EG - F^2$ oder D^2 für den Punkt verschwindet.

Entsprechend der in I S. 209 eingeführten Bezeichnung der Minimalpunkte einer Raumkurve liegt es deshalb nahe, diejenigen Flächenpunkte, für die $D^2 = 0$ ist, Minimalpunkte der Fläche zu nennen. Demnach schließen wir, wenn von Flächenpunkten schlechtweg die Rede ist, ihre singulären Punkte und ihre Minimalpunkte aus.

Wir kehren nun zur Betrachtung der Tangentenebenen regulärer Flächenpunkte zurück.

Nahe liegt die Vermutung, daß die Tangentenebene eines Flächenpunktes (u, v) auch hervorgeht, wenn man durch diesen Punkt und durch zwei benachbarte Punkte $(u + \Delta_1 u,\ v + \Delta_1 v)$ und $(u + \Delta_2 u,\ v + \Delta_2 v)$ der Fläche die Ebene legt und die Grenzlage untersucht, die dieser Ebene zukommt, sobald die beiden benachbarten Punkte nach der Stelle $(u,\ v)$ streben.

Um dies zu beweisen, bezeichnen wir wie immer mit x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes $(u,\ v)$, dagegen mit $x + \Delta_1 x$, $y + \Delta_1 y$, $z + \Delta_1 z$ die des Punktes $(u + \Delta_1 u,\ v + \Delta_1 v)$ und mit $x + \Delta_2 x, y + \Delta_2 y, z + \Delta_2 z$ die des Punktes $(u + \Delta_2 u, v + \Delta_2 v)$. In den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ hat alsdann die Ebene durch alle drei Punkte die Gleichung

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x} - x & \Delta_1 x & \Delta_2 x \\ \mathfrak{y} - y & \Delta_1 y & \Delta_2 y \\ \mathfrak{z} - z & \Delta_1 z & \Delta_2 z \end{vmatrix} = 0.$$

Hierin ist nach (1):

$$\Delta_1 x = \varphi(u + \Delta_1 u,\ v + \Delta_1 v) - \varphi(u, v),$$
$$\Delta_2 x = \varphi(u + \Delta_2 u,\ v + \Delta_2 v) - \varphi(u, v).$$

Diese Differenzen lassen sich in folgender Weise identisch umformen:

$$\Delta_1 x = \frac{\varphi(u+\Delta_1 u, v+\Delta_1 v) - \varphi(u, v+\Delta_1 v)}{\Delta_1 u}\Delta_1 u + \frac{\varphi(u, v+\Delta_1 v) - \varphi(u,v)}{\Delta_1 v}\Delta_1 v,$$
$$\Delta_2 x = \frac{\varphi(u+\Delta_2 u, v+\Delta_2 v) - \varphi(u, v+\Delta_2 v)}{\Delta_2 u}\Delta_2 u + \frac{\varphi(u, v+\Delta_2 v) - \varphi(u,v)}{\Delta_2 v}\Delta_2 v.$$

In entsprechender Weise lassen sich die Differenzen $\Delta_1 y$, $\Delta_2 y$ und $\Delta_1 z$, $\Delta_2 z$ darstellen.

Nunmehr dividieren wir die Gleichung (8) mit $\Delta_1 u\, \Delta_2 u$, indem wir die zweite Reihe der Determinante mit $\Delta_1 u$ und die dritte mit $\Delta_2 u$ dividieren. Alsdann lauten die ersten Glieder der zweiten und dritten Reihe so:

$$\frac{\varphi(u+\Delta_1 u, v+\Delta_1 v) - \varphi(u, v+\Delta_1 v)}{\Delta_1 u} + \frac{\varphi(u, v+\Delta_1 v) - \varphi(u,v)}{\Delta_1 v}\,\frac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u},$$
$$\frac{\varphi(u+\Delta_2 u, v+\Delta_2 v) - \varphi(u, v+\Delta_2 v)}{\Delta_2 u} + \frac{\varphi(u, v+\Delta_2 v) - \varphi(u,v)}{\Delta_2 v}\,\frac{\Delta_2 v}{\Delta_2 u}.$$

Entsprechendes gilt für die übrigen Glieder der zweiten und dritten Reihe der Determinante.

Wenn jetzt $\Delta_1 u$, $\Delta_1 v$ und $\Delta_2 u$, $\Delta_2 v$ irgendwie nach Null streben, gehen die soeben ausführlich angegebenen Glieder bekanntlich über in

$$\frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u} + \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v}\lim\frac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u},$$
$$\frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u} + \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v}\lim\frac{\Delta_2 v}{\Delta_2 u}.$$

Daher nimmt die Gleichung (8) die Form an:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x} - x & \varphi_u + \varphi_v \lim\frac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u} & \varphi_u + \varphi_v \lim\frac{\Delta_2 v}{\Delta_2 u} \\ \mathfrak{y} - y & \chi_u + \chi_v \lim\frac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u} & \chi_u + \chi_v \lim\frac{\Delta_2 v}{\Delta_2 u} \\ \mathfrak{z} - z & \psi_u + \psi_v \lim\frac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u} & \psi_u + \psi_v \lim\frac{\Delta_2 v}{\Delta_2 u} \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Zerspalten der zweiten und dritten Reihe geht die Determinante in eine Summe von vier Determinanten über, von denen zwei identisch gleich Null und zwei einander entgegengesetzt gleich sind. Somit kommt:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x} - x & \varphi_u & \varphi_v \\ \mathfrak{y} - y & \chi_u & \chi_v \\ \mathfrak{z} - z & \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \left(\lim\frac{\Delta_2 v}{\Delta_2 u} - \lim\frac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u}\right) = 0.$$

Der Faktor

$$\lim\frac{\Delta_2 v}{\Delta_2 u} - \lim\frac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u}$$

kann irgendwelche Werte annehmen, weil das Streben der beiden dem Punkte (u, v) benachbarten Flächenpunkte nach der Stelle (u, v) in

beliebiger Weise auf der Fläche stattfinden darf, so daß dadurch der Fall ausgeschlossen wird, daß alle drei Punkte in einer geraden Linie liegen, also keine Ebene bestimmen. Der Grenzübergang liefert mithin:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x} - x & \varphi_u & \varphi_v \\ \mathfrak{y} - y & \chi_u & \chi_v \\ \mathfrak{z} - z & \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix} = 0,$$

also die Gleichung (6) der Tangentenebene. Somit gilt der

Satz 6: Streben zwei einem Flächenpunkte irgendwie benachbarte Flächenpunkte in einer beliebigen Art auf der Fläche nach jenem ersten Punkte, so strebt die Ebene aller drei Punkte nach der Tangentenebene des ersten Punktes.

Zu demselben Ergebnisse kommt man übrigens auch so: Die Gerade vom Punkte (u, v) nach dem Punkte $(u + \Delta_1 u, v + \Delta_1 v)$ wird beim Grenzübergange eine Flächentangente des Punktes (u, v). Dasselbe gilt von der Geraden vom Punkte (u, v) nach dem Punkte $(u + \Delta_2 u, v + \Delta_2 v)$. Da die Inkremente $\Delta_1 u, \Delta_1 v$ und $\Delta_2 u, \Delta_2 v$ irgendwie nach Null streben, gehen somit zwei beliebige Tangenten des Punktes (u, v) hervor. Die Ebene der drei Punkte wird also in der Grenzlage die Ebene zweier Tangenten des Punktes (u, v), d. h. seine Tangentenebene.

Die Tangentenebene des Flächenpunktes (u, v) läßt sich statt in der Form (6) auch wie jede Fläche (vgl. S. 6) mittels zweier Parameter ausdrücken. Eine derartige Darstellung wurde schon in (3) für die Tangentenebene des Punktes (u_0, v_0) gegeben. Allgemein stellt

$$(9) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = x + x_u \bar{u} + x_v \bar{v}, \\ \mathfrak{y} = y + y_u \bar{u} + y_v \bar{v}, \\ \mathfrak{z} = z + z_u \bar{u} + z_v \bar{v} \end{cases}$$

die Tangentenebene des Flächenpunktes (u, v) mit Hilfe zweier Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$ dar.

Drückt man dagegen die Tangentenebene durch eine in $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ lineare Gleichung wie in (5) aus:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{B}\mathfrak{y} + \mathfrak{C}\mathfrak{z} = \mathfrak{D},$$

so sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ die vier Größen (7) oder zu ihnen proportional, also die drei Verhältnisse der vier Koeffizienten Funktionen der beiden Parameter u, v. Demnach hat eine Fläche eine höchstens zweifach unendliche Schar von Tangentenebenen, vgl. I S. 376. Die Schar ist einfach unendlich, wenn die Fläche die Tangenten-

fläche einer nicht ebenen Kurve oder ein Kegel oder Zylinder ist, der nicht in eine Ebene ausartet, nach Satz 13, I S. 381. Dies tritt ein, wenn die drei Verhältnisse der vier Koeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ voneinander abhängige Funktionen von u und v, aber nicht sämtlich konstant sind. Wenn diese drei Verhältnisse dagegen konstant sind, liegt bloß eine Tangentenebene vor, und die Fläche ist dann diese Ebene selbst.

§ 4. Einhüllende einer zweifach unendlichen Ebenenschar.

In § 3 des 3. Abschnittes, 1. Bd., erledigten wir die Frage nach der Einhüllenden einer einfach unendlichen Schar von Ebenen. Nunmehr wollen wir die Frage stellen, wann es eine Fläche gibt, die alle Ebenen einer gegebenen zweifach unendlichen Schar von Ebenen zu Tangentenebenen hat. Ist die Fläche vorhanden, so wird sie die E i n h ü l l e n d e der gegebenen Ebenenschar genannt.

Wir nehmen also an, es sei eine Ebenenschar durch eine Gleichung

$$\mathfrak{A}(u,v)\mathfrak{x} + \mathfrak{B}(u,v)\mathfrak{y} + \mathfrak{C}(u,v)\mathfrak{z} = \mathfrak{D}(u,v) \tag{1}$$

gegeben, in der die Koeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ gegebenene Funktionen zweier Parameter u und v seien, und zwar derart, daß von den drei Verhältnissen der Koeffizienten zwei auch wirklich voneinander unabhängig sind. G e s u c h t werden nun die Gleichungen einer Fläche

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \chi(u,v), \quad z = \psi(u,v),$$

die in ihren Punkten (u,v) oder (x,y,z) die zu denselben Parameterwerten u,v gehörigen Ebenen (1) berührt. Wir fordern also, daß die Gleichung (1) für beliebige Werte von u und v durch die laufenden Koordinaten

$$\left|\begin{aligned} \mathfrak{x} &= x + x_u\bar{u} + x_v\bar{v}, \\ \mathfrak{y} &= y + y_u\bar{u} + y_v\bar{v}, \\ \mathfrak{z} &= z + z_u\bar{u} + z_v\bar{v} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

der Tangentenebene (vgl. (9) auf S. 25) erfüllt werde, wie auch $\bar{u}$ und $\bar{v}$ gewählt werden mögen. Zunächst kommt daher die Forderung:[1]

$$\mathbf{S}\,\mathfrak{A}(x + x_u\bar{u} + x_v\bar{v}) = \mathfrak{D},$$

die wegen der Willkür von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ in die drei einzelnen zerfällt:

$$\mathbf{S}\,\mathfrak{A}x = \mathfrak{D}, \quad \mathbf{S}\,\mathfrak{A}x_u = 0, \quad \mathbf{S}\,\mathfrak{A}x_v = 0. \tag{3}$$

Unsere Aufgabe ist demnach, zu untersuchen, o b und w a n n es drei Funktionen x, y, z von u und v gibt, die den drei

[1] Das Summenzeichen bezieht sich hier natürlich auch auf die zyklische Vertauschung von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Gleichungen (3) genügen und nicht alle drei voneinander abhängen, nach S. 6. Hierbei schicken wir einen auch sonst nützlichen rein analytischen Hilfssatz voraus:

Satz 7: Liegen drei Funktionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ von zwei Veränderlichen u und v vor, so sind ihre beiden Verhältnisse dann und nur dann voneinander abhängig, wenn die Determinante der Funktionen, ihrer ersten Ableitungen nach u und ihrer ersten Ableitungen nach v identisch gleich Null ist:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{A}_u & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{C}_u \\ \mathfrak{A}_v & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{C}_v \end{vmatrix} = 0.$$

Beim Beweise können wir etwa $\mathfrak{C} \neq 0$ annehmen. Dann sind $\mathfrak{A}:\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}:\mathfrak{C}$ voneinander abhängig, sobald ihre Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mathfrak{A}_u \mathfrak{C} - \mathfrak{C}_u \mathfrak{A}}{\mathfrak{C}^2} & \dfrac{\mathfrak{A}_v \mathfrak{C} - \mathfrak{C}_v \mathfrak{A}}{\mathfrak{C}^2} \\ \dfrac{\mathfrak{B}_u \mathfrak{C} - \mathfrak{C}_u \mathfrak{B}}{\mathfrak{C}^2} & \dfrac{\mathfrak{B}_v \mathfrak{C} - \mathfrak{C}_v \mathfrak{B}}{\mathfrak{C}^2} \end{vmatrix}$$

verschwindet. Die Ausrechnung lehrt aber, daß diese Determinante gleich der im Satze angegebenen, dividiert mit $\mathfrak{C}^3$, ist. —

Nach dieser Vorbemerkung betrachten wir die drei Forderungen (3). Sie lassen sich leicht durch drei andere ersetzen, die in x, y, z linear sind. Denn wenn die Gleichungen (3) bestehen, müssen auch diejenigen beiden Gleichungen gelten, die durch Differentiation der ersten nach u bzw. v hervorgehen:

$$\mathbf{S}\,\mathfrak{A}_u x + \mathbf{S}\,\mathfrak{A} x_u = \mathfrak{D}_u, \qquad \mathbf{S}\,\mathfrak{A}_v x + \mathbf{S}\,\mathfrak{A} x_v = \mathfrak{D}_v,$$

die sich aber infolge der zweiten und dritten Forderung (3) vereinfachen:

$$\mathbf{S}\,\mathfrak{A}_u x = \mathfrak{D}_u, \qquad \mathbf{S}\,\mathfrak{A}_v x = \mathfrak{D}_v.$$

Umgekehrt: Wenn die drei Gleichungen

(4) $$\mathbf{S}\,\mathfrak{A} x = \mathfrak{D}, \quad \mathbf{S}\,\mathfrak{A}_u x = \mathfrak{D}_u, \quad \mathbf{S}\,\mathfrak{A}_v x = \mathfrak{D}_v$$

erfüllt sind, gelten auch die drei Gleichungen (3), wie man leicht erkennt.

Demnach gibt es dann und nur dann eine Fläche, die alle Ebenen der Schar (1) zu Tangentenebenen hat, sobald es drei Funktionen x, y, z von u und v gibt, die den Bedingungen (4) genügen und von denen zwei voneinander unabhängig sind.

Die Bedingungen (4) sind, wie gesagt, linear in x, y, z und haben die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{A}_u & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{C}_u \\ \mathfrak{A}_v & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{C}_v \end{vmatrix}.$$

Man erkennt leicht, daß $\varDelta \neq 0$ sein muß. Wäre nämlich $\varDelta = 0$, so würden die Gleichungen (4) bekanntlich nur dann Auflösungen x, y, z haben, wenn auch die drei Determinanten

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{D}_u & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{C}_u \\ \mathfrak{D}_v & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{C}_v \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{D} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{A}_u & \mathfrak{D}_u & \mathfrak{C}_u \\ \mathfrak{A}_v & \mathfrak{D}_v & \mathfrak{C}_v \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{A}_u & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{D}_u \\ \mathfrak{A}_v & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{D}_v \end{vmatrix}$$

gleich Null wären, d. h. nach Satz 7, wenn alle drei Verhältnisse der vier Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ voneinander abhängig wären. Dann aber wäre die Schar (1) von Ebenen nicht zweifach unendlich.

Somit ist nur noch der Fall $\varDelta \neq 0$ zu untersuchen. In diesem Falle haben die Gleichungen (4) nur das eine System von Auflösungen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, sobald ihre rechten Seiten verschwinden, also $\mathfrak{D} = 0$ ist. Mithin muß auch $\mathfrak{D} \neq 0$ angenommen werden. Ist aber $\varDelta \neq 0$ und $\mathfrak{D} \neq 0$, so haben die Gleichungen (4) die Auflösungen:

$$(5)\quad x = \frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{D}_u & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{C}_u \\ \mathfrak{D}_v & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{C}_v \end{vmatrix}, \qquad y = \frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{D} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{A}_u & \mathfrak{D}_u & \mathfrak{C}_u \\ \mathfrak{A}_v & \mathfrak{D}_v & \mathfrak{C}_v \end{vmatrix}, \qquad z = \frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{A}_u & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{D}_u \\ \mathfrak{A}_v & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{D}_v \end{vmatrix}.$$

Es bleibt nur noch zu untersuchen übrig, ob von diesen drei Funktionen von u und v auch wirklich zwei voneinander unabhängig sind, ob also auch wirklich nicht alle drei Funktionaldeterminanten

$$(6)\qquad y_u z_v - z_u y_v, \quad z_u x_v - x_u z_v, \quad x_u y_v - y_u x_v$$

verschwinden. Man könnte die Ableitungen von x, y, z nach u und v aus (5) direkt berechnen und dann auch die Werte der drei Determinanten (6) ermitteln. Aber bequemer ist der folgende Weg: Da die gefundenen Funktionen (5) die Forderungen (4) erfüllen, genügen sie auch den Forderungen (3), denn von den Bedingungen (4) und (3) ziehen die einen, wie hervorgehoben wurde, die anderen nach sich. Differenzieren wir nun die beiden letzten Gleichungen (4) nach u bzw. v, so kommt:

$$\mathsf{S}\,\mathfrak{A}_u x_u + \mathsf{S}\,\mathfrak{A}_{uu} x = \mathfrak{D}_{uu}, \qquad \mathsf{S}\,\mathfrak{A}_u x_v + \mathsf{S}\,\mathfrak{A}_{uv} x = \mathfrak{D}_{uv},$$
$$\mathsf{S}\,\mathfrak{A}_v x_u + \mathsf{S}\,\mathfrak{A}_{uv} x = \mathfrak{D}_{uv}, \qquad \mathsf{S}\,\mathfrak{A}_v x_v + \mathsf{S}\,\mathfrak{A}_{vv} x = \mathfrak{D}_{vv}.$$

Fügen wir die beiden letzten Gleichungen (3) hinzu, so erhalten wir je drei in x_u, y_u, z_u bzw. x_v, y_v, z_v lineare Gleichungen:

$$\mathbf{S}\mathfrak{A}x_u = 0, \qquad \mathbf{S}\mathfrak{A}x_v = 0,$$
$$\mathbf{S}\mathfrak{A}_u x_u = \mathfrak{D}_{uu} - \mathbf{S}\mathfrak{A}_{uu}x, \quad \mathbf{S}\mathfrak{A}_u x_v = \mathfrak{D}_{uv} - \mathbf{S}\mathfrak{A}_{uv}x,$$
$$\mathbf{S}\mathfrak{A}_v x_u = \mathfrak{D}_{uv} - \mathbf{S}\mathfrak{A}_{uv}x, \quad \mathbf{S}\mathfrak{A}_v x_v = \mathfrak{D}_{vv} - \mathbf{S}\mathfrak{A}_{vv}x,$$

die sich auflösen lassen, da $\Delta \neq 0$ ist. Die Auflösungen sind, wenn wir zur Abkürzung

(7) $\alpha = \mathfrak{D}_{uu} - \mathbf{S}\mathfrak{A}_{uu}x, \quad \beta = \mathfrak{D}_{uv} - \mathbf{S}\mathfrak{A}_{uv}x, \quad \gamma = \mathfrak{D}_{vv} - \mathbf{S}\mathfrak{A}_{vv}x$

setzen, die folgenden:

$$x_u = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} \\ \alpha & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{C}_u \\ \beta & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{C}_v \end{vmatrix}, \qquad x_v = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} \\ \beta & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{C}_u \\ \gamma & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{C}_v \end{vmatrix}$$

oder

$$x_u = \frac{1}{\Delta}[\alpha(\mathfrak{B}_v\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_v\mathfrak{B}) - \beta(\mathfrak{B}_u\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_u\mathfrak{B})],$$
$$x_v = \frac{1}{\Delta}[\beta(\mathfrak{B}_v\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_v\mathfrak{B}) - \gamma(\mathfrak{B}_u\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_u\mathfrak{B})],$$

so wie die entsprechend gebauten Ausdrücke für y_u, y_v und z_u, z_v. Mit Hilfe dieser Werte bilden wir nun die Funktionaldeterminanten (6). Eine einfache Ausrechnung zeigt, daß sie gleich

$$\frac{\mathfrak{A}}{\Delta}(\alpha\gamma - \beta^2), \qquad \frac{\mathfrak{B}}{\Delta}(\alpha\gamma - \beta^2), \qquad \frac{\mathfrak{C}}{\Delta}(\alpha\gamma - \beta^2)$$

werden. Da die Größe α durch die erste Formel (7) definiert ist, gibt die Substitution der Werte (5) von x, y, z:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{A}_u & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{C}_u & \mathfrak{D}_u \\ \mathfrak{A}_v & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{C}_v & \mathfrak{D}_v \\ \mathfrak{A}_{uu} & \mathfrak{B}_{uu} & \mathfrak{C}_{uu} & \mathfrak{D}_{uu} \end{vmatrix},$$

und β und γ gehen hieraus hervor, wenn man die letzte Zeile durch

$$\mathfrak{A}_{uv}\mathfrak{B}_{uv}\mathfrak{C}_{uv}\mathfrak{D}_{uv} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{A}_{vv}\mathfrak{B}_{vv}\mathfrak{C}_{vv}\mathfrak{D}_{vv}$$

ersetzt. Somit kommt der

Satz 8: Liegt eine zweifach unendliche Schar von Ebenen

$$\mathfrak{A}(u,v)\mathfrak{x} + \mathfrak{B}(u,v)\mathfrak{y} + \mathfrak{C}(u,v)\mathfrak{z} = \mathfrak{D}(u,v)$$

vor, d. h. bedeuten hierin $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ solche Funktionen von zwei Parametern u, v, deren drei Verhältnisse nicht sämtlich voneinander abhängen, so sind alle Ebenen der Schar dann und nur dann die Tangentenebenen einer Fläche, wenn erstens $\mathfrak{D}$ von Null verschieden, zweitens die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{A}_u & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{C}_u \\ \mathfrak{A}_v & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{C}_v \end{vmatrix}$$

von Null verschieden und drittens der Ausdruck

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{A}_u & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{C}_u & \mathfrak{D}_u \\ \mathfrak{A}_v & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{C}_v & \mathfrak{D}_v \\ \mathfrak{A}_{uu} & \mathfrak{B}_{uu} & \mathfrak{C}_{uu} & \mathfrak{D}_{uu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{A}_u & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{C}_u & \mathfrak{D}_u \\ \mathfrak{A}_v & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{C}_v & \mathfrak{D}_v \\ \mathfrak{A}_{vv} & \mathfrak{B}_{vv} & \mathfrak{C}_{vv} & \mathfrak{D}_{vv} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{A}_u & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{C}_u & \mathfrak{D}_u \\ \mathfrak{A}_v & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{C}_v & \mathfrak{D}_v \\ \mathfrak{A}_{uv} & \mathfrak{B}_{uv} & \mathfrak{C}_{uv} & \mathfrak{D}_{uv} \end{vmatrix}^2$$

von Null verschieden ist. Die Gleichungen der Fläche lauten alsdaun:

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{D}_u & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{C}_u \\ \mathfrak{D}_v & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{C}_v \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{D} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{A}_u & \mathfrak{D}_u & \mathfrak{C}_u \\ \mathfrak{A}_v & \mathfrak{D}_v & \mathfrak{C}_v \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{A}_u & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{D}_u \\ \mathfrak{A}_v & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{D}_v \end{vmatrix},$$

ausgedrückt mittels der Parameter u, v.

Da $\mathfrak{D} \neq 0$ sein muß, kann man die Gleichung (1) der Ebenenschar von vornherein mit $\mathfrak{D}$ dividieren, d. h. voraussetzen, daß $\mathfrak{D} = 1$ sei:

$$\mathfrak{A}(u, v)\mathfrak{x} + \mathfrak{B}(u, v)\mathfrak{y} + \mathfrak{C}(u, v)\mathfrak{z} = 1 . \tag{8}$$

Alsdann sind

$$x = \frac{\mathfrak{B}_u\mathfrak{C}_v - \mathfrak{C}_u\mathfrak{B}_v}{\Delta}, \quad y = \frac{\mathfrak{C}_u\mathfrak{A}_v - \mathfrak{A}_u\mathfrak{C}_v}{\Delta}, \quad z = \frac{\mathfrak{A}_u\mathfrak{B}_v - \mathfrak{B}_u\mathfrak{A}_v}{\Delta} \tag{9}$$

die Gleichungen der Fläche, vorausgesetzt, daß die Determinante $\Delta \neq 0$ und außerdem ist:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{A}_u & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{C}_u \\ \mathfrak{A}_v & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{C}_v \\ \mathfrak{A}_{uu} & \mathfrak{B}_{uu} & \mathfrak{C}_{uu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_u & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{C}_u \\ \mathfrak{A}_v & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{C}_v \\ \mathfrak{A}_{vv} & \mathfrak{B}_{vv} & \mathfrak{C}_{vv} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_u & \mathfrak{B}_u & \mathfrak{C}_u \\ \mathfrak{A}_v & \mathfrak{B}_v & \mathfrak{C}_v \\ \mathfrak{A}_{uv} & \mathfrak{B}_{uv} & \mathfrak{C}_{uv} \end{vmatrix}^2 \neq 0 .$$

Mit der Frage, welche besonderen Eigentümlichkeiten die vorgelegte zweifach unendliche Ebenenschar hat, sobald sie nicht aus allen Tangentenebenen einer Fläche besteht, wollen wir uns nicht weiter beschäftigen. Wir erwähnen nur ohne Beweis, daß dann die Schar entweder aus allen denjenigen Ebenen besteht, die eine nicht geradlinige Kurve berühren, oder aus allen Ebenen, die den Tangentenebenen eines eventuell in eine Gerade ausartenden Kegels parallel sind, oder endlich aus allen Ebenen durch einen Punkt. Macht man von den Auffassungen der projektiven Geometrie Gebrauch (vgl. I S. 457), so kann man im zweiten Falle auch sagen, daß die Schar aus allen Ebenen besteht, die eine nicht gerade

unendlich ferne Kurve berühren oder durch ein und denselben unendlich fernen Punkt gehen.

Erwähnenswert ist aber noch ein besonderer Fall, in dem der Satz 8 nicht gilt. Nach I S. 462 wird eine Minimalebene durch den Punkt (x, y, z) in der Form

$$(1-\tau^2)\mathfrak{x} + i(1+\tau^2)\mathfrak{y} + 2\tau\mathfrak{z} = (1-\tau^2)x + i(1+\tau^2)y + 2\tau z$$

dargestellt. Wenn wir τ mit u und die rechte Seite mit v bezeichnen, wird demnach

$$(1-u^2)\mathfrak{x} + i(1+u^2)\mathfrak{y} + 2u\mathfrak{z} = v$$

eine Darstellung aller Minimalebenen des Raumes. Ihre Gesamtheit ist zweifach unendlich. Da die Koeffizienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ nur von u abhängen, ist hier $\Delta = 0$ (vgl. Satz 7), so daß der Satz 8 nicht gilt. Die Gesamtheit aller Minimalebenen umhüllt also, wie übrigens vorauszusehen war, keine Fläche. Daraus folgt, daß eine Fläche, deren Tangentenebenen lauter Minimalebenen sind, nur eine einfach unendliche Schar von Tangentenebenen haben kann und also entweder die Tangentenfläche einer Minimalkurve (vgl. I S. 462) oder ein Kegel von Minimalgeraden, d. h. eine Nullkugel (vgl. I S. 454). Nach I S. 389 kann sie kein Zylinder von Minimalgeraden sein. Mit Rücksicht auf Satz 5, S. 23, haben wir somit den

Satz 9: Die Flächen, auf denen überall $EG - F^2$ oder D^2 verschwindet, sind die Tangentenflächen von Minimalkurven, die nicht-zylindrischen Kegel von Minimalgeraden und die Minimalebenen.

Unter den Minimalkurven sind natürlich diejenigen von der ersten Ordnung verstanden. Wir werden überhaupt, wenn von Minimalkurven schlechtweg gesprochen wird, darunter immer die von erster Ordnung verstehen. Andernfalls werden wir ausdrücklich von denen der zweiten Ordnung reden. Vgl. I S. 242.

§ 5. Fortschreitungsrichtungen von einem Flächenpunkte aus.

Wir kehren zur Betrachtung der Tangentenebenen einer gegebenen Fläche

(1) $$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

zurück, deren Bogenelement-Quadrat durch die Formel

(2) $$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

ausgedrückt sei. Wir haben gesehen, daß die Tangentenebene des Flächenpunktes (u, v) in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Gleichung hat (vgl. Satz 4, S. 21):

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}-x & x_u & x_v \\ \mathfrak{y}-y & y_u & y_v \\ \mathfrak{z}-z & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gerade, die im Berührungspunkte (u, v) auf der Tangentenebene senkrecht steht, heißt, vgl. I S. 311, die Normale der Fläche im Punkte (u, v). Ihre Richtungscosinus sind nach (3) zu den Größen

$$y_u z_v - z_u y_v, \quad z_u x_v - x_u z_v, \quad x_u y_v - y_u x_v$$

proportional. Da die Summe der Quadrate dieser Größen nach (12), S. 17, gleich D^2 ist, sind:

$$(4)\qquad X = \frac{y_u z_v - z_u y_v}{D}, \quad Y = \frac{z_u x_v - x_u z_v}{D}, \quad Z = \frac{x_u y_v - y_u x_v}{D}$$

die Richtungskosinus X, Y, Z der Normalen. Dadurch, daß wir D und nicht $-D$ geschrieben haben, ist die Normale in bestimmter Weise orientiert worden. Insbesondere unterscheiden wir hiernach im reellen Falle zwischen einer positiven und negativen Normalenrichtung.

Wir merken hier einige öfters anzuwendende Formeln an. Zunächst ist augenscheinlich:

$$\mathbf{S}\, X^2 = 1, \quad \mathbf{S}\, X X_u = 0, \quad \mathbf{S}\, X X_v = 0,$$

ferner:

$$(5)\qquad \mathbf{S}\, X x_u = 0, \quad \mathbf{S}\, X x_v = 0.$$

Ferner ist nach (4):

$$Y z_u - Z y_u = \frac{1}{D}\{(y_u^2 + z_u^2) x_v - (y_u y_v + z_u z_v) x_u\}.$$

Wenn wir in der großen Klammer $x_u^2 x_v$ addieren und subtrahieren, kommt nach (5), S. 15:

$$Y z_u - Z y_u = \frac{E x_v - F x_u}{D}.$$

Ebenso ergibt sich überhaupt eine Reihe von Formeln:

$$(6)\qquad \begin{cases} Y z_u - Z y_u = \dfrac{E x_v - F x_u}{D}, & Y z_v - Z y_v = \dfrac{F x_v - G x_u}{D}, \\ Z x_u - X z_u = \dfrac{E y_v - F y_u}{D}, & Z x_v - X z_v = \dfrac{F y_v - G y_u}{D}, \\ X y_u - Y x_u = \dfrac{E z_v - F z_u}{D}, & X y_v - Y x_v = \dfrac{F z_v - G z_u}{D}. \end{cases}$$

Auch folgt:

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix} = D,$$

wenn man die Determinante nach der letzten Reihe entwickelt und die Werte (4) benutzt.

Wir wollen nun vier einander benachbarte Punkte auf der Fläche betrachten, die zusammen die Ecken eines von Parameterlinien gebildeten krummen Vierecks auf der Fläche sind. Außer dem Punkte (u, v) oder (x, y, z) fassen wir nämlich noch einen Punkt $(u + \Delta u, v)$ auf der durch ihn gehenden Parameterlinie (v) sowie einen Punkt $(u, v + \Delta v)$ auf der durch ihn gehenden Parameterlinie (u) ins Auge, siehe Fig. 6, und dazu fügen wir schließlich noch den Punkt $(u + \Delta u, v + \Delta v)$. Er liegt sowohl auf der Parameterlinie $(v + \Delta v)$ als auch auf der Parameterlinie $(u + \Delta u)$ und ist daher in der Tat die vierte Ecke des von den drei ersten Punkten bestimmten und durch Parameterlinien begrenzten Vierecks. Beim Grenzübergange, wenn man Δu und Δv nach Null streben läßt, wird diese Masche des Netzes der Parameterlinien eine unendlich kleine Masche, in der die Richtungsunterschiede einander gegenüberliegender Seiten auch nach Null streben, so daß man die Masche ein unendlich kleines Parallelogramm nennen kann (vgl. I S. 164). Dabei streben mithin auch alle vier Ecken der Masche nach der Ebene des Parallelogramms, und diese Ebene ist nach Satz 6, S. 25, die Tangentenebene des Punktes (u, v). Sie enthält insbesondere die Tangenten der beiden vom Punkte (u, v) ausgehenden Parameterlinien, und auf diesen Tangenten liegen zwei Seiten des Parallelogramms. Da längs der Parameterlinie (v) der Parameter v konstant ist, sind

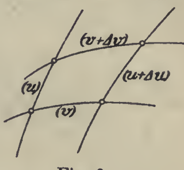


Fig. 6.

$$(8) \qquad \mathfrak{x} = x + x_u t, \quad \mathfrak{y} = y + y_u t, \quad \mathfrak{z} = z + z_u t$$

die Gleichungen ihrer Tangente im Punkte (u, v) oder (x, y, z), dargestellt mittels eines Parameters t. Entsprechend sind

$$(9) \qquad \mathfrak{x} = x + x_v t, \quad \mathfrak{y} = y + y_v t, \quad \mathfrak{z} = z + z_v t$$

die der Tangente der Parameterlinie (u) im Punkte (u, v) oder (x, y, z). Nach I S. 191 sind diese Tangenten Minimalgeraden, sobald

$$\mathbf{S}\, x_u^2 = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{S}\, x_v^2 = 0$$

ist, wofür man nach (5), S. 15, auch $E = 0$ und $G = 0$ schreiben kann. Demnach ist der betrachtete Punkt (u, v) für die durch ihn gehenden Parameterlinien ein Minimalpunkt erster Ordnung (vgl. I S. 209) dann und nur dann, wenn E und G an der Stelle (u, v) den Wert Null annehmen. Wir haben somit den

Satz 10: Die Tangenten der beiden Parameterlinien in einem Flächenpunkte (u, v) sind dann und nur dann Minimalgeraden, wenn für diesen Punkt die Fundamentalgrößen E und G verschwinden.

Wir wollen nun annehmen, daß E und G in dem betrachteten Flächenpunkte (u, v) nicht gleich Null seien. Alsdann hat die Tangente der Parameterlinie (v) die Richtungskosinus:

$$\frac{x_u}{\sqrt{\mathrm{S}\, x_u^2}}, \quad \frac{y_u}{\sqrt{\mathrm{S}\, x_u^2}}, \quad \frac{z_u}{\sqrt{\mathrm{S}\, x_u^2}},$$

d. h. nach (5), S. 15, diese:

$$(10) \qquad \frac{x_u}{\sqrt{E}}, \quad \frac{y_u}{\sqrt{E}}, \quad \frac{z_u}{\sqrt{E}},$$

während die Tangente der Parameterlinie (u) die Richtungskosinus hat:

$$(11) \qquad \frac{x_v}{\sqrt{G}}, \quad \frac{y_v}{\sqrt{G}}, \quad \frac{z_v}{\sqrt{G}}.$$

Im reellen Falle wollen wir dabei $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ positiv wählen, also die Tangenten positiv im Sinne wachsender Werte der Parameter rechnen, vgl. I S. 216. Damit sind nicht nur die beiden Parameterlinien des betrachteten Punktes (u, v), sondern wegen der Stetigkeit des Überganges auch alle Parameterlinien in der Umgebung dieses Punktes orientiert. Im imaginären Falle können wir $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ in dieser Umgebung ebenfalls einwertig machen, weil E und G nach Voraussetzung an der Stelle (u, v) von Null verschieden sind.

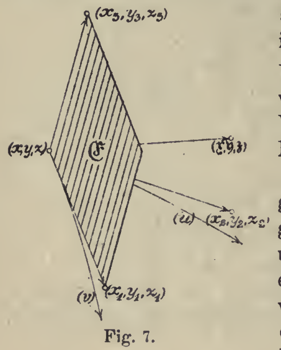


Fig. 7.

Im reellen Falle läßt sich über die gegenseitige Lage der positiven Tangenten der Parameterlinien (v) und (u) und der positiven Flächennormale noch etwas sagen. Zu diesem Zwecke tragen wir auf allen dreien vom Punkte (u, v) oder (x, y, z) aus die Längeneinheit ab. Dann gehen drei Punkte hervor, deren rechtwinklige Koordinaten x_1, y_1, z_1 bzw. x_2, y_2, z_2 bzw. x_3, y_3, z_3 seien, siehe Fig. 7. Je nachdem nun die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ \mathfrak{x} - x & \mathfrak{y} - y & \mathfrak{z} - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix}$$

gleich Null, positiv oder negativ ist, liegt ein reeller Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ entweder in der Ebene $\mathfrak{E}$ der drei Punkte (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) und (x_3, y_3, z_3) oder auf ihrer einen oder anderen Seite. Diese Seiten nennen wir dementsprechend die positive und negative Seite der Ebene $\mathfrak{E}$. Auf der positiven Seite liegt insbesondere derjenige Punkt, der sich ergibt, wenn man im Flächenpunkte (x, y, z) das Lot auf die Ebene $\mathfrak{E}$ errichtet und auf ihm die Längeneinheit abträgt, vorausgesetzt, daß das Lot in solchem Sinne errichtet wird, daß die positive Richtung der Tangenten der Parameterlinie (v), die Richtung des eben erwähnten Lotes sowie die positive Flächennormale gerade so gegeneinander orientiert sind wie die positive x-Achse, positive y-Achse und positive z-Achse. Wenn nämlich die rechtwinkligen Koordinaten des soeben konstruierten Punktes in der Determinante für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ eingesetzt werden, liegt die Determinante der Richtungskosinus der drei genannten paarweise zueinander senkrechten Geraden vor, und diese Determinante hat nach (9), I S. 197, den Wert $+1$. Nachdem somit die positive Seite der Ebene $\mathfrak{E}$ auch geometrisch gekennzeichnet ist, erkennen wir leicht, daß die positive Tangente der Parameterlinie (u) auf der positiven Seite der Ebene $\mathfrak{E}$ liegt. Denn wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ durch x_2, y_2, z_2 ersetzt werden, enthält die Determinante die Richtungskosinus der Tangenten der Parameterlinie (v), der Parameterlinie (u) und der Flächennormale, so daß sie nach (10), (11) und (4) den Wert bekommt:

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{x_u}{\sqrt{E}} & \dfrac{y_u}{\sqrt{E}} & \dfrac{z_u}{\sqrt{E}} \\ \dfrac{x_v}{\sqrt{G}} & \dfrac{y_v}{\sqrt{G}} & \dfrac{z_v}{\sqrt{G}} \\ \dfrac{y_u z_v - z_u y_v}{D} & \dfrac{z_u x_v - x_u z_v}{D} & \dfrac{x_u y_v - y_u x_v}{D} \end{vmatrix}$$

Entwickelt man sie nach der letzten Zeile so geht nach (12), S. 17, als ihr Wert $D:\sqrt{E}\,\sqrt{G}$ hervor, also in der Tat ein nach unseren Festsetzungen positiver Wert.

Man kann das Ergebnis auch so ausdrücken: Wird das zum Teil schiefwinklige Achsenkreuz, bestehend aus den Tangenten der Kurven (v) und (u) und der Flächennormale, starr gedacht und vermöge einer Bewegung so weit mit dem Achsenkreuze der Koordinaten zur Deckung gebracht, daß die erste und dritte Gerade auch ihren positiven Sinnen entsprechend mit der positiven x-Achse und der positiven z-Achse zur Deckung gelangen, so liegt die zweite Gerade mit ihrer positiven Richtung in der xy-Ebene auf derselben Seite

der x-Achse wie die positive y-Achse. Siehe Fig. 8, worin die Punkte auf den Tangenten der Parameterlinien und auf der Flächennormale mit den Zahlen 1, 2, 3 bezeichnet sind.

Fig. 8.

Der Winkel, den nun die positive x-Achse in positivem Drehsinne in der xy-Ebene beschreiben muß, um in die positive Tangente der Linie (u) überzugehen, sei mit ω bezeichnet. Nach (10) und (11) ist dann

$$\cos\omega = \mathsf{S}\,\frac{x_u}{\sqrt{E}}\,\frac{x_v}{\sqrt{G}},$$

also nach (5), S. 15:

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}. \tag{13}$$

Daraus folgt:

$$\sin^2\omega = \frac{EG - F^2}{EG} = \frac{D^2}{EG},$$

und da ω zwischen 0 und π liegt:

$$\sin\omega = \frac{D}{\sqrt{E}\sqrt{G}}. \tag{14}$$

Dies ist der Wert der Determinante (12). Man hätte diese Übereinstimmung nach einem Satze der analytischen Geometrie vorhersagen können.

Das Vorhergehende bezieht sich auf den reellen Fall. Im allgemeinen Falle gilt nach wie vor die Formel (13), während wir $\sin\omega$ durch die Formel (14) definieren können. Damit ist dann auch der Winkel ω zwischen den Tangenten der orientierten Parameterlinien (v) und (u) des Flächenpunktes (u, v) definiert.

Die Formel (2) für das Quadrat des Bogenelements, nämlich

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

gilt insbesondere für die Parameterlinie (v), sobald man dv durch Null ersetzt. Entsprechendes gilt für die Parameterlinie (u). Die Bogenelemente der Kurven (v) und (u) wollen wir mit $d_u s$ und $d_v s$ bezeichnen; der angehängte Index u bzw. v deutet dabei an, welcher Parameter die Veränderliche ist. Diese Bogenelemente sind also:

$$d_u s = \sqrt{E}\,du, \quad d_v s = \sqrt{G}\,dv. \tag{15}$$

Das unendlich kleine Parallelogramm, von dem auf S. 33 die Rede

war, hat diese beiden Seiten, die dabei den Winkel ω miteinander bilden, siehe Fig. 9. Nun sind du und dv die Differentiale von nach Null strebenden Zunahmen Δu und Δv der Parameterwerte u und v. Man kann irgend eine bestimmte Größe k wählen und Δu und Δv so nach Null streben lassen, daß

$$\lim \frac{\Delta v}{\Delta u} = k$$

wird. Dann hat man also $dv : du = k$ zu setzen. Nach (15) wird alsdann:

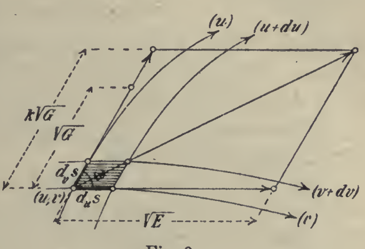


Fig. 9.

$$(16) \qquad \frac{d_v s}{d_u s} = \frac{k\sqrt{G}}{\sqrt{E}}$$

Der angenommene Wert von k bestimmt irgend eine vom Punkte (u, v) der Fläche ausgehende Fortschreitungsrichtung (k) auf der Fläche, nämlich die nach einem unendlich benachbarten Punkte $(u + du, \; v + dv)$, wobei $dv : du = k$ ist. Nach (16) findet man diese Richtung, indem man das unendlich kleine Parallelogramm durch ein ähnliches von endlichen Ausdehnungen ersetzt: Man trägt auf der Tangente der Parameterlinie (v) den Wert von $\sqrt{E}$, gemessen mit der Längeneinheit, als Strecke ab, ebenso auf der Parameterlinie (u) den Wert von $\sqrt{G}$. Diese zweite Strecke wird mit k multipliziert. Alsdann hat man zwei Seiten eines Parallelogramms, das man vervollständigt. Seine vom Punkte (u, v) ausgehende Diagonale gibt die gesuchte Fortschreitungsrichtung (k). Natürlich ist stets auf die Orientierung Rücksicht zu nehmen.

Da k der Grenzwert des Bruches $\Delta v : \Delta u$ ist, kann k auch den Wert $1:0$ annehmen, nämlich wenn $\Delta u = 0$ gesetzt wird.

Suchen wir nun die Fortschreitungsrichtungen (k), die in Minimalgeraden liegen. Für sie verschwindet Quadrat des Bogenelements, ist also:

$$E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2 = 0$$

oder:

$$E + 2Fk + Gk^2 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für k; sie hat zwei voneinander verschiedene Lösungen k, weil $EG - F^2$ nach S. 18 von Null verschieden ist, es sei denn, daß der betrachtete Flächenpunkt (u, v) einen Minimalpunkt vorstellt, vgl. S. 23. Demnach gilt der

Satz 11: Von den Tangenten eines Flächenpunktes (u, v)

sind zwei und nur zwei Minimalgeraden. Die zu ihnen gehörigen Fortschreitungsrichtungen $(dv:du)$ werden durch die Gleichung

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0$$

bestimmt. Die beiden Minimalgeraden fallen nicht zusammen. Dagegen kommt einem Minimalpunkte der Fläche nur eine solche Tangente zu, die Minimalgerade ist.

Flächentangenten, die Minimalgeraden sind, sollen künftig Minimaltangenten heißen.

Irgend zwei Fortschreitungsrichtungen (k_1) und (k_2) vom Flächenpunkte (x, y, z) oder (u, v) aus bilden mit den Fortschreitungsrichtungen längs der Parameterlinien (v) und (u), d. h. mit denjenigen, für die $k = 0:1$ bzw. $1:0$ ist, ein gewisses Doppelverhältnis, das wir jetzt berechnen wollen, vgl. I S. 452. Da sich die Differentiale dx, dy, dz längs einer Fortschreitungsrichtung $(dv:du)$ oder (k) zueinander verhalten wie

$$x_u\,du + x_u\,dv, \quad y_u\,du + y_v\,dv, \quad z_u\,du + z_v\,dv$$

oder wie

$$x_u + k x_v, \quad y_u + k y_v, \quad z_u + k z_v,$$

so sind

$$(17)\quad \mathfrak{x} = x + (x_u + k x_v)t, \quad \mathfrak{y} = y + (y_u + k y_v)t, \quad \mathfrak{z} = z + (z_u + k z_v)t$$

die laufenden Koordinaten der zugehörigen Tangente, dargestellt mittels eines Parameters t. Wir bekommen dementsprechend die Gleichungen der Tangenten, die zu den vier Werten

$$(18)\quad k_1, \quad k_2, \quad 0:1, \quad 1:0$$

von k gehören. Diese vier Tangenten schneiden, da sie in der Tangentenebene des Punktes (u, v) liegen, die Gerade g, die der Tangente der Linie (u) parallel ist und etwa durch den Punkt $(x + x_u,\ y + y_u,\ z + z_u)$ der Tangente der Linie (v) geht, siehe Fig. 10, in vier Punkten, die nach Satz 56, I S. 451, das gesuchte Doppelverhältnis miteinander bilden. Nun hat die Gerade g die laufenden Koordinaten:

Fig. 10.

$$(19)\quad \mathfrak{x} = x + x_u + x_v\tau, \quad \mathfrak{y} = y + y_u + y_v\tau, \quad \mathfrak{z} = z + z_u + z_v\tau,$$

ausgedrückt mittels eines Parameters τ, und die Werte (17) stimmen mit den Werten (19) nur dann überein, wenn $t = 1$ und $\tau = k$ gesetzt wird. Demnach gehören zu den vier Schnittpunkten die vier

Werte (18) von τ. Nach Satz 54, I S. 450, ist das gesuchte Doppelverhältnis folglich gleich dem der vier Werte (18), also nach (1) I S. 445 gleich $k_1 : k_2$. Wir sprechen das Ergebnis so aus:

Satz 12: Sind t_v und t_u die Tangenten der Parameterlinien (v) und (u) eines Flächenpunktes (u, v), sind ferner h_1 und h_2 irgend zwei Tangenten desselben Punktes und gehören zu h_1 und h_2 die Werte k_1 und k_2 des Verhältnisses $dv : du$, so hat das Doppelverhältnis der vier Tangenten den Wert:

$$(h_1\, h_2\, t_v\, t_u) = k_1 : k_2 .$$

Siehe Fig. 11.

Fig. 11.

Ist eine Fortschreitungsrichtung (k) vom Flächenpunkte (u, v) aus nicht die einer Minimaltangente, so sind ihre Richtungskosinus proportional $x_u + k\,x_v$, $y_u + k\,y_v$, $z_u + k\,z_v$. Da die Summe der Quadrate dieser drei Größen gleich $E + 2Fk + Gk^2$ ist, sind demnach

$$(20) \qquad \frac{x_u + k\,x_v}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}}, \quad \frac{y_u + k\,y_v}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}}, \quad \frac{z_u + k\,z_v}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}}$$

die Kosinus der Richtung (k). Wenn man die Quadratwurzel im reellen Falle positiv wählt, ist der Sinn der Fortschreitung derjenige, bei dem du positiv und dv zugleich mit k positiv oder negativ ist. Im imaginären Falle können die Richtungskosinus nur dann durch eine Festsetzung einwertig gemacht werden, wenn man sich auf einen Bereich von Tangenten beschränkt, dem die beiden Minimaltangenten des Punktes (u, v) nicht angehören, weil für sie der Radikand verschwindet. Nehmen wir nun zwei Fortschreitungsrichtungen (k_1) und (k_2) an, so ergibt sich aus (20) als Kosinus ihres Winkels α:

$$\cos\alpha = \frac{\mathsf{S}\,(x_u + k_1\,x_v)\quad \mathsf{S}\,(x_u + k_2\,x_v)}{\sqrt{E + 2Fk_1 + Gk_1^2}\;\sqrt{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}}$$

Der Zähler läßt sich nach (5), S. 15, umformen, so daß kommt:

$$(21) \qquad \cos\alpha = \frac{E + F(k_1 + k_2) + G\,k_1\,k_2}{\sqrt{E + 2Fk_1 + Gk_1^2}\;\sqrt{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}}.$$

Hieraus folgt, daß das Verschwinden des Zählers die Bedingung dafür ist, daß die beiden Fortschreitungsrichtungen (k_1) und (k_2) zueinander senkrecht werden. Also haben wir den

Satz 13: Zwei Fortschreitungsrichtungen (k_1) und (k_2) eines Flächenpunktes (u, v), die nicht seinen Minimaltangenten angehören, sind dann und nur dann zueinander senkrecht, wenn sie der Bedingung

$$E + F(k_1 + k_2) + G k_1 k_2 = 0$$

Genüge leisten.

Anhangsweise sei hier noch auf einen Umstand aufmerksam gemacht, der leicht übersehen werden kann: Nehmen wir an, es liege eine reelle Fläche mit reellen Parametern vor. Einem Punkte (u, v) der Fläche wurde ein positiver Sinn seiner Normalen dadurch vorgeschrieben, daß die Richtungskosinus X, Y, Z der Normalen einwertig gemacht wurden, denn D ist in den Formeln (4) positiv angenommen worden. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit wird dadurch auch jedem Punkte in einer gewissen Umgebung der betrachteten Stelle (u, v) eine positive Normalenrichtung beigelegt. Infolgedessen können wir in diesem Bereiche von einer positiven und negativen Seite der Fläche sprechen. Als positiv bezeichnen wir die Seite, nach der hin die Normalen positiv sind. Aber alles dies gilt eben nur innerhalb eines gewissen Bereiches. Wenn man ihn verläßt, ist es sehr wohl denkbar, daß die Begriffe sich verwirren, d. h. daß man einem Punkte, je nachdem man ihn vom Ausgangspunkte aus erreicht, auf einem Wege eine positive Normale nach der einen Richtung hin, dagegen auf einem andern Wege eine positive Normale nach der entgegengesetzten Richtung hin zuschreiben muß, so daß also nicht mehr von einer Unterscheidung der beiden Seiten der Fläche die Rede sein kann. Da dies zunächst geometrisch absurd erscheinen könnte, wird es zweckmäßig sein, auf ein einfaches Modell hinzuweisen, das die Sachlage klar hervortreten läßt: Ein Streifen Papier in der Form eines länglichen Rechteckes,

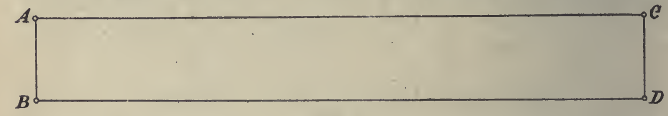


Fig. 12.

siehe Fig. 12, geht durch Verbiegung in mancherlei krumme Flächen über; insbesondere erhält man bei einer einfachen Verbiegung, die die kurzen Seiten AB und CD miteinander so zur Deckung bringt, daß die oberen Ecken A und C zusammenkommen und ebenso die unteren Ecken B und D, einen Ring, der nichts Besonderes zeigt. Etwas ganz anderes ergibt sich, wenn man die Kanten AB und CD so miteinander zur Deckung bringt, daß A mit D und B mit C zusammenfällt. Die dann hervorgehende Fläche ist in Fig. 13 nach einer Photographie dargestellt. Zur besseren Veranschaulichung ist das Rechteck durch Parallele zu seinen Kanten in Quadrate ein-

geteilt worden. Geht man nun auf der entstandenen Fläche etwa von dem Punkte P aus und läßt man ihn die durch ihn gehende Mittellinie c durchwandern, so gelangt er schließlich zwar wieder zur ersten Stelle zurück, befindet sich aber auf der andern Seite des Papiers. Hat man also der Normalen von P zuerst den positiven

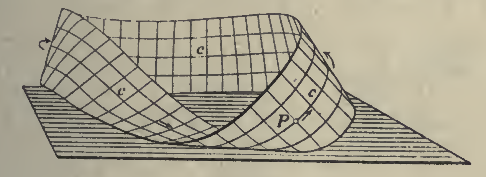


Fig. 13.

Sinn etwa nach außen hin beigelegt und setzt man entsprechend den positiven Sinn der Normalen bei dem Durchlaufen von c fest, so kommt man nach P zurück und ist dabei genötigt, nunmehr in P als positiven Sinn der Normalen den nach innen anzunehmen. Deshalb hat die dargestellte Fläche im ganzen nur eine Seite. Man nennt sie eine einseitige Fläche[1]).

Man kann übrigens leicht manche andere ebenfalls einseitige Flächen ersinnen. Beispielsweise bekommt man eine andere einseitige Fläche so: Eine Ebene, die zuerst mit der xz-Ebene zusammenfällt, möge um die z-Achse rotieren. Eine in ihr gelegene und zuerst zur z-Achse parallele Gerade g rotiere gleichzeitig innerhalb der Ebene um den Punkt A, in dem sie in ihrer Anfangslage die x-Achse trifft, siehe Fig. 14, S. 42. Dabei sei der Drehwinkel u von g beständig halb so groß wie der Drehwinkel der Ebene. Nach Vollendung

[1]) Auf das Vorhandensein einseitiger Flächen hat Listing in seiner Abhandlung: „Der Zensus räumlicher Komplexe oder Verallgemeinerung des Eulerschen Satzes von den Polyedern", Abh. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 10. Bd. (1862), aufmerksam gemacht. Vgl. insbes. seine Anmerkung zu S. 13, sowie seine Figuren 3 und 4. Unabhängig von Listing und in ausdrücklicherer Weise hat dann Möbius in der Abhandlung „Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders", Leipziger Berichte 1865 (Ges. Werke 2. Bd.), darauf hingewiesen. Von ihm rührt auch die Bezeichnung einseitig her. Besonders anschaulich machte er die Sachlage durch die Bemerkung, daß man beim Anmalen der einseitigen Fläche, von irgend einem Teile der Oberfläche ausgehend und stetig fortfahrend, ohne den Rand zu überschreiten, schließlich die Fläche überall bemalt findet, während man sonst, bei einer zweiseitigen Fläche, auf diese Weise doch schließlich die eine Seite unbemalt gelassen hat. Der Leser wird gebeten, sich sebst ein Modell der Fläche in Fig. 13 durch Verbiegung eines Papierstreifens in der angegebenen Art herzustellen.

einer Umdrehung der Ebene um die z-Achse ist der Punkt A in seine ursprüngliche Lage zurückgekehrt, während die Gerade g mit ihrer ursprünglichen Lage, aber in entgegengesetztem Sinne, zur Deckung gekommen ist. Die von der Geraden g beschriebene Fläche ist deshalb, wie man leicht sieht, einseitig. Wenn der Punkt A vom Anfangspunkte die Entfernung a hat und irgend ein Punkt P auf g betrachtet wird, für den $AP = v$ ist, bekommt P nach Zurücklegung des Drehwinkels $2u$ durch die Ebene die Koordinaten:

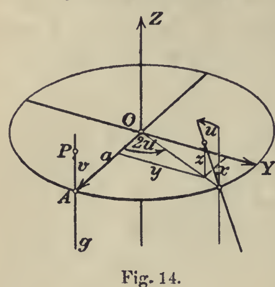


Fig. 14.

$$(22) \qquad \begin{cases} x = (a - v\sin u)\cos 2u, \\ y = (a - v\sin u)\sin 2u, \\ z = v\cos u. \end{cases}$$

Dies ist zugleich die Darstellung der Fläche mittels der beiden Parameter u und v. Ein Streifen der Fläche ist in Fig. 15 wiedergegeben. Aus (22) folgt:

$$y_u z_v - z_u y_v = 2(a - v\sin u)\cos u\cos 2u - v\sin 2u,$$
$$z_u x_v - x_u z_v = 2(a - v\sin u)\cos u\sin 2u + v\cos 2u,$$
$$x_u y_v - y_u x_v = 2(a - v\sin u)\sin u,$$

und die Summe der Quadrate gibt nach (12), S. 17:

$$D^2 = 4(a - v\sin u)^2 + v^2.$$

Beschränkt man sich auf reelle Werte von u und v und setzt man entsprechend S. 18 für D die positive Quadratwurzel:

$$D = \sqrt{4(a - v\sin u)^2 + v^2},$$

so erhält man als Richtungskosinus der Normale nach (4), S. 32:

$$X = \frac{2(a - v\sin u)\cos u\cos 2u - v\sin 2u}{\sqrt{4(a - v\sin u)^2 + v^2}},$$

$$Y = \frac{2(a - v\sin u)\cos u\sin 2u + v\cos 2u}{\sqrt{4(a - v\sin u)^2 + v^2}},$$

$$Z = \frac{2(a - v\sin u)\sin u}{\sqrt{4(a - v\sin u)^2 + v^2}}.$$

Die Einseitigkeit der Fläche leuchtet nun auch analytisch ein: Der Punkt A hat die Parameter $u = 0$, $v = 0$, so daß für ihn $X = 1$,

$Y = 0$, $Z = 0$ wird; seine positive Normale ist demnach die positive x-Achse. Nach einer Umdrehung der Ebene der Geraden g um die z-Achse ist aber $2u$ um 2π gewachsen. Jetzt also hat A die Parameter $u = \pi$, $v = 0$, und zu ihm gehören die Werte $X = -1$, $Y = 0$, $Z = 0$, d. h. nunmehr ist die positive Normale von A die negative x-Achse.

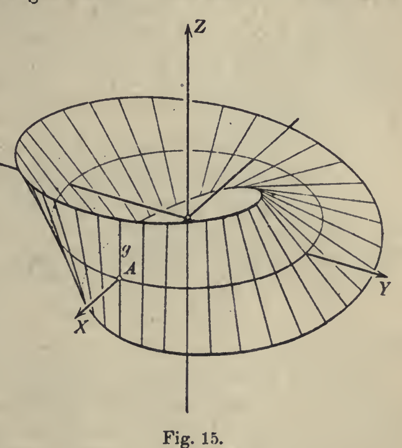


Fig. 15.

Wie man sieht, gehören einem und demselben Punkte A zwei verschiedene Wertepaare $u = 0$, $v = 0$ und $u = \pi$, $v = 0$ der Parameter zu. Dies widerspricht den Annahmen auf S. 7. Wir gelangen aber auch hier zu einem Bereiche, innerhalb dessen zu jedem Punkte der Fläche nur ein Wertepaar von u und v gehört, wenn wir u auf das Gebiet

$$0 \leqq u < \pi, \quad \text{aber } u \neq \pi$$

beschränken. Dies bedeutet geometrisch, daß die Fläche längs der ursprünglichen Geraden g begrenzt, also durchgeschnitten wird.

Ganz entsprechendes gilt immer: Jede einseitige Fläche wird zweiseitig, sobald man nur den Bereich der Parameter u und v hinreichend einschränkt.

§ 6. Kurvennetze auf einer Fläche.

Die Parameterlinien (v) und (u) einer Fläche bestimmen nach S. 10 ein Kurvennetz auf der Fläche. Es gibt unzählig viele andere Kurvennetze auf derselben Fläche. Zunächst aber wollen wir uns mit diesem besonderen Netze, dem Netze der Parameterlinien, beschäftigen.

In jedem Punkte (u, v) der Fläche gehören zu den beiden hindurchgehenden Parameterlinien (v) und (u) Fortschreitungsrichtungen (k) oder $(dv : du)$, denen die Werte $0:1$ und $1:0$ zukommen. Aus Satz 10, S. 34, folgt nun sofort:

Satz 14: Die Parameterlinien (v) bzw. (u) der Fläche sind dann und nur dann Minimalkurven, wenn die Fundamentalgröße E bzw. G überall verschwindet. Das Netz der Parameterlinien besteht demnach aus Minimalkurven, wenn E und G beide identisch gleich Null sind. Alsdann hat das Quadrat des Bogenelements der Fläche die Form:

$$ds^2 = 2\,F\,du\,dv\,,$$

d. h. es ist von den Gliedern mit du^2 und dv^2 frei.

Wir nehmen nun an, die Parameterlinien seien keine Minimalkurven, d. h. es sei weder E noch G identisch gleich Null. Dann folgt aus Satz 13, S. 39, für $k_1 = 0:1$ und $k_2 = 1:0$, da die Bedingung des Satzes so geschrieben werden kann:

$$\frac{E}{k_2} + F\left(\frac{k_1}{k_2} + 1\right) + G\,k_1 = 0\,,$$

sofort:

Satz 15: Das Netz der Parameterlinien einer Fläche ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn die Fundamentalgröße F überall verschwindet. Alsdann hat das Quadrat des Bogenelements der Fläche die Form:

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2\,,$$

d. h. es ist frei von dem Gliede mit $du\,dv$.

Die Voraussetzung, daß die Parameterlinien keine Minimalkurven sein sollen, liegt schon darin, daß sonst ja gar nicht von einem Senkrechtstehen die Rede sein könnte. Unter einem Orthogonalsystem verstehen wir hier wie in der Ebene, vgl. I S. 148, ein Kurvennetz, in dem alle Kurven der einen Schar die der anderen Schar senkrecht schneiden. Der Satz 15 folgt auch sofort aus der Formel (13), S. 36, für $\cos\omega$ und der Bedingung $\cos\omega = 0$.

Ist die Fundamentalgröße F nicht überall gleich Null, so gibt die Forderung $F = 0$ diejenigen Stellen der Fläche, in denen die Parameterlinien einander senkrecht schneiden. Der Ort der Stellen kann aus einzelnen Kurven bestehen oder aus einzelnen Punkten, oder es kommen auch gar keine solche Stellen vor.

1. Beispiel: Auf der Kugel

$$x = r\cos u\cos v\,, \qquad y = r\cos u\sin v\,, \qquad z = r\sin u$$

ist F nach S. 18 gleich Null. In der Tat schneiden die Breitenkreise und Meridiane einander senkrecht.

In der Integralrechnung wird gelehrt, wie man den Flächeninhalt J eines Teiles einer in Parameterdarstellung gegebenen Fläche zu berechnen hat: Handelt es sich um den Inhalt der Fläche, die von einer geschlossenen Linie l begrenzt wird, siehe Fig. 16, so hat man das Integral zu berechnen:

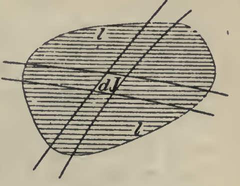


Fig. 16.

(1) $$J = \int\limits_l dJ,$$

erstreckt über das Innere der Linie l. Dabei bedeutet dJ das Flächendifferential, den Inhalt des auf S. 36, 37 betrachteten unendlich kleinen Parallelogramms, dessen Seitenlängen $d_u s$ und $d_v s$ sind, während ω den Winkel beider Seiten bedeutet. Dieses Flächendifferential ist also

$$dJ = d_u s \,.\, d_v s \,.\, \sin\omega\,,$$

daher nach (14) und (15), S. 36:

(2) $$dJ = D\,du\,dv\,.$$

Satz 16: Das Flächendifferential dJ, d. h. der Inhalt des von den Parameterlinien (v), $(v + dv)$, (u) und $(u + du)$ begrenzten unendlich kleinen Parallelogramms der Fläche, ist gleich $D\,du\,dv$. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Parameterlinien keine Minimalkurven seien.

Im reellen Falle ist dabei der Fläche dasselbe Vorzeichen wie dem Produkte $du\,dv$ beigelegt. Nach den Erörterungen auf S. 35 bedeutet dies: Das Flächendifferential soll positiv oder negativ sein, je nachdem der Sinn des Umlaufens des Parallelogramms, falls man die Reihenfolge

$$(u,\ v),\quad (u + du,\ v),\quad (u + du,\ v + dv),\quad (u,\ v + dv)$$

einschlägt, von der positiven Normale her betrachtet derselbe ist wie der Sinn der Drehung von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse hin, betrachtet von der positiven z-Achse aus, oder umgekehrt, siehe Fig. 17.

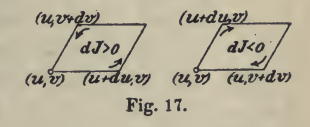


Fig. 17.

Das Integral (1) ist tatsächlich ein Doppelintegral; da es über alle unendlich kleinen Parallelogramme des Netzes der Parameterlinien zu erstrecken ist, die innerhalb der geschlossenen Linie l gelegen sind.

Aus der Gesamtheit aller Parameterlinien (v) bzw. (u) wollen wir nun diejenigen auswählen, zu denen die Werte

$$v_0, \quad v_0 + \varepsilon, \quad v_0 + 2\varepsilon, \quad v_0 + 3\varepsilon, \ldots$$

von v bzw. die Werte

$$u_0, \quad u_0 + \varepsilon, \quad u_0 + 2\varepsilon, \quad u_0 + 3\varepsilon, \ldots$$

von u gehören, wo ε irgend eine Größe sei. Lassen wir ε nach Null streben, so entsteht ein unendlich dichtes Netz. In ihm sind die Differentiale du und dv, um die u und v beim Übergange zu benachbarten Kurven des Netzes wachsen, gleich $\lim \varepsilon$, so daß der Inhalt eines Parallelogramms des Netzes infolge von (2) nach $D \lim \varepsilon^2$ strebt. Da $\lim \varepsilon^2$ für alle Maschen des Netzes dieselbe Bedeutung hat, können wir also sagen:

Satz 17: Das von unendlich benachbarten Parameterlinien (v), $(v + \varepsilon)$, $(v + 2\varepsilon)$, ... und (u), $(u + \varepsilon)$, $(u + 2\varepsilon)$, ... für $\lim \varepsilon = 0$ gebildete Netz auf einer Fläche hat dann und nur dann lauter gleich große Parallelogramme, wenn die Größe $D = \sqrt{EG - F^2}$ konstant ist. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Parameterlinien keine Minimalkurven seien.

Nach S. 13, 14 definiert eine Gleichung von der Form

$$A(u, v)\, du^2 + 2B(u, v)\, du\, dv + C(u, v)\, dv^2 = 0 \tag{3}$$

ein Kurvennetz auf der Fläche, sobald $AC - B^2 \neq 0$ ist. Sind dabei (k_1) und (k_2) die beiden Fortschreitungsrichtungen $(dv : du)$ eines Punktes (u, v) längs der beiden Kurven des Netzes, so genügen k_1 und k_2 der quadratischen Gleichung für k:

$$A + 2Bk + Ck^2 = 0,$$

so daß

$$k_1 + k_2 = \frac{-2B}{C}, \quad k_1 k_2 = \frac{A}{C} \tag{4}$$

ist.

Nach Satz 11, S. 37, besteht das Kurvennetz (3) aus lauter Minimalkurven, sobald es identisch ist mit dem Netze, das durch

$$E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2 = 0$$

definiert ist, sobald also $A : B : C = E : F : G$ ist. Da wir vorausgesetzt haben, daß $EG - F^2 \neq 0$ sei, siehe S. 18, gilt also der

Satz 18: Eine Fläche hat zwei einfach unendliche Scharen von Minimalkurven; sie sind definiert durch die Differentialgleichung:

$$E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2 = 0.$$

Liegt die Fläche insbesondere in der Form

(5) $$z = f(x, y)$$

vor, die sofort in eine Parameterdarstellung

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v)$$

verwandelt werden kann, vgl. S. 5, so wird nach (7), S. 15, die Differentialgleichung der Minimalkurven diese:

(6) $$(1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2 = 0.$$

Sie läßt sich, da $p = f_x$ und $q = f_y$ ist, auch so schreiben:

$$dx^2 + dy^2 + (f_x\,dx + f_y\,dy)^2 = 0.$$

Wenn man nun

(7) $$f(x, y) = i\varphi(x, y)$$

setzt, kommt:

$$(\varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy)^2 = dx^2 + dy^2.$$

Diese Gleichung können wir aber als eine Differentialgleichung in der xy-Ebene betrachten, und dann definiert sie nach Satz 76, I S. 183, ein Kurvennetz ohne Umwege. Da jeder Punkt (x, y) der xy-Ebene die senkrechte Projektion eines Punktes (x, y, z) der Fläche (5), oder also nach (7) der Fläche

$$z = i\varphi(x, y)$$

ist, folgt also:

Satz 19: Die senkrechten Projektionen der Minimalkurven einer Fläche auf die xy-Ebene bilden ein Kurvennetz ohne Umwege in dieser Ebene.

Man erkennt zugleich die Richtigkeit der Umkehrung:

Satz 20: Liegt ein Kurvennetz ohne Umwege in der xy-Ebene vor, definiert durch eine Differentialgleichung

$$(\varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy)^2 = dx^2 + dy^2,$$

und errichtet man in jedem Punkte (x, y) der Ebene das Lot von der Länge $z = i\varphi(x, y)$, so stellt

$$z = i\varphi(x, y)$$

eine Fläche dar, deren Minimalkurven das vorgelegte Kurvennetz ohne Umwege zu senkrechten Projektionen auf die xy-Ebene haben.[1]

2. Beispiel: Wir wollen die Minimalkurven auf einer Rotationsfläche bestimmen. Unter einer Rotationsfläche versteht man eine Fläche, die durch Drehung einer Kurve um eine Gerade hervorgeht. Da wir in § 2 des

[1] Diese Sätze finden sich in der Abhandlung des Verfassers: „Ebene Kurvennetze ohne Umwege", Leipziger Berichte 1905.

2. Abschnittes des ersten Bandes bei der Betrachtung der Bewegungen auf S. 202 den Fall ausgeschlossen hatten, wo die in sich selbst übergehende Gerade eine Minimalgerade ist, wollen wir überhaupt immer voraussetzen, daß die Gerade, um die eine Kurve rotieren soll, keine Minimalgerade sei. Sie heißt die Achse der Rotationsfläche. Alle Ebenen durch die Achse treffen die Fläche in kongruenten Kurven; diese Kurven heißen die Meridiane der Rotationsfläche. Alle Ebenen senkrecht zur Achse treffen die Fläche in Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Achse liegen. Diese Kreise heißen die Breitenkreise der Rotationsfläche. Diese Bezeichnungen sind von dem um die Nordsüd-Achse rotierenden Erdsphäroid übernommen. Da die Achse keine Minimalgerade sein soll, kann sie als z-Achse gewählt werden, so daß die xz-Ebene einen Meridian enthält, siehe Fig. 18. Dieser Meridian kann als ebene Kurve nur dann eine Minimalkurve sein, wenn er eine Minimalgerade ist. Dann aber wird die Rotationsfläche ein Kegel von Minimalgeraden, den man auch als eine Kugel vom Radius Null, eine Nullkugel auffassen kann, vgl. I S. 454. Von diesem Falle sehen wir ab. Wir nehmen also an, daß der Meridian der Rotationsfläche keine Minimalgerade sei. Alsdann hat er eine Bogenlänge u. Da der Meridian in der xz-Ebene liegt, wird er sich dann analytisch so darstellen:

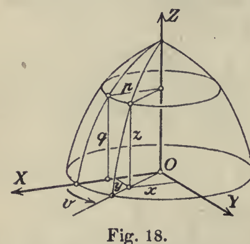


Fig. 18.

(8) $$x = p(u), \qquad y = 0, \qquad z = q(u),$$
wobei
(9) $$p'^2 + q'^2 = 1$$
ist, nach Satz 1, S. 11. Dreht sich nun die Ebene des Meridians um die z-Achse, so ergeben sich nach Zurücklegung des Drehwinkels v als Gleichungen des neuen Meridians:

(10) $$x = p(u)\cos v, \qquad y = p(u)\sin v, \qquad z = q(u).$$

Dies ist, wenn u und v als Parameter beliebig veränderlich gelassen werden, zugleich eine analytische Darstellung der Rotationsfläche.

Nach (5), S. 15, ergeben sich mit Rücksicht auf (9) als Werte der Fundamentalgrößen:

(11) $$E = p'^2 + q'^2 = 1, \qquad F = 0, \qquad G = p^2.$$

Die Formel $F = 0$ besagt nach Satz 15, daß die Parameterlinien ein Orthogonalsystem bilden. Man erkennt auch geometrisch sofort, daß die Breitenkreise (u) die Meridiane (v) senkrecht schneiden.

Nach Satz 18 lautet die Differentialgleichung der Minimalkurven der Rotationsfläche so:

$$du^2 + p^2\,dv^2 = 0.$$

Sie läßt sich sofort zerlegen in:

$$(du + ip\,dv)(du - ip\,dv) = 0$$

oder in:

$$\left(\frac{du}{p} + i\,dv\right)\left(\frac{du}{p} - i\,dv\right) = 0.$$

Da p nur von u abhängt, lassen sich die beiden einzelnen Gleichungen sofort durch eine Quadratur integrieren. Danach stellen

$$\int \frac{du}{p(u)} + iv = \text{konst.}, \qquad \int \frac{du}{p(u)} - iv = \text{konst.} \tag{12}$$

die Minimalkurven der Rotationsfläche dar. Man kann auch so sagen: Die Gleichungen (10) stellen die Minimalkurven der Rotationsfläche, ausgedrückt mittels eines Parameters u dar, wenn man darin entweder

$$v = -i\int\frac{du}{p} + a \qquad \text{oder} \qquad v = i\int\frac{du}{p} + b$$

setzt, wobei a und b willkürliche Konstanten sind. Beschränkt man sich auf die beiden ersten Gleichungen (10), so bekommt man die Gleichungen der senkrechten Projektionen der Minimalkurven auf die xy-Ebene:

$$x = p\cos\left(a - i\int\frac{du}{p}\right), \qquad y = p\sin\left(a - i\int\frac{du}{p}\right) \tag{13}$$

und

$$x = p\cos\left(b + i\int\frac{du}{p}\right), \qquad y = p\sin\left(b + i\int\frac{du}{p}\right). \tag{14}$$

Da die Rotationsfläche bei der Drehung um ihre Achse in sich übergeht, erhellt sofort, daß auch jede Minimalkurve der Fläche dabei wieder in eine Minimalkurve der Fläche verwandelt wird, also auch, daß jede der Projektionen (13) bzw. (14) durch Rotation in der xy-Ebene um den Anfangspunkt O wieder in eine Kurve derselben Art übergeht. Mithin gehen alle Kurven (13) aus der einen Kurve

$$x = p\cos\left(i\int\frac{du}{p}\right), \qquad y = -p\sin\left(i\int\frac{du}{p}\right), \tag{15}$$

die der Annahme $a = 0$ entspricht, sowie alle Kurven (14) aus der einen Kurve

$$x = p\cos\left(i\int\frac{du}{p}\right), \qquad y = p\sin\left(i\int\frac{du}{p}\right), \tag{16}$$

die der Annahme $b = 0$ entspricht, durch Rotation um den Anfangspunkt hervor, was man auch leicht analytisch bestätigt. Ferner geht die Kurve (16) aus der Kurve (15) durch Spiegelung an der x-Achse hervor, indem man ja nur y durch $-y$ zu ersetzen hat. Nach Satz 19 bilden nun die Projektionen der Minimalkurven auf die xy-Ebene ein Kurvennetz ohne Umwege. Demnach sind wir zu solchen ebenen Kurvennetzen ohne Umwege gelangt, wie wir sie im Beispiele I S. 188 betrachteten. Dies erhellt auch so: Damals nahmen wir für f eine Funktion von $x^2 + y^2$ an. An die Stelle von f tritt hier $\varphi = -if$, nach (7). Der Satz 20 lehrt also, daß die damals betrachteten Kurvennetze ohne Umwege durch Projektion der Minimalkurven einer Fläche hervorgehen, die in x, y, z geschrieben eine Gleichung von der Form

$$z = \varphi(x^2 + y^2) \tag{17}$$

hat, in der φ nur von $x^2 + y^2$ abhängt. Aber jede derartige Gleichung stellt eine Rotationsfläche vor, deren Achse die z-Achse ist, denn die Fläche (17) wird von jeder Ebene $z =$ konst. parallel der xy-Ebene augenscheinlich in einem Kreise geschnitten, dessen Mittelpunkt auf der z-Achse liegt. Will man umgekehrt die Rotationsfläche (10) durch eine Gleichung von der Form $z = f(x, y)$ darstellen, so muß man nach (10)

$$x^2 + y^2 = p^2(u), \qquad z = q(u)$$

bilden und u vermöge des sich aus der ersten Gleichung ergebenden Wertes ausdrücken. Aber nach der ersten Gleichung ist u eine Funktion von $x^2 + y^2$. Folglich gelangt man zu einer Darstellung der Rotationsfläche in der Form (17).

Wir kehren zu einem allgemeinen Kurvennetze auf der Fläche zurück, das durch die Gleichung (3) definiert sei. Nach Satz 13, S. 39, und nach (4) werden die Kurven des Netzes einander, falls sie keine Minimalkurven sind, falls sich also A, B, C nicht wie E, F, G zueinander verhalten, senkrecht schneiden, sobald

$$E + F\frac{-2B}{C} + G\frac{A}{C} = 0$$

ist, woraus durch Multiplikation mit C folgt:

Satz 21: Ein Kurvennetz

$$A(u,v)\,du^2 + 2B(u,v)\,du\,dv + C(u,v)\,dv^2 = 0$$

auf einer Fläche ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$EC - 2FB + GA = 0$$

ist.

Wählen wir auf der Fläche eine einfach unendliche Schar von Kurven beliebig, etwa so, daß sie die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{du} = \lambda(u,v)$$

erfüllen, so können wir die Differentialgleichung der zu dieser Schar orthogonalen Schar leicht aufstellen. Hätte sie die Form

$$\frac{dv}{du} = \mu(u,v),$$

so müßten λ und μ nach Satz 21 die Bedingung:

$$E + F(\lambda + \mu) + G\lambda\mu = 0$$

erfüllen. Hieraus aber läßt sich die Funktion $\mu(u,v)$ berechnen. Es kommt:

$$\mu = -\frac{E + F\lambda}{F + G\lambda}.$$

Somit besteht der

Satz 22: Definiert die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{du} = \lambda(u,v)$$

auf einer Fläche keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die zu den durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind, so:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{E + F\lambda}{F + G\lambda}.$$

Schließlich wollen wir noch den Satz 12, S. 39, auf das Kurvennetz (3) anwenden. Wenn t_v und t_u die Tangenten der Parameterlinien (v) und (u) eines Flächenpunktes (u, v) sind und h_1 und h_2 die Tangenten der durch denselben Punkt gehenden beiden Kurven des Netzes (3) bedeuten, ist nach jenem Satze das Doppelverhältnis

$$(h_1\, h_2\, t_v\, t_u) = \frac{k_1}{k_2}.$$

Da wir nun, weil das Kurvennetz nur durch die Differentialgleichung (3) gegeben ist, nicht zwischen den beiden Geraden h_1 und h_2 unterscheiden können, bilden wir auch das Doppelverhältnis

$$(h_2\, h_1\, t_v\, t_u) = \frac{k_2}{k_1},$$

das aus dem ersten durch Vertauschung von h_1 mit h_2 entsteht. Beide Doppelverhältnisse sind die Wurzeln einer quadratischen Gleichung für eine Unbekannte $\varDelta$, nämlich der Gleichung:

$$\left(\varDelta - \frac{k_1}{k_2}\right)\left(\varDelta - \frac{k_2}{k_1}\right) = 0$$

oder:

$$k_1\, k_2\, \varDelta^2 - (k_1{}^2 + k_2{}^2)\, \varDelta + k_1\, k_2 = 0.$$

Der Wert von $k_1\, k_2$ ist nach (4) gleich $A : C$, und aus (4) läßt sich auch

$$k_1{}^2 + k_2{}^2 = (k_1 + k_2)^2 - 2 k_1\, k_2$$

sofort berechnen. Infolgedessen kommt man zu dem

Satz 23: Das durch eine Gleichung

$$A(u, v)\, d u^2 + 2 B(u, v)\, du\, dv + C(u, v)\, d v^2 = 0$$

definierte Kurvennetz auf einer Fläche hat im Punkte (u, v) zwei Tangenten h_1 und h_2, die dort mit den beiden Tangenten t_v und t_u der Parameterlinien (v) und (u) zwei Doppelverhältnisse $(h_1\, h_2\, t_v\, t_u)$ und $(h_2\, h_1\, t_v\, t_u)$ bilden, und diese beiden Doppelverhältnisse sind die Wurzeln $\varDelta$ der quadratischen Gleichung:

$$A\, C\, \varDelta^2 - 2(2 B^2 - A\, C)\, \varDelta + A\, C = 0.$$

Das eine Doppelverhältnis ist der reziproke Wert des anderen.

Insbesondere trennen t_v und t_u das Tangentenpaar h_1 und h_2 harmonisch, wenn beide Werte $\varDelta$ gleich -1 sind, nach I S. 449 und S. 453. Die quadratische Gleichung hat aber die Doppelwurzel $\varDelta = -1$ dann und nur dann, wenn $B = 0$ ist. Demnach werden alle Kurvennetze, deren Tangenten an jeder Stelle von den Tangenten der Parameterlinien harmonisch getrennt werden, durch Gleichungen

$$A(u,v)\,du^2 + C(u,v)\,dv^2 = 0$$

definiert, die von dem Gliede mit $du\,dv$ frei sind.

In § 23 des 1. Abschnittes wurde im ersten Bande der Begriff der Kurvennetze ohne Umwege in der Ebene eingeführt und untersucht. Die dort auf S. 180, 181 gegebene Definition kann man ohne weiteres auf eine beliebige Fläche übertragen. Bedenkt man nun, daß das Bogenelement-Quadrat auf einer Fläche geradeso wie damals in der Ebene durch die Formel

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

gegeben wird, so erhellt ohne weiteres, daß die Betrachtungen in I S. 185, 186, durch die dort der Satz 77, S. 184 bewiesen wurde, auch auf der Fläche gelten. Infolgedessen haben wir das Ergebnis:

Satz 24: Die Parameterlinien einer Fläche bilden dann und nur dann ein Kurvennetz ohne Umwege, wenn die Fundamentalgrößen E und G einer der beiden in der Form

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

gegebenen Bedingungen genügen und nicht verschwinden.[1]

§ 7. Flächentreue Abbildung von Flächen.

Eine gegebene Fläche

(1) $$x = \varphi(u,v), \quad y = \chi(u,v), \quad z = \psi(u,v)$$

kann man auf unbegrenzt viele Arten Punkt für Punkt auf die Ebene $z = 0$ abbilden, d. h. man kann auf unendlich viele Arten jedem Punkte (u, v) der Fläche einen Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gesetzmäßig zuordnen. Dies geschieht dadurch, daß man auch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ als irgendwelche Funktionen Φ und Ψ von u und v definiert:

(2) $$\mathfrak{x} = \Phi(u,v), \quad \mathfrak{y} = \Psi(u,v).$$

Nur muß man noch ausmachen, daß Φ und Ψ voneinander unabhängig sein sollen. Alsdann entspricht jedem Punkte (u, v) der Fläche nach (2) ein Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der Ebene. Umgekehrt gehört nach (2) zu jedem Wertepaare $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, also zu jedem Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der Ebene, ein Wertepaar u, v und daher ein Punkt (u, v) der Fläche (1). Vgl. hierzu auch I S. 166, wo insbesondere eine Ebene auf eine Ebene abgebildet wurde.

[1] Diese naheliegende Verallgemeinerung findet sich in der in I S. 181 genannten Abhandlung des Verfassers von 1907.

Durch die Gleichungen (2) werden u und v als Funktionen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ definiert. Setzen wir sie in (1) ein, so ergeben sich drei Gleichungen von der Form:

$$x = f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad y = g(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad z = h(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}).$$

Sie geben zu jedem Bildpunkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ in der Ebene den Originalpunkt (x, y, z) auf der Fläche. Von solchen Gleichungen gingen wir aus, als wir im I. Band in § 4 des 3. Abschnittes die längentreuen Abbildungen einer Fläche auf die Ebene untersuchten, bei denen also jeder Kurve der Fläche im Bilde eine Kurve von derselben Bogenlänge entsprach. Wir gelangten damals zu den abwickelbaren Flächen, siehe Satz 14, I S. 387.

Wir folgern hieraus, daß wir eine beliebige Fläche (1) nicht längentreu auf die Ebene abzubilden vermögen. Die Forderung der Längentreue geht also für beliebige Flächen (1) zu weit. Wohl aber können wir die Forderung der Flächentreue stellen. Es gibt nämlich immer solche Abbildungen einer beliebigen Fläche (1) auf die Ebene, bei denen jedes Flächenstück im Bilde denselben Flächeninhalt wie auf der Fläche selbst hat. Es ist unsere Absicht, dies hier zu beweisen.

Ebenso wie die Gleichungen (1) eine Parameterdarstellung der betrachteten Fläche sind, können wir die Gleichung (2) als eine Parameterdarstellung der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene auffassen (wie in § 18, 1. Abschnitt des I. Bandes). Da zu jedem bestimmten Wertepaare u, v ein Punkt der Fläche und sein Bild in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene gehört, wobei die rechtwinkligen Koordinaten beider Punkte durch (1) bzw. (2) gegeben werden. wird auch jede Parameterlinie (v) der Fläche als eine Parameterlinie (v) der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene abgebildet, ebenso jede Parameterlinie (u) der Fläche als eine Parameterlinie (u) der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene. Jeder Masche des Kurvennetzes der Parameterlinien der Flächen entspricht also eine Masche des Kurvennetzes der Parameterlinien der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene. Nach Satz 16, S. 45, hat ein Flächenstück des Differential $D\,du\,dv$. Das entsprechende Stück der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene hat ein entsprechendes Differential $\mathfrak{D}\,du\,dv$. Dabei ist $\mathfrak{D}$ geradeso für die Ebene (2) zu berechnen wie D für die Fläche. Man braucht ja nur die Gleichungen (2) durch die Gleichung $\mathfrak{z} = 0$ zu ergänzen, um eine Darstellung

$$(3) \qquad \mathfrak{x} = \Phi(u, v), \quad \mathfrak{y} = \Psi(u, v), \quad \mathfrak{z} = 0$$

der Ebene entsprechend der Darstellung der Fläche (1) zu bekommen. Ebenso wie D^2 nach Formel (12), S. 17, als die Summe der Quadrate der Funktionaldeterminanten von φ, χ, ψ definiert ist, wird auch

$\mathfrak{D}^2$ als die Summe der Quadrate der Funktionaldeterminanten der drei Funktionen (3) von u und v zu berechnen sein. Da die dritte Funktion gleich Null ist, sind zwei der Determinanten gleich Null, und es kommt einfach (vgl. I S. 151):

$$\mathfrak{D}^2 = (\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v)^2.$$

Die einander entsprechenden Flächendifferentiale der Fläche (1) und der Ebene (2) sind demnach einander, abgesehen vom Vorzeichen, dann und nur dann gleich, wenn

$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = \pm D \tag{4}$$

ist. Das Vorzeichen, mit dem ein Flächeninhalt gemessen wird, hängt im reellen Falle nach S. 45 von dem Sinne der Umlaufung der Maschen ab. Hat man einmal für eine Stelle (u, v) in (4) rechts ein bestimmtes Vorzeichen gewählt, so gilt dasselbe vermöge stetiger Fortsetzung auch für die Umgebung. In einem gewissen Bereiche der Wertepaare u, v also stimmen einander entsprechende Flächenstücke der Fläche (1) und der Ebene (2), abgesehen vom Vorzeichen, überein, sobald innerhalb dieses Bereiches überall ein und dieselbe Gleichung (4) besteht.

Wenn die Funktionen Φ und Ψ eine der beiden Bedingungen (4) erfüllen, sind sie auch unabhängig voneinander, da ja D nach Voraussetzung (vgl. S. 18) nicht identisch verschwinden soll. Wir sagen dann, daß die Fläche (1) auf die Ebene (2) **flächentreu** abgebildet ist. Demnach gilt der

Satz 25: Die Fläche

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

ist dann und nur dann vermöge der Gleichungen

$$\mathfrak{x} = \Phi(u, v), \quad \mathfrak{y} = \Psi(u, v)$$

flächentreu auf die Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ abgebildet, wenn die Funktionen Φ und Ψ für beliebige Wertepaare u, v eine der beiden Bedingungen

$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = \pm D$$

erfüllen.

Man erkennt leicht, daß man nur *eine* flächentreue Abbildung der Fläche (1) auf die Ebene zu kennen braucht, um auch *alle* angeben zu können. Denn wir brauchen ja nur weiterhin die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene flächentreu auf eine andere Ebene, sagen wir auf eine $\xi\eta$-Ebene abzubilden, was nach Satz 69, I S. 169, zu geschehen hat. Jedem Punkte (u, v) der Fläche entspricht dann ein Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$

der ersten Ebene und weiterhin diesem Punkte ein Punkt (ξ, η) der zweiten Ebene, und dabei sind entsprechende Flächenstücke auf der Fläche und in den beiden Ebenen einander an Inhalt gleich. Der umgekehrte Schluß liegt auf der Hand: Ist die Fläche (1) auf zwei Ebenen flächentreu abgebildet, etwa vermöge

$$\mathfrak{x} = \Phi(u, v), \quad \mathfrak{y} = \Psi(u, v) \tag{5}$$

und vermöge

$$\xi = \Phi_1(u, v), \quad \eta = \Psi_1(u, v), \tag{6}$$

so ergeben sich durch Elimination von u und v zwei Gleichungen

$$\xi = X(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad \eta = Y(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),$$

die eine flächentreue Abbildung der einen Ebene auf die andere Ebene bedeuten. Daher haben wir den

Satz 26: Kennt man eine flächentreue Abbildung einer gegebenen Fläche auf die Ebene, so erhält man alle ihre übrigen flächentreuen Abbildungen auf eine Ebene dadurch, daß man jene eine Ebene weiterhin irgendwie auf andere Ebenen flächentreu abbildet.

Liegen zwei Flächen vor und will man die eine auf die andere in allgemeinster Weise flächentreu abbilden, so braucht man nur je eine flächentreue Abbildung jeder der beiden Flächen auf je eine Ebene zu kennen. Dann hat man nur noch die eine Ebene in allgemeinster Weise flächentreu auf die andere abzubilden.

Die Aufgabe, eine vorgelegte Fläche (1) flächentreu auf die Ebene abzubilden, kommt nach dem vorhergehenden auf folgendes hinaus: Man muß auf irgend eine Art zwei Funktionen Φ und Ψ von u und v so bestimmen, daß sie einer der beiden Gleichungen

$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = \pm D \tag{7}$$

genügen. Hat man z. B. zwei Funktionen Φ und Ψ gefunden, die die Bedingung

$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = D$$

erfüllen, so braucht man nur Ψ durch $-\Psi$ zu ersetzen, um zwei Funktionen zu haben, die der anderen Bedingung

$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = -D$$

Genüge leisten. Dies bedeutet nach (2), daß $\mathfrak{y}$ durch $-\mathfrak{y}$ ersetzt, also die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene um ihre $\mathfrak{x}$-Achse um zwei Rechte herumgedreht wird. Demnach dürfen wir uns auf eine der beiden Bedingungen (7) beschränken.

Beispiel: Das Problem der flächentreuen Abbildung erfordert zu seiner Lösung bloß eine Quadratur, wenn es sich darum handelt, eine Rotations-

fläche flächentreu auf die Ebene abzubilden, vorausgesetzt, daß man imstande ist, die Bogenlänge u eines Meridians der Fläche zu berechnen. Dies ist leicht einzusehen:

Nach dem 2. Beispiele auf S. 47 u. f. läßt sich die Rotationsfläche unter der gemachten Voraussetzung so darstellen:

$$x = p(u)\cos v, \qquad y = p(u)\sin v, \qquad z = q(u), \tag{8}$$

wobei

$$p'^2 + q'^2 = 1$$

und $E = 1$, $F = 0$ $G = p^2$, also $D^2 = p^2$ ist. Wir dürfen annehmen, die Meridiankurve $x = p(u)$, $z = q(u)$ in der xz-Ebene schneide die x-Achse im Punkte $u = 0$. Ist es nämlich nicht der Fall, so läßt sich diese Annahme leicht durch Verschiebung der Fläche längs der z-Achse erreichen. Auch dürfen wir annehmen, daß $p(u)$ im reellen Falle in der Umgebung von $u = 0$ positiv sei, d. h. daß die betrachtete Meridiankurve in der Umgebung von $u = 0$ positive Abszissen x habe. Sind sie nämlich negativ, so braucht man nur v durch $v + \pi$ zu ersetzen, um das Gewünschte zu erreichen. Nunmehr haben wir aus $D^2 = p^2$ nach den Festsetzungen auf S. 18 den Wert $D = p$ zu entnehmen. Im imaginären Falle wird D ebenfalls durch die Annahme $D = p$ einwertig gemacht. Die Bedingungen (7) lauten nun so:

$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = \pm p(u).$$

Insbesondere wählen wir die mit dem Minuszeichen und nehmen Φ einfach gleich v an. Denn dann kommt die Forderung $\Psi_u = p(u)$, die durch

$$\Psi = \int_0^u p(u)\,du$$

erfüllt wird. Mithin gilt der

Satz 27: Die Rotationsfläche

$$x = p(u)\cos v, \qquad y = p(u)\sin v, \qquad z = q(u),$$

bei der u die Bogenlänge der Meridiane bedeutet, wird in einem Bereiche um $u = 0$ herum, innerhalb dessen $p(u)$ nicht verschwindet, vermöge der Gleichungen

$$\mathfrak{x} = v, \qquad \mathfrak{y} = \int_0^u p(u)\,du$$

flächentreu auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene abgebildet.

Es genügt nämlich, anzunehmen, daß $p(u)$ nicht im Bereiche verschwinde, weil D wegen $D^2 = p^2$ unter dieser Voraussetzung stets einwertig definiert werden kann, und es gleichgültig ist, wie, da ja eine der beiden Bedingungen (7) ausgewählt werden darf.

Die Meridiane (v) bilden sich als die Geraden $\mathfrak{x} = v$ parallel zur $\mathfrak{y}$-Achse ab. Geht man von $v = -\pi$ bis $v = +\pi$, so erhält man im reellen Falle alle Meridiane und ihre Bilder. Diese Bilder bedecken einen Streifen der Ebene. Wenn wir den Streifen als Abwickelung eines Rotationszylinders auffassen, dessen Grundkreis also die Breite 2π des Streifens zur Gesamtlänge und mit-

hin den Radius Eins hat, können wir mittels dieses Zylinders die flächentreue Abbildung so herstellen (siehe Fig. 19):[1]

Wir konstruieren denjenigen Rotationszylinder mit dem Radius Eins, dessen Achse die Achse der Fläche ist. Als Grundkreis $\mathfrak{k}$ des Zylinders sei derjenige Kreis bezeichnet, in dem die Ebene des Breitenkreises ($u = 0$) den Zylinder schneidet. Von diesem Breitenkreise an werden die Längen u auf den Meridianen gemessen. Nunmehr fassen wir insbesondere den Meridian ($v = 0$) ins Auge, der in der $x\mathfrak{z}$-Ebene liegt. Er sei mit m bezeichnet und schneide die x-Achse in A. Die Ebene dieses Meridians trifft den Zylinder in zwei Geraden, von denen wir eine, $\mathfrak{m}$, auswählen, die die x-Achse in $\mathfrak{A}$ schneide. Dem Punkte U des Meridians m, dessen Bogenlänge $A\,U$ gleich u, dessen Abszisse gleich $p(u)$ und dessen Ordinate gleich $q(u)$ ist, ordnen wir denjenigen Punkt $\mathfrak{U}$ der Geraden $\mathfrak{m}$ zu, dessen Abstand $\mathfrak{A}\,\mathfrak{U}$ vom Grundkreise $\mathfrak{k}$ gleich dem Integral von 0 bis u über $p(u)\,d\,u$ ist. Jetzt ist jedem Punkte U des Meridians m ein Punkt $\mathfrak{U}$ der Geraden $\mathfrak{m}$ zugeordnet. Lassen wir m und $\mathfrak{m}$ um die z-Achse rotieren, so wird jedem Punkte der Fläche ein Punkt auf dem Zylinder zugeordnet sein. Wird endlich der Zylinder in die Ebene ausgebreitet, so liegt die gewünschte Abbildung vor. Der Grundkreis $\mathfrak{k}$ und die Gerade $\mathfrak{m}$ sind die $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Achse in der Ebene.

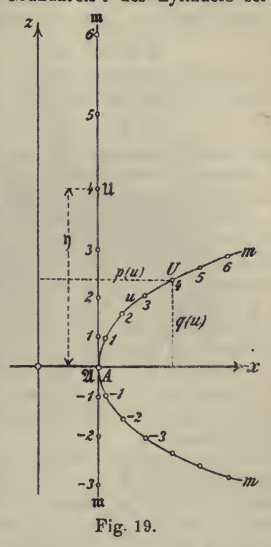


Fig. 19.

Nach Satz 26 und nach Satz 69, I S. 169, folgt aus Satz 27, daß man alle übrigen flächentreuen Abbildungen der Rotationsfläche auf die Ebene durch Eliminationsprozesse finden kann.

Dies gilt insbesondere von den flächentreuen Abbildungen der Kugel. Solche Abbildungen sind namentlich für geographische Zwecke wichtig.[2]

---

[1] Die Fig. 19 ist für die Rotationsfläche, genannt Katenoid, entworfen, die durch Drehung einer Kettenlinie m um ihre Leitlinie entsteht. Hier ist:

$$p(u) = \sqrt{1 + u^2}, \quad q(u) = \log\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right),$$

so daß der Meridian m die durch Elimination von u hervorgehende Gleichung in x und z hat:

$$x = \tfrac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right).$$

In diesem besonderen Falle liegen die Punkte $\mathfrak{A}$ und A, von denen oben die Rede ist, zusammen.

[2] Die flächentreuen Abbildungen der Kugel, die man auch weniger glücklich als äquivalente Abbildungen bezeichnet, wurden zuerst von Lambert, „Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten“, in seinen „Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik“, 3. Teil. Berlin 1772, untersucht. Siehe auch die Ausgabe von Wangerin in Ostwalds Klassikern Nr. 54. Diese Abhandlung von Lambert enthält über-

Wir wollen daher einige der beim Entwerfen von Landkarten gebräuchlichen oder doch vorgeschlagenen flächentreuen Abbildungen der Kugel hier ableiten.

Die Rotationsfläche (8) ist eine Kugel um den Anfangspunkt mit dem Radius Eins, wenn $p(u) = \cos u$ und $q(u) = \sin u$ gewählt wird, indem dann die schon auf S. 11 gefundenen Gleichungen der Kugel

$$x = \cos u \cos v, \qquad y = \cos u \sin v, \qquad z = \sin u \tag{9}$$

mit der geographischen Breite u und Länge v hervorgehen. Die in Satz 27 genannte Abbildung hat hier die Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = v, \qquad \mathfrak{y} = \sin u. \tag{10}$$

Wenn wir hier dieselbe Fig. 19 wie vorhin entwerfen, bekommen die einander zugeordneten Punkte U und $\mathfrak{U}$ gleiche Höhe über der xy-Ebene. Mithin kann diese einfachste flächentreue Abbildung der Kugel so hergestellt werden:

Wir legen um die Kugel den längs des Äquators ($u = 0$) berührenden Rotationszylinder und ordnen jedem Punkte U der Kugel denjenigen Punkt $\mathfrak{U}$ des Zylinders zu, in dem das über U hinaus verlängerte Lot von U auf die Nord-Süd-Achse (z-Achse) den Zylinder trifft. Alsdann wird der Zylinder in die Ebene ausgebreitet. Dies ist eine der ältesten flächentreuen Abbildungen.[1] Sie ist in Fig. 20 dargestellt. Zum besseren Erkennen der Verzerrungen sind die Meridiane und Breitenkreise im Abstande von je zehn Grad und die Ländermassen auf der Erdoberfläche in das Bild eingezeichnet.[2] Diese Abbildung (10) ist übrigens periodisch, da $\sin u$ die Periode 2π hat. Die Figur enthält also nur eine Periode des Bildes, die rechts und links noch beliebig oft angesetzt werden kann.

Um andere flächentreue Abbildungen der Kugel herzustellen, haben wir jetzt weiterhin nach S. 54 die $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$-Ebene flächentreu auf eine andere Ebene zu beziehen. In dieser Ebene seien ξ und η rechtwinklige Koordinaten. Wir gehen auf Satz 69, I S. 169, zurück und haben nur statt u, v und x, y dort

---

haupt die ersten allgemeinen Untersuchungen über das Problem, Gradnetze für geographische Karten zu entwerfen. Daran schließen sich dann drei Abhandlungen von Euler, zunächst: „De repraesentatione superficiei sphaericae super plano“, Acta Acad. Petrop. pro anno 1777, T. 1, alsdann „De projectione geographica superficiei sphaericae“, ebenda, und schließlich „De projectione geographica De Lisliana in mappa generali imperii russici usitata“, ebenda. Alle drei sind von Wangerin übersetzt in Ostwalds Klassikern Nr. 93. Die dritte Arbeit, die sich auf eine spezielle von De Lisle entworfene Karte von Rußland bezieht, die übrigens nach einem schon von Mercator 1585 benutzten Verfahren hergestellt worden ist, kommt hier weniger in Betracht als die beiden ersten.

[1] Man benennt sie nach Lambert (vgl. die oben erwähnte Abh.), der sie ausdrücklich als Abbildung anführt. Aber ihr Grundgedanke, daß nämlich die Fläche einer Kugelzone, die von zwei zum Äquator parallelen Ebenen begrenzt wird, gleich der Fläche der entsprechenden Zone des längs des Äquators umschriebenen Zylinders ist, war schon Archimedes bekannt.

[2] Man sieht, daß sich diese Art der Abbildung nur für solche Länder eignet, die sich nicht allzusehr vom Äquator entfernen, da die Pole ausgeartet sind. Auch die später zu besprechenden Methoden der Abbildung eignen sich immer nur für Teile der Erdkugel; dennoch stellen wir immer zum besseren Erkennen des Abbildungsgesetzes in den Figuren die ganze Erdkugel dar.

$\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und ξ, η oder also nach (10) statt u und v die geographische Länge v und den Sinus der geographischen Breite u und statt x, y die neuen Koordinaten ξ, η zu setzen. Wir verstehen demnach unter ω irgend eine Funktion von v und ξ, für die

(11) $$\frac{\partial^2 \omega(v, \xi)}{\partial v \, \partial \xi} \neq 0$$

ist. Darauf setzen wir an:

(12) $$\sin u = \frac{\partial \omega}{\partial v}, \qquad \eta = -\frac{\partial \omega}{\partial \xi}$$

und lösen beide Gleichungen nach ξ und η auf. Dies Verfahren gibt nur diejenigen flächentreuen Abbildungen nicht, bei denen die Meridiane in die

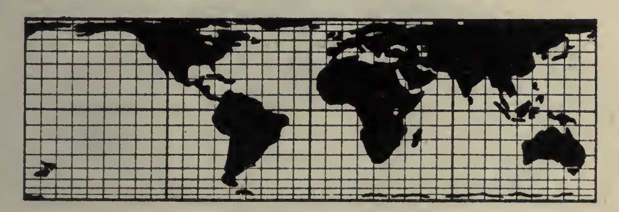


Fig. 20.

Geraden ξ = konst. übergehen. Aber durch Vertauschen von ξ und η gehen auch diese hervor.

Setzen wir z. B. für ω die allerdings ziemlich komplizierte Funktion

(13) $$\omega = \sqrt{v^2 - \xi^2} - \xi \arccos\frac{\xi}{v},$$

so folgt aus (12):

$$\sin u = \frac{1}{v}\sqrt{v^2 - \xi^2}, \qquad \eta = \arccos\frac{\xi}{v}$$

oder durch Auflösen nach ξ und η:

(14) $$\xi = v \cos u, \qquad \eta = u.$$

Bei dieser Abbildung[1] erscheinen die Breitenkreise (u) als parallele Geraden η = konst. in ihren wahren auf der Kugel gemessenen Abständen voneinander, während die Meridiane (v) durch Kurven dargestellt werden, die in der $\xi\eta$-Ebene die Gleichungen (14) mit dem Parameter u haben, die also — nach Elimination von u — auch so dargestellt werden können:

$$\xi = v \cos \eta.$$

[1] Zuerst angewandt auf einem Blatte der Ausgabe von Mercators Atlas durch Hond im Jahre 1606 nach dem Tode Mercators. Das Gradnetz dieses Blattes rührt aber noch von Mercator selbst her, wie Hammer in seiner Übersetzung des Werkes von Tissot, „Die Netzentwürfe geographischer Karten", Stuttgart 1887, bemerkt. Erst von 1650 an zeichneten Sanson und seine Söhne Karten nach diesem Abbildungsgesetze. Deshalb heißt die Abbildung die von Sanson.

Für die verschiedenen Werte der Breite v sind dies verschiedene Kurven, die aber alle aus der Kosinuslinie

$$\xi = \cos \eta ,$$

dem Bilde des Längenkreises ($v = 1$), durch konstante Vergrößerung oder Verkleinerung der Abszissen hervorgehen. In Fig. 21 ist das Bild gegeben.[1] Die Meridiane schneiden im Bilde auf den Breitenkreisen Strecken ab, die von derselben Länge wie die betreffenden Stücke der Breitenkreise auf der Kugel sind.

Man bemerkt, daß die auf (12) begründete Methode zwar durch Elimination allein alle flächentreuen Abbildungen der Kugel liefert, aber nicht gerade durch



Fig. 21.

einfache Gleichungen darstellbare Abbildungen durch einfache Annahmen für die zu wählende Funktion $\omega(v, \xi)$.

Geht man darauf aus, gewisse besondere Arten von flächentreuen Bildern der Kugel zu bestimmen, so wird man daher das direkte Verfahren anwenden, das allerdings Integrationen verlangt.

Die Gleichungen

$$(15) \qquad \mathfrak{x} = \Phi(u, v), \qquad \mathfrak{y} = \Psi(u, v)$$

stellen ja allgemein eine flächentreue Abbildung der Kugel dar, wenn nach (7) und wegen $D^2 = p^2 = \cos^2 u$

$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = \pm \cos u$$

ist. Wir wollen dabei rechts das Minuszeichen wählen:

$$(16) \qquad \Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = - \cos u .$$

Benutzen wir in der Ebene statt der rechtwinkligen Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ Polarkoordinaten r, φ, so sind die Gleichungen (15) und (16) durch andere zu ersetzen. Es ist:

---

[1] Die Figuren 20—26 sind sämtlich in demselben Maßstabe entworfen. Bei allen wäre wie bei Fig. 20 zu bemerken, daß die Abbildung insofern periodisch ist, als die Kugelfläche im Bilde unendlich oft wiederholt erscheint — wenn auch nicht gerade kongruent wie in Fig. 20 —, da die Gleichungen der Abbildung periodische Funktionen enthalten. Für die Zwecke der Kartographie benutzt man nur die in unseren Figuren gegebenen Perioden, ja auch diese nur teilweise wegen der an den Rändern auftretenden großen Verzerrungen.

(17) $$\mathfrak{x} = r\cos\varphi\,, \qquad \mathfrak{y} = r\sin\varphi\,,$$

so daß nach (15) auch r und φ Funktionen von u und v werden:

(18) $$r = R(u, v)\,, \qquad \varphi = F(u, v)\,.$$

Die Bedingung für diese Funktionen können wir leicht aus (16) ableiten. Denn nach (15) und (17) ist:

$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_v - \mathfrak{y}_u \mathfrak{x}_v =$$

$$\begin{vmatrix} r_u\cos\varphi - r\varphi_u\sin\varphi & r_v\cos\varphi - r\varphi_v\sin\varphi \\ r_u\sin\varphi + r\varphi_u\cos\varphi & r_v\sin\varphi + r\varphi_v\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$- r(\varphi_u r_v - r_u \varphi_v) = - R(F_u R_v - R_u F_v)\,,$$

so daß wir statt (16) zu fordern haben:

(19) $$R(F_u R_v - R_u F_v) = \cos u\,.$$

In Polarkoordinaten r, φ stellen also die Gleichungen (18) eine flächentreue Abbildung der Kugel dar, wenn die Bedingung (19) erfüllt ist.

Zunächst fragen wir jetzt nach den flächentreuen Bildern, bei denen die Breitenkreise als konzentrische Kreise und die Meridiane als ihre Radien erscheinen. Hier benutzen wir natürlich Polarkoordinaten r, φ, indem wir verlangen, daß jeder Breitenkreis (u) als ein Kreis r = konst., jeder Meridian (v) als eine Gerade φ = konst. erscheinen soll. Wir unterwerfen also die Funktionen (18) der Beschränkung, daß R nur von u und F nur von v abhängen soll. Dann kommt statt (19) einfacher:

$$- R R'(u) F'(v) = \cos u\,,$$

woraus einzeln folgt:

$$R R'(u) = -a\cos u\,, \qquad F'(v) = \frac{1}{a} \qquad (a = \text{konst.})\,,$$

daher:

$$R^2 = 2(b - a\sin u)\,, \qquad F(v) = \frac{v}{a} + c \qquad (b,\ c = \text{konst.})\,.$$

Nach (18) sind also:

(20) $$r = \sqrt{2(b - a\sin u)}\,, \qquad \varphi = \frac{v}{a} + c \qquad (a,\ b,\ c = \text{konst.})$$

die Gleichungen der gesuchten Abbildung.[1]

Sie enthalten drei willkürliche Konstanten a, b, c. Offenbar können wir durch Drehung des Anfangsstrahles der Polarkoordinaten erreichen, daß der Nullmeridian ($v = 0$) als der Strahl ($\varphi = 0$) abgebildet wird. Wir dürfen also $c = 0$ annehmen. Die Pole ($u = \pm\frac{1}{2}\pi$) der Kugel bilden sich als die Kreise mit den Radien $\sqrt{2(b \mp a)}$ ab, arten also in der Figur aus. Der Nordpol ($u = \frac{1}{2}\pi$) tut dies nur dann nicht, wenn $b = a$ ist. Bei dieser besonderen Annahme können wir die Formeln (20) so schreiben:[2]

(21) $$r = -2\sqrt{a}\sin\left(\frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\pi\right), \qquad \varphi = \frac{v}{a}\,.$$

Für $a = 1$ und $a = 2$ stellen die Figuren 22 und 23 auf S. 62 die Karten dar.

---

[1] Sie rührt her von ALBERS in der Monatl. Korrespondenz für Erd- und Himmelskunde, 11. u. 12. Bd., 1805.

[2] Diesen besonderen Fall von ALBERS' Methode hat schon LAMBERT 1772 (vgl. die Anm. zu S. 57).

Jetzt wollen wir die flächentreuen Bilder suchen, auf denen die Breitenkreise als parallele Geraden erscheinen.[1] Dabei benutzen wir natürlich gewöhnliche Punktkoordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, so daß die Formeln (15) und (16)

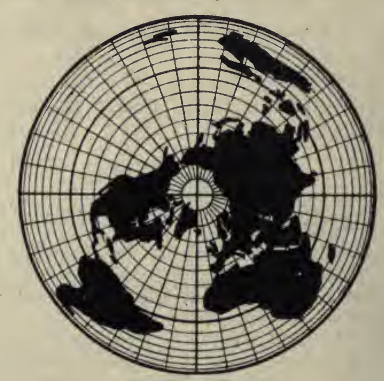


Fig. 22.

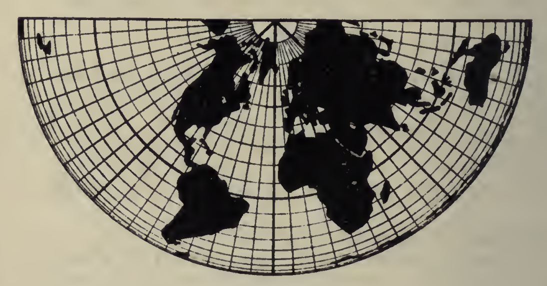


Fig. 23.

anzuwenden sind. Wir verlangen, daß jedem Breitenkreise (u) eine Gerade ($\mathfrak{y}$) entspreche. Mithin muß Ψ eine Funktion von u allein sein, so daß aus (16) folgt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\cos u}{\Psi'(u)}.$$

Da rechts nur u auftritt, folgern wir weiter:

$$\Phi = \frac{v \cos u}{\Psi'(u)} + \omega(u).$$

Dabei bedeutet ω eine beliebige Funktion von u. Also haben wir:

[1] Besondere Fälle hiervon sind die Abbildungen (10) und (14).

(22) $$\mathfrak{x} = \frac{v \cos u}{\Psi'(u)} + \omega(u), \qquad \mathfrak{y} = \Psi(u)$$

als Gleichungen der Abbildungen von der gesuchten Art. Auch die Funktion Ψ von u kann beliebig gewählt werden.

Wir wollen insbesondere noch verlangen, daß die Meridiane als Geraden durch einen Punkt — das Bild des Nordpols — erscheinen. Wir denken uns die $\mathfrak{y}$-Achse durch diesen Bildpunkt gelegt, so daß $\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = b$ die Koordinaten des Polbildes sind. Jeder Meridian (v) soll als eine Gerade $\mathfrak{x} : (\mathfrak{y} - b) =$ konst. abgebildet werden, d. h. dies Verhältnis soll eine Funktion V von v allein sein, woraus nach (22) folgt:

$$\frac{v \cos u}{\Psi'(u)} + \omega(u) = V(v) \cdot [\Psi(u) - b].$$

Da die linke Seite linear in v ist, gilt dasselbe von V:

$$V = a v + c \qquad (a, c = \text{konst.}).$$

Jetzt muß einzeln sein:

$$\frac{\cos u}{\Psi'} = a(\Psi - b), \qquad \omega = c(\Psi - b),$$

denn die hierin auftretenden Funktionen Ψ und ω hängen nur von u ab. Die erste Formel gibt:

$$\cos u = a(\Psi - b)\,\Psi'$$

oder integriert:

$$\sin u + \text{konst.} = \frac{a}{2}(\Psi - b)^2$$

oder:

$$\Psi = b \pm \sqrt{\alpha + \frac{2 \sin u}{a}} \qquad (\alpha = \text{konst.}),$$

worauf die zweite Formel liefert:

$$\omega = \pm c \sqrt{\alpha + \frac{2 \sin u}{a}}.$$

Nach (22) kommt somit:

$$\mathfrak{x} = \pm (a v + c) \sqrt{\alpha + \frac{2 \sin u}{a}}, \qquad \mathfrak{y} = b \pm \sqrt{\alpha + \frac{2 \sin u}{a}}.$$

Weil ($\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = b$) das Bild des Nordpols ($u = \frac{1}{2}\pi$) sein soll, so muß $a = -2 : \alpha$ sein. Natürlich können wir annehmen, daß die $\mathfrak{x}$-Achse gerade das Bild des Äquators ($u = 0$), also $b \pm \sqrt{\alpha} = 0$ sei. Ist b, wie wir offenbar ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit voraussetzen dürfen, positiv gewählt, so werden wir daher bei der Quadratwurzel das Minuszeichen benutzen und außerdem $\alpha = b^2$ setzen. Dann ist $a = -2 : \alpha = -2 : b^2$. Außerdem darf angenommen werden, daß die $\mathfrak{y}$-Achse gerade der Nullmeridian ($v = 0$), daher $c = 0$ sei. Mithin kommt:

$$\mathfrak{x} = \frac{2}{b} v \sqrt{1 - \sin u}, \qquad \mathfrak{y} = b\left(1 - \sqrt{1 - \sin u}\right)$$

oder auch:

(23) $$\mathfrak{x} = \frac{2\sqrt{2}}{b} v \sin\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}u\right), \qquad \mathfrak{y} = b\left[1 - \sqrt{2} \sin\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}u\right)\right].$$

Die Konstante b kann irgendwie gewählt werden. Deshalb können wir es so einrichten, daß die Meridiane ($v = \pm \frac{1}{2}\pi$) als Geraden erscheinen, die mit der $\mathfrak{y}$-Achse Winkel von 45° bilden. Dies tritt nämlich ein, wenn $\mathfrak{x}$ für $u = 0$, $v = \pm \frac{1}{2}\pi$ gleich $\pm b$ wird, d. h. für $b = \sqrt{\pi}$. Dann ist:

$$(24) \qquad \mathfrak{x} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, v \sin\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}u\right), \qquad \mathfrak{y} = \sqrt{\pi}\left[1 - \sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}u\right)\right].$$

Dies Kartenbild[1] gibt die Fig. 24. Der Südpol $\left(u = -\frac{1}{2}\pi\right)$ erscheint als Gerade $\mathfrak{y} = -\sqrt{\pi}(\sqrt{2} - 1)$ verzerrt, und die ganze Kugelfläche wird auf das Innere eines gleichschenkligen Dreiecks abgebildet, dessen Grundseite diese Gerade in der Länge $4\sqrt{2\pi}$ und dessen Höhe gleich $\sqrt{2\pi}$ ist.

Fig. 24.

Die Formeln (22) führen zu einer anderen weniger verzerrten Karte, wenn wir die Funktionen Ψ und ω von u so zu wählen suchen, daß die Meridiane als Ellipsen erscheinen, die eine Achse mit den Endpunkten ($\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = \pm b$) gemein haben. Diese gemeinsame Achse hat dann die Länge $2b$, während die andere Achse für jeden Meridian (v) eine besondere Länge haben wird. Die Länge der zweiten, in der $\mathfrak{x}$-Achse gelegenen Ellipsenachse ist demnach als Funktion $2\,V(v)$ von v allein anzunehmen, so daß

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{V^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{b^2} = 1$$

das Bild des Meridians (v) ist. Es fragt sich also, ob wir in (22) die Funktionen Ψ und ω von u so wählen können, daß $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bei geeigneter Wahl der Funktion V von v die letzte Gleichung erfüllen. Da diese gibt:

$$(25) \qquad \mathfrak{x} = \frac{V}{b}\sqrt{b^2 - \mathfrak{y}^2},$$

verlangen wir nach (22):

$$\frac{v \cos u}{\Psi'(u)} + \omega(u) = \frac{V(v)}{b}\sqrt{b^2 - \Psi^2(u)}.$$

Zuerst zeigt sich, daß V linear in v sein muß:

$$V = av + c \qquad (a, c = \text{konst.}).$$

Alsdann kommt einzeln:

$$\frac{\cos u}{\Psi'} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - \Psi^2}, \quad \omega = \frac{c}{b}\sqrt{b^2 - \Psi^2},$$

---

[1] Zuerst angegeben von Collignon, „Recherches sur la représentation plane de la surface du globe terrestre", Journ. de l'École polyt. cah. 24, 1865.

und die hierin auftretenden Funktionen Ψ und ω hängen nur von u ab. Die erste Gleichung kann so geschrieben werden:

$$\cos u = \frac{a}{b}\,\Psi'\sqrt{b^2 - \Psi^2}$$

und gibt integriert:

(26) $$\sin u + \text{konst.} = \frac{a}{2b}\,\Psi\sqrt{b^2 - \Psi^2} + \frac{ab}{2}\arcsin\frac{\Psi}{b}\,.$$

Dies ist eine Bedingung für die Funktion Ψ von u, während alsdann die Gleichung

(27) $$\omega = \frac{c}{b}\sqrt{b^2 - \Psi^2}$$

noch die Funktion ω von u ergibt.

Die Bedingung (26) für Ψ vereinfacht sich noch durch einige besondere Festsetzungen: Ohne die Allgemeinheit der Betrachtung zu beschränken, dürfen wir annehmen, daß sich insbesondere der Nullmeridian ($v = 0$) als die $\mathfrak{y}$-Achse abbilde, also $\mathfrak{x} = 0$ sei für $v = 0$, d. h. nach (22) auch $\omega = 0$ oder also $c = 0$. Ferner seien die Bilder der Meridiane ($v = \pm\frac{1}{2}\pi$) Kreisbögen, also $V = \pm b$ für $v = \pm\frac{1}{2}\pi$. Da $V = av$ ist, sei also $a = 2b:\pi$. Der Äquator ($u = 0$) habe gerade die $\mathfrak{x}$-Achse zum Bilde, was eintritt, wenn $\mathfrak{y}$ oder Ψ für $u = 0$ verschwindet, wenn also die willkürliche Konstante in (26) gleich Null gewählt wird. Endlich seien die gemeinsamen Scheitel ($\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = \pm b$) der Ellipsen die Bilder der Pole ($u = \pm\frac{1}{2}\pi$). Dies ist der Fall, wenn Ψ für $u = \pm\frac{1}{2}\pi$ gleich $\pm b$, also $b = \sqrt{2}$ ist. Jetzt haben wir statt (26) und (27):

$$\frac{1}{2}\,\Psi\sqrt{2 - \Psi^2} + \arcsin\frac{\Psi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}\sin u\,, \quad \omega = 0$$

und statt (22) wegen (25):

$$\mathfrak{x} = \frac{2}{\pi}\,v\sqrt{2 - \Psi^2}, \quad \mathfrak{y} = \Psi.$$

Die Formeln werden etwas bequemer, wenn wir vermöge

$$\Psi = \sqrt{2}\sin\varphi(u)$$

statt Ψ eine neue Funktion φ von u einführen. Denn dann kommt:

(28) $$\begin{cases} \mathfrak{x} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}\,v\cos\varphi, \\ \mathfrak{y} = \sqrt{2}\sin\varphi, \end{cases} \qquad 2\varphi + \sin 2\varphi = \pi\sin u\,.$$

Die Gleichung rechts zur Bestimmung der Funktion $\varphi(u)$ ist transzendent, doch läßt sich für jeden Wert von u der zugehörige Wert von φ durch Annäherung ohne Mühe mit beliebiger Genauigkeit berechnen. Bei dieser in Fig. 25, S. 66, dargestellten Abbildung ist die ganze Kugelfläche flächentreu auf das Innere der Ellipse mit den Halbachsen $2\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ ausgebreitet.[1]

Schließlich kommen wir zu der in der Praxis am meisten gebrauchten flächentreuen Abbildung der Kugel: Die Breitenkreise sollen in der Art als konzentrische Kreise erscheinen, daß sich die Radien der Bilder zweier Breitenkreise gerade um den wahren sphärischen Abstand beider Kreise unter-

[1] Zuerst angegeben von Mollweide in der Monatl. Correspondenz für Erd- und Himmelskunde, 12. Bd. 1805.

scheiden. Da u der sphärische Abstand des Kreises (u) vom Äquator ist, so soll der Radius r seines Bildes gleich einer Konstanten a vermindert um u sein. Wir verwenden natürlich Polarkoordinaten r, φ, deren Ursprung



Fig. 25.

der Mittelpunkt jener konzentrischen Kreise ist, und gehen daher auf die Formeln (18) und (19) zurück. Da jetzt $R = a - u$ ist, gibt (19):

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\cos u}{a - u}.$$

Mithin kommt wegen $\varphi = F$:

$$r = a - u, \quad \varphi = \frac{r \cos u}{a - u} + \omega(u). \tag{29}$$

Hier ist ω eine beliebige Funktion von u. Soll sich der Nullmeridian $(v = 0)$ als die Gerade $(\varphi = 0)$ abbilden, so ist $\omega = 0$ zu setzen, also:

$$r = a - u, \quad \varphi = \frac{r \cos u}{a - u}. \tag{30}$$

Diese Abbildung[1] variiert noch mit der Konstanten a. Die Pole bilden sich als die Punkte $(r = a \mp \frac{1}{2}\pi, \varphi = 0)$ ab, und die Meridiane werden transzendente Kurven. Sie schneiden, wie man leicht sieht, auf den Breitenkreisen auch im Bilde die wahren Längen ab. Im Fall $a = \frac{1}{2}\pi$, also:

$$r = \frac{1}{2}\pi - u, \quad \varphi = \frac{r \cos u}{\frac{1}{2}\pi - u} \tag{31}$$

erscheint der Nordpol als Mittelpunkt der konzentrischen Breitenkreise. Siehe Fig. 26.[2]

[1] Diese Methode wurde zuerst von Bonne in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts angewandt, weshalb sie nach ihm benannt worden ist. Für ein Jahrhundert wurden die Länderkarten in den Atlanten fast ausschließlich nach dieser Methode entworfen.

[2] Dies ist der erste flächentreue Kartenentwurf, der überhaupt angegeben worden ist. Er wurde nach dem Vorschlage von Stab ausgeführt von Werner,

Hiermit wollen wir diese sehr beschränkte Auswahl aus der Zahl aller flächentreuen Abbildungen der Kugel abschließen.[1] Nach unseren früheren



Fig. 26.

Erörterungen erfordert die Aufstellung aller flächentreuen Entwürfe nur Eliminationen und Integrationen.[2]

„Annotationes Joan. Verneri in primum librum geogr. Cl. Ptolemaei; libellus de quatuor aliis planis terr. orbis descriptionibus", Nürnberg 1514.

[1] Flächentreue Abbildungen der Erde sollte man stets benutzen, sobald man in den Kartenbildern Größen veranschaulichen will, die ihrer Definition nach von den Flächeninhalten abhängen wie z. B. die Bevölkerungsdichtigkeit. Dieser Forderung genügt der Taschenatlas von Perthes, Gotha, mit einer der Fig. 25 entsprechenden Karte der Erdoberfläche. Meistens wird zu dem bezeichneten Zwecke die Merkatorkarte, siehe Fig. 34, S. 103, benutzt, die in größeren Breiten außerordentlich starke Verzerrungen der Fläche hat und daher für jenen Zweck durchaus unbrauchbar ist.

[2] Bezüglich der Lehre vom Entwerfen der Gradnetze verweisen wir auf die Bücher:

Herz, „Lehrbuch der Landkartenprojektionen", Leipzig 1885.

Tissot, „Die Netzentwürfe geographischer Karten", deutsch bearb. von Hammer, Stuttgart 1887.

Zöppritz, „Leitfaden der Kartenentwurfslehre", 1. Teil, 2. Aufl. bearb. von Bludau, Leipzig 1899.

Ferner erwähnen wir, daß Gravé 1896 in seiner auf S. 167 des 1. Bandes erwähnten Arbeit die Aufgabe gelöst hat, alle diejenigen flächentreuen Abbildungen der Kugel auf die Ebene zu bestimmen, bei denen die Meridiane und Breitenkreise sämtlich wieder als Kreise erscheinen.

Über nicht-flächentreue Gradnetzentwürfe, die andere ausgezeichnete Eigenschaften haben, sprechen wir später (S. 90 u. f.).

§ 8. Isothermen auf einer Fläche.

Es liege irgend eine Fläche in Parameterdarstellung vor:

(1) $$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

und das Quadrat ihres Bogenelements sei:

(2) $$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

In bezug auf das System der Parameterlinien (u), (v) können wir ähnliche Betrachtungen wie in der Ebene, I S. 162 u. f., anstellen: Das Netz der Parameterlinien ist durch (1) gegeben, aber die Dichtigkeit des Netzes hängt noch von unserer Willkür ab. Indem wir zwei von Null verschiedene Funktionen $\alpha(u)$ und $\beta(v)$ von u bzw. v allein wählen und nun u bzw. v jedesmal um

(3) $$\Delta u = \alpha(u)\,\varepsilon \quad \text{bzw.} \quad \Delta(v) = \beta(v)\,\varepsilon$$

wachsen lassen, wählen wir Netzkurven in bestimmter Art aus, und für $\lim \varepsilon = 0$ ergibt sich das unendlich dichte Netz mit einer durch die angenommenen Funktionen $\alpha(u)$ und $\beta(v)$ bedingten Dichtigkeit. Die Diagonalkurven werden durch die beiden Differentialgleichungen

(4) $$\frac{du}{\alpha(u)} - \frac{dv}{\beta(v)} = 0, \quad \frac{du}{\alpha(u)} + \frac{dv}{\beta(v)} = 0$$

definiert. Längs jeder Diagonalkurve der einen bzw. anderen Schar ist demnach

(5) $$\int \frac{du}{\alpha(u)} - \int \frac{dv}{\beta(v)} = \text{konst.} \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{du}{\alpha(u)} + \int \frac{dv}{\beta(v)} = \text{konst.},$$

falls man die Integrale jedesmal von einem bestimmten Punkte (u_0, v_0) der betreffenden Kurve an rechnet.

Längs einer Diagonalkurve ist somit eine der beiden Größen

(6) $$U = \int \frac{du}{\alpha(u)} - \int \frac{dv}{\beta(v)}, \quad V = \int \frac{du}{\alpha(u)} + \int \frac{dv}{\beta(v)}$$

konstant. Dabei sind U und V voneinander unabhängige Funktionen mit der Funktionaldeterminante

$$U_u V_v - V_u U_v = \frac{2}{\alpha(u)\beta(v)}.$$

Mithin sind umgekehrt u und v Funktionen von U und V. Führen wir sie in (1) ein, so kommen wir zu einer neuen Parameterdarstellung unserer Fläche. Die neuen Parameterlinien (U) und (V) sind die Diagonalkurven (5) des durch (3) und $\lim \varepsilon = 0$ definierten Netzes der alten Parameterlinien (v) und (v).

Nach Satz 15, S. 44, schneiden die Parameterlinien (u) und (v) einander senkrecht, wenn

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0$$

ist. Dementsprechend schneiden die Diagonalkurven (U) und (V) einander senkrecht, wenn

(7) $$x_U x_V + y_U y_V + z_U z_V = 0$$

ist. Wie in I S. 164 finden wir aus den Formeln:

$$dx = x_u du + x_v dv = x_U dU + x_V dV$$

usw und aus (6):

$$x_U = \tfrac{1}{2}(\alpha x_u - \beta x_v), \qquad x_V = (\alpha x_u + \beta x_v),$$

sowie die entsprechenden Formeln in y und z statt x. Die Bedingung (7) kann daher so geschrieben werden:

$$\mathsf{S}(\alpha x_u - \beta x_v)(\alpha x_u + \beta x_v) = 0$$

oder nach (5), S. 15, so:

(8) $$\alpha^2 E = \beta^2 G \quad \text{oder:} \quad E : G = \frac{1}{\alpha^2(u)} : \frac{1}{\beta^2(v)}.$$

Ist sie erfüllt, so schneiden die Diagonalkurven des Netzes der Parameterlinien (u) und (v) einander senkrecht, mit anderen Worten: Das Netz besteht dann aus unendlich kleinen Rhomben (vgl. I S. 164). Mithin haben wir den

Satz 28: Damit sich die Parameterlinien (u) und (v) einer Fläche so anordnen lassen, daß sie ein Netz von unendlich kleinen Rhomben bilden, ist notwendig und hinreichend, daß das Verhältnis der beiden Fundamentalgrößen E und G gleich dem Verhältnisse aus einer von Null verschiedenen Funktion von u allein zu einer von Null verschiedenen Funktion von v allein sei.

Wenn außerdem $F = 0$ ist, schneiden auch die Parameterlinien (u) und (v) einander senkrecht; die Rhomben sind dann Quadrate (vgl. I S. 165), so daß wir sagen können:

Satz 29: Damit sich die Parameterlinien (u) und (v) einer Fläche so anordnen lassen, daß sie ein Netz von unendlich kleinen Quadraten bilden, ist notwendig und hinreichend, daß die Fundamentalgrößen E, F, G die Bedingungen

$$F = 0, \qquad \alpha^2(u) E - \beta^2(v) G = 0$$

erfüllen. Hierin bedeutet α eine von Null verschiedene

Funktion von u allein und β eine von Null verschiedene Funktion von v allein.

Ein Netz von Parameterlinien, das aus unendlich kleinen Quadraten besteht, heißt wie in der Ebene ein Isothermennetz (vgl. I S. 171).[1] Sind die Bedingungen dafür nach Satz 29 erfüllt, so haben E, F, G die Formen:

(9) $$E = \frac{\lambda^2}{\alpha^2(u)}, \qquad F = 0, \qquad G = \frac{\lambda^2}{\beta^2(v)},$$

wobei λ irgend eine Funktion von u und v sein kann. Das Quadrat (2) des Bogenelements der Fläche hat daher jetzt die Form:

(10) $$ds^2 = \lambda^2(u, v)\left[\frac{du^2}{\alpha^2(u)} + \frac{dv^2}{\beta^2(v)}\right].$$

Wie in I S. 171 u. f. sieht man, daß sich zwei Scharen von Kurven, die Isothermen sind, nur auf eine Art so anordnen lassen, daß sie unendlich kleine Quadrate bilden.

Es liegt nunmehr nahe, neue Parameter einzuführen, ohne aber dabei neue Parameterlinien zu schaffen (vgl. S. 11), nämlich dadurch, daß wir (wie in I S. 172) setzen:

(11) $$\bar{u} = \int \frac{du}{\alpha(u)}, \qquad \bar{v} = \int \frac{dv}{\beta(v)}$$

und nun $\bar{u}$ und $\bar{v}$ als neue Parameter benutzen; $\bar{u}$ hängt nur von u $\bar{v}$ nur von v ab, so daß die alten Parameterlinien $u =$ konst. und $v =$ konst. mit den neuen: $\bar{u} =$ konst. und $\bar{v} =$ konst. identisch sind. Auch in der Funktion $\lambda^2(u, v)$ denken wir uns die Werte von u und v, ausgedrückt durch $\bar{u}$ und $\bar{v}$, eingesetzt, wodurch eine Funktion $\Omega(\bar{u}, \bar{v})$ hervorgeht. Das Quadrat des Bogenelements hat nun nach (10) die Form:

(12) $$ds^2 = \Omega(\bar{u}, \bar{v})(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2).$$

Also können wir sagen, wenn wir noch (6) berücksichtigen:

Satz 30: Wenn sich aus den Parameterlinien (u) und (v) einer Fläche ein Isothermennetz bilden läßt, kann das Quadrat des Bogenelements dadurch, daß geeignete Funktionen $\bar{u}$ und $\bar{v}$ von u bzw. v allein als neue Parameter ein geführt werden, auf die Form gebracht werden:

$$ds^2 = \Omega(\bar{u}, \bar{v})(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2).$$

Die Diagonalkurven des Netzes sind alsdann die Kurven $\bar{u} \mp \bar{v} =$ konst.

---

[1] Geschichtliche Hinweise siehe in der Anmerkung ebenda.

Die Fundamentalgrößen haben jetzt für die neue Parameterdarstellung der Fläche die Werte:

$$\bar{E} = \Omega, \qquad \bar{F} = 0, \qquad \bar{G} = \Omega,$$

so daß $\bar{E} = \bar{G}$, $\bar{F} = 0$ ist. —

Wir wollen annehmen, wir hätten auf der Fläche (1) gewisse voneinander unabhängige Funktionen von u und v als neue Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$ eingeführt, und dabei habe sich ergeben, daß die Fundamentalgrößen $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ für die neue Parameterdarstellung die Eigenschaften haben:

(13) $$\bar{E} = \bar{G}, \qquad \bar{F} = 0.$$

Wir fragen uns, was wir hieraus schließen können. Wegen $\bar{F} = 0$ durchschneiden die neuen Parameterlinien $(\bar{u})$ und $(\bar{v})$ einander senkrecht — nach Satz 15, S. 44. Wenn wir ferner die Parameterlinien $(\bar{u})$ und $(\bar{v})$ so anordnen, daß $\bar{u}$ bzw. $\bar{v}$ von Kurve zu Kurve um

$$d\bar{u} = \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad d\bar{v} = \varepsilon$$

wächst, wobei ε nach Null streben soll, so sind, da jetzt diese Gleichungen an die Stelle der Gleichungen (3) und (4) treten, mithin für α und β Eins zu setzen ist, nach (5) die Kurven:

$$\bar{u} \mp \bar{v} = \text{konst.}$$

die Diagonalkurven. Statt (6) haben also jetzt U und V die Werte $\bar{u} - \bar{v}$ und $\bar{u} + \bar{v}$. Nun war (8) nur eine andere Form von (7), d. h. von der Bedingung für die Orthogonalität der Diagonalkurven, und diese Gleichung hat jetzt die Gestalt

$$\bar{E} = \bar{G}.$$

Die erste Gleichung (13) sagt also aus, daß die Diagonalkurven einander senkrecht schneiden. Mithin haben wir in (13) auch die hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Kurven $(\bar{u})$ und $(\bar{v})$ ein Isothermensystem bilden. Also gilt der

Satz 31: Dafür, daß sich die Parameterlinien $(\bar{u})$ und $(\bar{v})$ einer Fläche zu einem Isothermennetze anordnen lassen, in dem $(\bar{u})$ bzw. $(\bar{v})$ von Kurve zu Kurve um dieselbe unendlich kleine Größe wächst, ist notwendig und hinreichend, daß die zugehörigen Fundamentalgrößen erster Ordnung $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ die Bedingungen

$$\bar{E} = \bar{G}, \qquad \bar{F} = 0$$

erfüllen.

Solche Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ heißen wie in der Ebene (vgl. I S. 173) thermische Parameter. Der Satz 71, I S. 174, läßt sich hier ebenfalls beweisen, so daß also

$$
(14) \quad \left\{\begin{array}{ll} & u' = \pm a\bar{u} + \text{konst.}, \quad v' = \pm a\bar{v} + \text{konst.} \\ \text{und} & \\ & u' = \pm a\bar{v} + \text{konst.}, \quad v' = \pm a\bar{u} + \text{konst} \end{array}\right\} \quad (a = \text{konst.})
$$

die allgemeinsten thermischen Parameterpaare sind, die zu demselben Isothermennetze wie die thermischen Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ gehören. Dabei können die Vorzeichen beliebig gewählt werden.

Hat man von einer Fläche, auf der man thermische Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ kennt, ein Modell hergestellt und will man auf dem Modell das zugehörige Isothermennetz veranschaulichen, so wird man natürlich ein Netz mit Maschen von endlicher Seitenlänge einzeichnen, so wie wir dies in der Ebene in den Figuren 54 bis 57, I S. 174 bis 180 getan haben. Dies geschieht, indem man die Kurven (u) bzw. (v) so aufeinander folgen läßt, daß ihr thermischer Parameter $\bar{u}$ bzw. $\bar{v}$ von Kurve zu Kurve um dieselbe endliche Größe zunimmt, also arithmetisch wächst. Dann erhält man ein Netz von Maschen, die man als endliche, aber krummlinige Quadrate bezeichnen könnte. Die Diagonalkurven des wirklichen unendlich dichten Isothermennetzes sind auch bei diesem Netze mit endlichen Maschen Diagonalkurven.

1. Beispiel: Auf der Rotationsfläche, vgl. (10), S. 48:

$$
(15) \qquad x = p(u)\cos v, \qquad y = p(u)\sin v, \qquad z = q(u),
$$

wo u die Bogenlänge der Meridiane bedeutet, ist:

$$
(16) \qquad ds^2 = du^2 + p^2(u)\,dv^2.
$$

Führen wir

$$
(17) \qquad \bar{u} = \int \frac{du}{p(u)}, \qquad \bar{v} = v
$$

als neue Parameter ein, so wird:

$$
d\bar{u} = \frac{du}{p(u)}, \qquad d\bar{v} = dv,
$$

und also kommt statt (16):

$$
(18) \qquad ds^2 = p^2(u)(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2).
$$

Natütlich kann hier $p^2(u)$ als eine Funktion von $\bar{u}$ infolge der ersten Gleichung (17) aufgefaßt werden. In den neuen Parametern hat die Fläche die Fundamentalgrößen

$$
\bar{E} = \bar{G} = p^2(u), \qquad \bar{F} = 0.
$$

Jetzt sind $\bar{u}$ und $\bar{v}$ thermische Parameter. Da die Kurven $(\bar{u})$ und $(\bar{v})$ nach (17) die alten Parameterlinien (u) und (v) sind, folgt: Wir können die Breitenkreise und Meridiane einer Rotationsfläche stets so anordnen, daß sie die Fläche in unendlich kleine Quadrate zerlegen. Von Kurve zu Kurve wächst $\bar{u}$ bzw. $\bar{v}$ dabei um dieselbe unendlich kleine Größe lim ε. Da v den Winkel der Ebene des Meridians $(\bar{v})$ mit der des Meridians $(\bar{v} = 0)$ bedeutet, müssen wir also lauter Meridianschnitte herstellen, die denselben unendlich kleinen Winkel lim ε miteinander bilden. Da ferner

$p(u)$ gleich dem Radius des Breitenkreises (u) und u die Bogenlänge auf dem Meridian ist, folgt ferner aus

$$\lim \varepsilon = d\bar{u} = \frac{du}{p(u)},$$

daß man einen Meridian so einzuteilen hat, daß das Verhältnis aus dem unendlich kleinen Bogenstück dividiert durch den zugehörigen Breitenradius gleich $\lim \varepsilon$ ist, und alsdann durch die Teilpunkte die Breitenkreise ziehen muß.

Z. B. auf der Kugel vom Radius Eins (vgl. S. 11)

$$x = \cos u \cos v, \qquad y = \cos u \sin v, \qquad z = \sin u$$

ist $p(u) = \cos u$, so daß nach (17):

$$(19) \qquad \bar{u} = \log \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\pi\right), \qquad \bar{v} = v$$

thermische Parameter sind. Dabei ist u die geographische Breite, v die geographische Länge. Die Seite des unendlich kleinen Quadrates an der Stelle $(\bar{u}, \bar{v})$ hat nach (18) die Länge $p(u)\,d\bar{u}$ oder $p(u)\lim \varepsilon$, ist also proportional dem Radius des Breitenkreises, insbesondere bei der Kugel proportional dem Kosinus der geographischen Breite. Nach den Polen zu werden demnach die Maschen des Netzes immer kleiner.

2. Beispiel: Wenn man eine stetige Schraubung (siehe I S. 266) auf eine Gerade ausübt, die die Schraubenachse senkrecht trifft, beschreibt die Gerade eine nicht abwickelbare geradlinige Fläche, die man eine gemeine Schraubenfläche (Wendelfläche) nennt. Man kann die Entstehung der Fläche auch so ausdrücken: Eine Gerade bewege sich so, daß sie stets eine feste Achse senkrecht trifft und die Strecke, die ihr Schnittpunkt mit der Achse zurücklegt, zum Winkel v, den die Ebene der Achse und Geraden um die Achse beschreibt, in einem konstanten Verhältnisse steht. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Achse keine Minimalgerade sei, denn von denjenigen Bewegungen, bei denen eine Minimalgerade in Ruhe bleibt, haben wir Abstand genommen, vgl. I S. 202. Die Schraubenachse kann somit als z-Achse gewählt werden, also auch die x-Achse als die erwähnte Gerade der Fläche. Alle Geraden der Fläche sind der xy-Ebene parallel und treffen die z-Achse. Wir betrachten irgend einen Punkt P oder (x, y, z) einer solchen Geraden. Die Koordinate z ist ein konstantes Vielfaches, etwa das q-fache, des Winkels v, den die Ebene durch die z-Achse und die Gerade mit der xz-Ebene bildet, also $z = qv$. Hat ferner P von der z-Achse die Entfernung u, so ist $x = u \cos v$ und $y = u \sin v$. Folglich sind

$$(20) \qquad x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = qv$$

die Gleichungen einer gemeinen Schraubenfläche. Die Parameterlinien (v) sind die Geraden der Fläche, die Parameterlinien (u) sind lauter gemeine Schraubenlinien (vgl. I S. 210) um die z-Achse mit ein und derselben Schraubenhöhe $2\pi q$ (vgl. I S. 211). Fig. 27 und 28 stellen eine und dieselbe Schraubenfläche in senkrechter Projektion auf die Zeichenebene, aber mit

verschiedenen Neigungen der z-Achse gegenüber der Zeichenebene dar.[1] Eine Reihe von Parameterlinien ist eingezeichnet. Aus (20) folgt:

$$dx = \cos v\,du - u\sin v\,dv\,, \qquad dy = \sin v\,du + u\cos v\,dv\,, \qquad dz = q\,dv\,,$$

also:

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + q^2)\,dv^2. \tag{21}$$

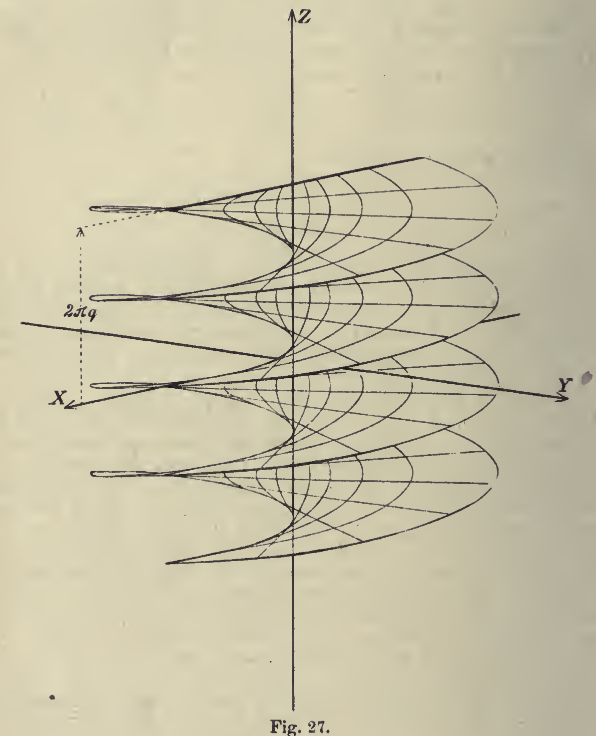


Fig. 27.

so daß $E = 1$, $F = 0$ und $G = u^2 + q^2$ ist. Nach Satz 15, S. 44, besagt $F = 0$, daß die Geraden (v) die Schraubenlinien (u) überall senkrecht schneiden. In den neuen Parametern

[1] Da jede Gerade g der Fläche schon nach einer Verschraubung, bei der nur erst ein gestreckter Winkel zurückgelegt worden ist, wieder zu ihrer vorigen Lage parallel wird, aber in entgegengesetztem Sinne, täuscht man sich leicht über die Schraubenhöhe. Sie ist daher in den Figuren 27 und 28 ausdrücklich angegeben. Die Figuren stellen nur zwei ganze Schraubengänge dar.

$$\bar{u} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + q^2}} = \log\left(u + \sqrt{u^2 + q^2}\right), \qquad \bar{v} = v$$

nimmt das Quadrat des Bogenelements die Form an:

$$ds^2 = (u^2 + q^2)(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2).$$

Also sind $\bar{u}$ und $\bar{v}$ thermische Parameter. Mithin: **Die gemeinen Schraubenlinien** (u) **und die geradlinigen Erzeugenden** (v) **der gemeinen Schraubenfläche bilden ein Isothermensystem.** Um dies Isothermennetz zu erhalten, wählen wir alle diejenigen Geraden (v) oder ($\bar{v}$) auf der Fläche aus, die jedesmal durch die Schraubung mit dem unendlich kleinen Winkel $d\bar{v} = \lim \varepsilon$ auseinander hervorgehen. Ferner wählen wir auf der x-Achse die-

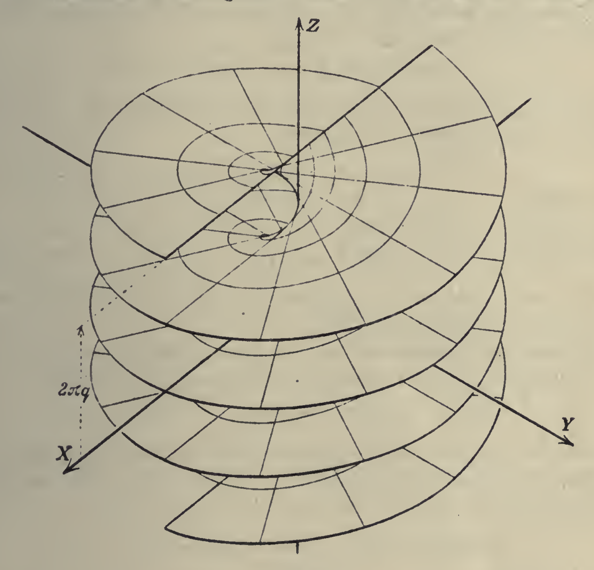


Fig. 28.

jenigen Punkte, deren Abszissen u jedesmal um die unendlich kleine Größe du wachsen, für die

$$\lim \varepsilon = d\bar{u} = \frac{du}{\sqrt{u^2 + q^2}},$$

also

$$du = \sqrt{u^2 + q^2} \lim \varepsilon$$

ist. Von diesen Punkten gehen lauter Schraubenlinien (u), die zweite Kurvenschar des Netzes, aus. In den Fig. 27 und 28 ist ein Netz von endlicher Maschengröße eingezeichnet worden, bei dem die thermischen Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ arithmetisch wachsen.

§ 9. Bestimmung der Isothermennetze auf einer Fläche.

Liegt eine Fläche vor, deren Bogenelement-Quadrat die Form hat:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2; \tag{1}$$

so soll jetzt die Frage beantwortet werden, wie man alle Isothermennetze der Fläche findet. Wenn $\bar{u}$ und $\bar{v}$ thermische Parameter sein sollen, müssen u und v gewisse zunächst noch unbekannte Funktionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ sein, so daß das Quadrat des Bogenelements durch Einführung der Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ die in Satz 30, S. 70, angegebene charakteristische Form bekommt:

$$ds^2 = \Omega(\bar{u}, \bar{v})\,(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2), \tag{2}$$

wo auch Ω eine zunächst noch unbekannte Funktion von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ bedeutet. Hierfür läßt sich schreiben:

$$ds^2 = \Omega(\bar{u}, \bar{v})\,(d\bar{u} + i\,d\bar{v})\,(d\bar{u} - i\,d\bar{v}).$$

Wenn man

$$\bar{u} + i\bar{v} = \mathfrak{u}, \qquad \bar{u} - i\bar{v} = \mathfrak{v} \tag{3}$$

setzt, kommt:

$$ds^2 = \Omega\,d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}, \tag{4}$$

und man wird, sobald $\Omega(\bar{u}, \bar{v})$ bekannt ist, auch in Ω die Veränderlichen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ einführen können.

Umgekehrt: Nehmen wir an, es sei uns gelungen, statt u und v neue Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ einzuführen, in denen ds^2 die Form

$$ds^2 = \Omega\,d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}$$

annimmt, die nur das Produkt der Differentiale enthält, so können wir auch sofort thermische Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ finden. Wir setzen nämlich die Gleichungen (3) an oder ihre Auflösungen:

$$\bar{u} = \frac{1}{2}(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}), \qquad \bar{v} = -\frac{1}{2}\,i(\mathfrak{u} - \mathfrak{v}); \tag{5}$$

denn dann wird:

$$ds^2 = \Omega\,(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2).$$

Hieraus folgt: Es kommt zunächst darauf an, solche Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ zu finden, in denen das Quadrat des Bogenelements nur das Produkt der Differentiale enthält:

$$ds^2 = \Omega\,d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}.$$

Nach Satz 14, S. 44, können wir auch sagen:

Es handelt sich zunächst um die Bestimmung der Minimalkurven $\mathfrak{u} =$ konst. und $\mathfrak{v} =$ konst. auf der Fläche.

Bedenken wir nun, daß uns ds^2 in der Form (1) gegeben ist, so lehrt Satz 18, S. 46, daß die Gleichung

(6) $$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0$$

die beiden Scharen von Minimalkurven auf der Fläche definiert. Diese Gleichung zerlegen wir in ihre linearen Faktoren (vgl. S. 13):

(7) $$\left\{\begin{aligned} E\,du + (F + iD)\,dv &= 0,\\ E\,du + (F - iD)\,dv &= 0.\end{aligned}\right.$$

Dies sind dann die Differentialgleichungen für die beiden Scharen von Minimalkurven $\mathfrak{u} =$ konst. und $\mathfrak{v} =$ konst. Demnach bedeuten $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ Integrale der Gleichungen (7). Es mögen $\lambda(u, v)$ und $\mu(u, v)$ zugehörige Multiplikatoren (vgl. I S. 131) sein, so daß

(8) $$\left\{\begin{aligned} d\mathfrak{u} &= \lambda[E\,du + (F + iD)\,dv],\\ d\mathfrak{v} &= \mu[E\,du + (F - iD)\,dv]\end{aligned}\right.$$

vollständige Differentiale sind.

Die Bestimmung der Multiplikatoren oder der Integrale verlangt natürlich die Integration der beiden Differentialgleichungen (7). Dies möge an einem besonders wichtigen Beispiele erläutert werden.

1. Beispiel: Auf der Kugel (S. 73)

$$x = \cos u \cos v, \qquad y = \cos u \sin v, \qquad z = \sin u$$

ist

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u\,dv^2 = (du + i\cos u\,dv)(du - i\cos u\,dv).$$

Die Differentialgleichungen der Minimalkurven:

$$du \pm i\cos u\,dv = 0$$

haben hier den gemeinsamen Multiplikator

$$\lambda = \mu = \frac{1}{\cos u},$$

da

$$d\mathfrak{u} = \frac{du}{\cos u} + i\,dv, \qquad d\mathfrak{v} = \frac{du}{\cos u} - i\,dv$$

vollständige Differentiale sind. Es kommt:

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{u}\\ \mathfrak{v}\end{matrix}\right\} = \log \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\pi\right) \pm iv.$$

Da sich diese Gleichungen auch so schreiben lassen:

$$e^{\pm iv} \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\pi\right) = \text{konst.},$$

können wir als Integrale der Differentialgleichungen der Minimalkurven auch

(9) $$\left.\begin{matrix}\mathfrak{u}\\ \mathfrak{v}\end{matrix}\right\} = e^{\pm iv} \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\pi\right) = (\cos v \pm i\sin v) \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\pi\right)$$

benutzen, was zu bequemeren Formeln führt. Hiernach ist nämlich:

$$\sin u = \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v} - 1}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}, \qquad \cos u = \frac{2\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1},$$

$$\sin v = \frac{-i(\mathfrak{u} - \mathfrak{v})}{2\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}, \qquad \cos v = \frac{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}}{2\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}},$$

so daß sich x, y, z in den neuen Parametern $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ so ausdrücken:

$$(10) \qquad x = \frac{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}, \quad y = -i\frac{\mathfrak{u} - \mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}, \quad z = \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v} - 1}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}.$$

Man kann auch den negativen reziproken Wert von $\mathfrak{v}$ als zweiten Parameter $\mathfrak{v}$ benutzen. Dann erhält man statt (10) die Darstellung:

$$(11) \qquad x = \frac{1 - \mathfrak{u}\mathfrak{v}}{\mathfrak{u} - \mathfrak{v}}, \quad y = i\frac{1 + \mathfrak{u}\mathfrak{v}}{\mathfrak{u} - \mathfrak{v}}, \quad z = \frac{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}}{\mathfrak{u} - \mathfrak{v}},$$

Formeln, denen wir schon in (10), I S. 290, in etwas anderer Schreibweise begegnet sind. Diese Gleichungen stellen also die Kugel um den Anfangspunkt mit dem Radius Eins dar und zwar ausgedrückt mittels der Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$, so daß die Parameterlinien ($\mathfrak{u}$) und ($\mathfrak{v}$) die Minimalkurven der Kugel sind. Da die Verhältnisse

$$\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{v}} : \frac{\partial y}{\partial \mathfrak{v}} : \frac{\partial z}{\partial \mathfrak{v}} = (1 - \mathfrak{u}^2) : i(1 + \mathfrak{u}^2) : 2\mathfrak{u}$$

frei von $\mathfrak{v}$ sind, so sind die Minimalkurven ($\mathfrak{u}$) Geraden, ebenso die Kurven ($\mathfrak{v}$).

Satz 32: Die Kugel enthält zwei einfach unendliche Scharen von Minimalgeraden.

Die Kugel ist folglich in zwei Arten als eine geradlinige Fläche mit allerdings imaginären Geraden aufzufassen, aber nicht als abwickelbare Fläche (vgl. I S. 387 u. f.). Eine beliebige Ebene

$$(12) \qquad Ax + By + Cz = D$$

schneidet die Kugel in einem Kreise, der sich in $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ nach (11) so darstellt:

$$(13) \qquad -(A - iB)\mathfrak{u}\mathfrak{v} + (C - D)\mathfrak{u} + (C + D)\mathfrak{v} + (A + iB) = 0,$$

d. h. die allgemeine bilineare Gleichung in $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$:

$$(14) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{u}\mathfrak{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{u} + \mathfrak{C}\mathfrak{v} + \mathfrak{D} = 0$$

stellt einen Kreis auf der Kugel dar. Insbesondere zerfällt diese Gleichung in zwei lineare Gleichungen $\mathfrak{u} =$ konst. und $\mathfrak{v} =$ konst., wenn

$$\mathfrak{A}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C} = 0$$

oder nach (13):

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2$$

ist. Dann aber berührt die Ebene (12) die Kugel, da ihr Abstand vom Anfangspunkte dann gleich Eins ist. Nach I S. 13 sehen wir also: Die Tangentenebenen der Kugel schneiden die Kugel in Nullkreisen oder Paaren von Minimalgeraden. Noch anders ausgesprochen: Die Minimalgeraden der Kugel sind die imaginären Schnittlinien der Kugel mit ihren Tangentenebenen.

Wir wollen jetzt annehmen, die Gleichungen (7) seien integriert worden, d. h. es seien Integrale $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ von ihnen gefunden. Sie sind voneinander unabhängig, da die Fläche zwei verschiedene

Scharen von Minimalkurven $\mathfrak{u} =$ konst. und $\mathfrak{v} =$ konst. enthält, vgl. Satz 18, S. 46. Wenn wir jetzt nach (5):

$$\bar{u} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}), \qquad \bar{v} = -\tfrac{1}{2}i(\mathfrak{u} - \mathfrak{v})$$

setzen, werden auch $\bar{u}$ und $\bar{v}$ voneinander unabhängige und zwar thermische Parameter sein. Also folgt:

Satz 33: Liegt eine Fläche mit dem Bogenelement-Quadrat

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du\, dv + G dv^2$$

vor, so findet man ein thermisches Parameterpaar $\bar{u}$ und $\bar{v}$, indem man Integrale $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ der beiden in der Gleichung

$$E du^2 + 2 F du\, dv + G dv^2 = 0$$

enthaltenen Differentialgleichungen der Minimalkurven bestimmt und dann

$$\bar{u} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}), \qquad \bar{v} = -\tfrac{1}{2}i(\mathfrak{u} - \mathfrak{v})$$

setzt.

Die Frage nach allen Isothermennetzen auf der Fläche ist nun schnell zu erledigen: Wir haben die Methode in allgemeinster Weise anzuwenden. Von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ wurde nur das Eine verlangt, daß sie Integrale der Differentialgleichungen (7) sein sollen. Nach I S. 131 ist das allgemeinste Integral einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in zwei Veränderlichen eine beliebige Funktion irgend eines Integrals der Gleichung. Mithin: wenn $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ Integrale von (7) sind, stellen beliebige Funktionen $A(\mathfrak{u})$ und $B(\mathfrak{v})$ von ihnen die allgemeinsten Integrale von (7) dar. Nach (3) ergibt sich demnach das allgemeinste Paar von thermischen Parametern $\bar{U}$ und $\bar{V}$ aus:

$$(15) \qquad \begin{cases} \bar{U} + i\bar{V} = A(\mathfrak{u}) = A(\bar{u} + i\bar{v}), \\ \bar{U} - i\bar{V} = B(\mathfrak{v}) = B(\bar{u} - i\bar{v}). \end{cases}$$

Satz 34: Sind $\bar{u}$ und $\bar{v}$ thermische Parameter für eine Fläche, so ergibt sich ihr allgemeinstes Paar von thermischen Parametern $\bar{U}$ und $\bar{V}$, wenn man $\bar{U} + i\bar{V}$ gleich irgend einer Funktion von $\bar{u} + i\bar{v}$ und $\bar{U} - i\bar{V}$ gleich irgend einer Funktion von $\bar{u} - i\bar{v}$ setzt.

Der Satz 72, I S. 176, ist ein besonderer Fall hiervon, denn in der xy-Ebene sind die Koordinaten x und y selbst thermische Parameter.

Nehmen wir an, es liege eine reelle Fläche vor, und es seien $\bar{u}$ und $\bar{v}$ reelle thermische Parameter, d. h. x, y, z seien reelle

Funktionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$. Um dann das allgemeinste Paar von reellen thermischen Parametern zu bekommen, muß man die Funktionen A und B in (15) so wählen, daß $\bar{U}$ und $\bar{V}$ reell in $\bar{u}$ und $\bar{v}$ werden. Hieraus folgt — wie insbesondere für die Ebene der Satz 73, I S. 177 — der

Satz 35: Sind $\bar{u}$ und $\bar{v}$ reelle thermische Parameter für eine reelle Fläche, so erhält man das allgemeinste reelle thermische Parameterpaar $\bar{U}, \bar{V}$ für die Fläche, wenn man $\bar{U}$ gleich dem reellen und $i\bar{V}$ gleich dem rein imaginären Teile irgend einer Funktion von $\bar{u} + i\bar{v}$ setzt.

2. Beispiel: Auf der Kugel

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u$$

bestimmt sich das allgemeinste reelle thermische Parameterpaar $\bar{U}, \bar{V}$ nach S. 77 aus den beiden Gleichungen:

$$\bar{U} \pm i\bar{V} = A\left(\log \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\pi\right) \pm iv\right),$$

in denen A eine beliebige Funktion des angegebenen Argumentes, aber für beide Vorzeichen dieselbe Funktion, bedeutet.[1] So ergibt sich z. B. aus der Annahme

$$\bar{U} \pm i\bar{V} = e^{\log \operatorname{tg}(1/2 u + 1/4 \pi) \pm iv} = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\pi\right).(\cos v \pm i \sin v)$$

das reelle thermische Parameterpaar:

$$\bar{U} = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\pi\right).\cos v, \quad \bar{V} = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\pi\right).\sin v$$

Nach S. 18 wird, worauf wir nochmals ausdrücklich hinweisen, von denjenigen Flächen abgesehen, auf denen D^2 oder $EG - F^2$ überall gleich Null ist, d. h. nach S. 23 von denjenigen Flächen, die lauter Minimalpunkte haben. Auf derartigen Flächen kann aber auch gar nicht von Isothermennetzen die Rede sein. Denn falls man irgendwelche neue Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ etwa vermöge $u = \lambda(\bar{u}, \bar{v})$ und $\bar{v} = \mu(\bar{u}, \bar{v})$ einführt, treten neue Fundamentalgrößen $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ auf, die auf S. 17 unter (9) berechnet wurden und für die danach augenscheinlich

$$\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\right)^2 (EG - F^2)$$

ist, so daß auch bei der neuen Parameterdarstellung $\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2$ überall

[1] Dies allgemeinste reelle thermische Parameterpaar auf der Kugel ist zuerst von Euler in seiner Abhandlung „De repraesentatione superficiei sphaericae super plano“, Acta Acad. Petrop. 1777, 1. Teil, Petersburg 1778, S. 107 u. f. (siehe insbes. S. 125) aufgestellt worden. In dieser Arbeit handelt es sich um die konforme Abbildung der Kugel auf die Ebene, die wir in den folgenden Paragraphen besprechen. Eine Übersetzung der Arbeit hat Wangerin in Ostwalds Klassikern der exakten Wiss. Nr. 93 herausgegeben (siehe daselbst insbes. S. 28).

auf einer derartigen Fläche verschwinden muß. Dies folgt übrigens ohne Rechnung auch schon daraus, daß das Verschwinden von $EG - F^2$ bedeutet, daß alle Punkte der Fläche Minimalpunkte sind, eine Eigenschaft, die natürlich auch bei jeder neuen Parameterdarstellung in Erscheinung treten muß. Gäbe es nun thermische Parameter $\bar{u}, \bar{v}$, so hätte ds^2 die Form (2), so daß $\bar{E} = \Omega$, $\bar{F} = 0$, $\bar{G} = \Omega$, also $\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2$ gleich Ω^2 und nicht gleich Null wäre. Darin liegt der Widerspruch. Die soeben betrachteten Ausnahmeflächen haben ja auch nur eine und nicht zwei verschiedene einfach unendliche Scharen von Minimalkurven.

§ 10. Konforme Abbildung von Flächen.

Liegen die Gleichungen einer Fläche vor:

(1) $$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

und deutet man u und v als rechtwinklige Koordinaten in einer $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene, d. h. setzt man

$$\mathfrak{x} = u, \quad \mathfrak{y} = v,$$

so ist die Fläche punktweise auf die Ebene abgebildet, vgl. S. 52. Wählt man auf der Fläche in der Umgebung irgend eines ihrer Punkte (u, v) eine Figur, so entspricht ihr auch eine Bildfigur in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene in der Umgebung des Punktes ($\mathfrak{x} = u$, $\mathfrak{y} = v$.) Man sagt nun, daß die Abbildung konform sei, wenn die erste Figur danach strebt, der zweiten ähnlich zu werden, sobald die erste Figur unendlich klein wird, also nach der Stelle (u, v) strebt, und zwar wird dies überall auf der Fläche verlangt. Man drückt dies kürzer aus, indem man sagt: Die Fläche (1) ist auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene konform abgebildet, wenn das Abgebildete der Abbildung in den kleinsten Teilen ähnlich wird.[1]

[1] Die älteste konforme Abbildung ist die der Kugel. Mit ihr beschäftigen wir uns in § 11, wo man noch einige geschichtliche Nachweise findet. Lagrange behandelte die konforme Abbildung von Rotationsflächen in der Abhandlung: „Sur la construction des cartes géographiques“, Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, année 1779, Berlin 1781, auch Oeuvres, 4. Bd., übersetzt von Wangerin in Ostwalds Klassikern Nr. 55. Schließlich gab Gauss die „Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird“, Preisschrift, Astron. Nachr. v. Schumacher 3. Heft 1825, siehe auch Werke 4. Bd. sowie den oben genannten Band von Ostwalds Klassikern. Der Name konform wurde von Gauss erst in seinen „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, 1. Abh.“, Abh. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 2. Bd. Göttingen 1844, eingeführt. Siehe auch Werke 4. Bd.

Unsere Aufgabe ist zunächst, die Definition der konformen Abbildung analytisch auszudrücken. Wir betrachten einen beliebigen Punkt (u, v) auf der Fläche und sein Bild $(\mathfrak{x} = u,\ \mathfrak{y} = v)$ in der Ebene. Eine Figur, bestehend aus Punkten in der Umgebung der Stelle (u, v) der Fläche, hat ein Bild, bestehend aus Punkten in der Umgebung der Stelle $(\mathfrak{x} = u,\ \mathfrak{y} = v)$ der Ebene. Wenn wir in dieser Ebene vom Punkte $(\mathfrak{x} = u,\ \mathfrak{y} = v)$ aus die geradlinigen Strahlen nach den verschiedenen Bildpunkten ziehen, werden ihnen krummlinige Strahlen auf der Fläche vom Punkte (u, v) aus nach den verschiedenen Punkten der Figur entsprechen, siehe Fig. 29. Zu fordern ist nun, daß diese Strahlenfigur auf der Fläche der Strahlenfigur in der Ebene beim Grenzübergange ähnlich werde. Dies ist der Fall, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind: **Erstens** müssen die **Längen** aller vom Flächenpunkte (u, v) auslaufenden Strahlen dieselben Vielfachen der Längen aller entsprechenden vom Bildpunkte $(\mathfrak{x} = u,\ \mathfrak{y} = v)$ auslaufenden Strahlen in der Ebene werden, und **zweitens** muß der **Winkel**, den zwei beliebige der vom Flächenpunkte (u, v) auslaufenden Strahlen dort miteinander bilden, gleich dem entsprechenden Winkel in der Bildebene werden, — dies alles natürlich beim Grenzübergange, d. h. falls die Punkte der Figur auf der Fläche nach dem Punkte (u, v) streben.

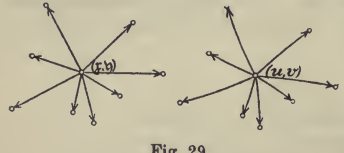


Fig. 29.

Die **erste Bedingung** ist leicht analytisch wiederzugeben: Ist $(u + \Delta u,\ v + \Delta v)$ irgend ein dem Punkte (u, v) benachbarter Punkt auf der Fläche, so wird das Quadrat der Strahlenlänge vom Punkte (u, v) nach dieser Stelle für $\lim \Delta u = 0$, $\lim \Delta v = 0$ nach dem Bogenelement-Quadrat

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv^2 + G\,dv^2$$

der Fläche (1) streben. Den Punkten (u, v) und $(u + \Delta u,\ v + \Delta v)$ entsprechen in der Bildebene die Punkte mit den rechtwinkligen Koordinaten u, v und $u + \Delta u,\ v + \Delta v$. Hier also wird das Quadrat der Länge des Strahles vom ersten bis zum zweiten Punkte für $\lim \Delta u = 0$, $\lim \Delta v = 0$ gleich

$$d\mathfrak{s}^2 = du^2 + dv^2.$$

Demnach besagt die erste Bedingung: Das **Verhältnis**

$$\frac{ds^2}{d\mathfrak{s}^2} = \frac{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}{du^2 + dv^2}$$

soll **für alle vom Punkte** (u, v) **ausgehende Fortschreitungsrichtungen** (k) **oder** $(dv : du)$ **dasselbe sein**, d. h. der Bruch

$$\frac{ds^2}{d\mathfrak{s}^2} = \frac{E + 2Fk + Gk^2}{1 + k^2}$$

soll von k unabhängig sein. Dies aber ist dann und nur dann der Fall, wenn

(2) $$E = G \quad \text{und} \quad F = 0$$

ist. Während der Bruch $ds^2 : d\mathfrak{s}^2$ bei einer beliebigen punktweisen Abbildung der Fläche auf die Ebene nicht nur von E, F, G, also von u und v, sondern auch von $k = dv : du$ abhängig ist, wird er im Falle einer konformen Abbildung gleich

(3) $$\frac{ds^2}{d\mathfrak{s}^2} = E = G,$$

also eine Funktion von u und v allein. Da u und v einen Punkt der Fläche bestimmen, sagen wir auch so: Während im allgemeinen bei einer Abbildung der Fläche auf die Ebene das Verhältnis $ds^2 : d\mathfrak{s}^2$ entsprechender Bogenelement-Quadrate auf der Fläche und in der Ebene eine Funktion des Ortes (u, v) und der Fortschreitungsrichtung (k) ist, wird es nur im Falle einer konformen Abbildung eine Funktion des Ortes (u, v) allein.

Wir wenden uns zur zweiten Bedingung. Sie betrifft die Winkel der Strahlen. Demnach betrachten wir jetzt zwei dem Punkte (u, v) benachbarte Punkte auf der Fläche. Da sie nach dem Punkte (u, v) streben sollen, bezeichnen wir sie zweckmäßig sogleich mit $(u + du, v + dv)$ und $(u + \delta u, v + \delta v)$, indem wir unter δu und δv gerade so wie unter du und dv Differentiale verstehen. Für den Winkel α, den die Fortschreitungsrichtungen $(k = dv : du)$ und $(\varkappa = \delta v : \delta u)$ miteinander bilden, besteht nach (21), S. 39, die Formel:

(4) $$\cos\alpha = \frac{E + F(k + \varkappa) + Gk\varkappa}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}\,\sqrt{E + 2F\varkappa + G\varkappa^2}}.$$

In der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten u, v gilt entsprechend für den Bildwinkel $\mathfrak{a}$ die Formel:

(5) $$\cos\mathfrak{a} = \frac{1 + k\varkappa}{\sqrt{1 + k^2}\,\sqrt{1 + \varkappa^2}}.$$

Man kommt zu ihr ausgehend von der Erwägung, daß $k = dv : du$ und $\varkappa = \delta v : \delta u$ in der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten u und v die Tangens der Winkel der Fortschreitungsrichtungen mit der $\mathfrak{x}$-Achse sind. Noch bequemer kommt man aber zu ihr, wenn man die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene auch als Fläche betrachtet, auf der wegen $d\mathfrak{s}^2 = du^2 + dv^2$ die Fundamentalgrößen E, F, G gleich $1, 0, 1$ sind, so daß sich der Wert (5) aus der allgemeinen Formel (4) durch die besonderen Annahmen $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$ ergibt. Die zweite Bedingung ist nun diese:

Stets soll $\alpha = \mathfrak{a}$ sein. Vorläufig ersetzen wir sie durch die nicht so enge Forderung, daß stets $\cos \alpha$ gleich $\pm \cos \mathfrak{a}$ sein soll. Hier fügen wir beide Vorzeichen hinzu, weil die Quadratwurzeln in (4) und (5) zweiwertig sind. Nun gab die erste Bedingung nach (2) schon $E = G$ und $F = 0$. Setzen wir diese Werte in (4) ein, so geht die rechte Seite von (4) in die von (5) über, abgesehen vom Vorzeichen wegen der Zweiwertigkeit der Wurzeln. Also schon infolge der ersten Bedingung wird stets $\cos \alpha = \pm \cos \mathfrak{a}$, d. h. $\alpha = \pm \mathfrak{a}$ oder $\alpha = \pm (\pi - \mathfrak{a})$. Aber der zweite Fall $\alpha = \pm (\pi - \mathfrak{a})$ ist ausgeschlossen. Denn wenn man insbesondere die Richtung $(\varkappa)$ mit der Richtung (k) zusammenfallen läßt, wird sowohl α als auch $\mathfrak{a}$ gleich Null, was mit der Gleichung $\alpha = \pm (\pi - \mathfrak{a})$ unvereinbar ist. Demnach zieht schon die erste Bedingung allein die Folgerung $\alpha = \pm \mathfrak{a}$ nach sich. Da wir bei der konformen Abbildung sowohl gleichsinnige als ungleichsinnige Ähnlichkeit in entsprechenden unendlich kleinen Figuren zulassen, spielt das doppelte Vorzeichen keine Rolle. Es ist nur zu bemerken: Ist die Ähnlichkeit an einer Stelle (u, v) und ihrem Bilde in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene bei bestimmter Orientierung gleichsinnig (oder ungleichsinnig), so gilt dasselbe wegen der Stetigkeit in der Umgebung, also überhaupt in einem gewissen Bereiche, auf den wir uns beschränken.

Hiernach gilt der

Satz 36: Damit eine Abbildung einer Fläche konform sei, ist notwendig, aber auch hinreichend, daß das Verhältnis zwischen einander entsprechenden Bogenelement-Quadraten ds^2 und $d\mathfrak{s}^2$ auf der Fläche und im Bilde eine Funktion des Ortes allein, also unabhängig von der Fortschreitungsrichtung wird.[1]

Dies Verhältnis hat nach (3) den Wert:

$$\frac{ds^2}{d\mathfrak{s}^2} = E = G,$$

worin $E = G$ eine Funktion von u und v ist. Die Quadratwurzel hieraus gibt den Maßstab an, nach dem eine unendlich kleine Figur auf der Fläche der entsprechenden Figur in der Bildebene ähnlich ist, und zwar den linearen Maßstab, nämlich das Verhältnis der Längen entsprechender unendlich kleiner Strecken der Fläche und der Ebene. Dieser Ähnlichkeitsmaßstab wird aber, weil er von u und v abhängt, im allgemeinen von Punkt zu Punkt

[1] Lagrange beschränkte sich in seiner auf S. 81 genannten Abhandlung auf die erste Bedingung allein. Erst Gauss zeigte, daß die zweite Bedingung infolge der ersten erfüllt ist.

ein anderer. Einer Kurve auf der Fläche entspricht bei der Abbildung eine Kurve in der Ebene. Das Verhältnis der Längen entsprechender Bogenelemente beider Kurven wird sich längs der Kurven stetig ändern. Deshalb wird auch die Gesamtlänge der Flächenkurve nicht in einem konstanten Verhältnisse zur Gesamtlänge der Bildkurve stehen. Dies tritt nur dann ein, wenn $E = G$ konstant ist. Alsdann kann man durch ähnliche Vergrößerung oder Verkleinerung der Ebene leicht erreichen, daß entsprechende Kurven auf der Fläche und in der Ebene überall gleiche Längen haben. Wir wissen, daß eine derartige längentreue Abbildung nur bei den abwickelbaren Flächen möglich ist, vgl. Satz 16, I S. 390.

Von den beiden oben nacheinander behandelten Bedingungen kann die zweite als die der Winkeltreue bezeichnet werden. Es ergab sich, daß sie infolge der ersten Bedingung erfüllt ist. Aber auch das Umgekehrte ist richtig: Soll nämlich Winkeltreue herrschen, so muß stets $\cos^2\alpha = \cos^2\mathfrak{a}$ sein; dies gibt nach (4) und (5):

$$[E + F(k + \varkappa) + G k\varkappa]^2(1 + k^2)(1 + \varkappa^2) -$$
$$- (E + 2Fk + G k^2)(E + 2F\varkappa + G\varkappa^2)(1 + k\varkappa)^2 = 0.$$

Da diese Bedingung für alle Werte von k und $\varkappa$ gelten soll, gibt Ausmultiplizieren und Nullsetzen der Koeffizienten der Potenzen von k und $\varkappa$ die drei Forderungen:

$$F = 0, \qquad E(E - G) = 0, \qquad G(E - G) = 0.$$

Wäre $E \neq G$, so würde also $E = F = G = 0$ hervorgehen, was eben wegen $E \neq G$ nicht statthaft ist. Demnach folgt $E = G$ und $F = 0$ wie in (2). Folglich besteht der

Satz 37: Jede winkeltreue Abbildung einer Fläche ist überhaupt konform.

Aus diesem Grunde nennt man konforme Abbildungen auch winkeltreue Abbildungen.

Da ein Isothermennetz als Orthogonalnetz mit orthogonalem Diagonalnetze definiert werden kann (S. 70), folgt aus der Winkeltreue:

Satz 38: Bei einer konformen Abbildung einer Fläche bildet sich jedes Isothermennetz als Isothermennetz ab.

Da die Kurven $u =$ konst., $v =$ konst. in der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten $\mathfrak{x} = u$ und $\mathfrak{y} = v$ ein Isothermennetz bilden, folgt, daß auch die Parameterlinien (u) und (v) der Fläche (1) ein Isothermennetz bilden müssen, wenn die Abbildung konform ist.

Tatsächlich sagen die gefundenen Bedingungen (2) nach S. 71 sogar noch mehr aus: u und v müssen thermische Parameter auf der Fläche sein. Mithin:

Satz 39: Bildet man eine Fläche

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

dadurch auf die Ebene $z = 0$ ab, daß man dem Flächenpunkte (u, v) denjenigen Punkt der Ebene zuordnet, der die rechtwinkligen Koordinaten u und v hat, so ist die Abbildung dann und nur dann konform, wenn u und v thermische Parameter der Fläche sind.

Bedenken wir, daß wir auf der Fläche neue Parameter einführen können, so folgt hieraus:

Satz 40: Um eine Fläche in allgemeinster Weise konform auf die Ebene $z = 0$ abzubilden, bestimmt man in allgemeinster Weise thermische Parameter auf der Fläche und deutet sie als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene.

Wir können die Lösung der Aufgabe der konformen Abbildung ohne Mühe verallgemeinern: Es mögen zwei Flächen vorliegen. Die eine soll punktweise auf die andere so abgebildet werden, daß jeder unendlich kleine Teil der einen Fläche dem entsprechenden unendlich kleinen Teile der anderen Fläche ähnlich wird. Eine solche Abbildung heißt eine konforme Abbildung der einen Fläche auf die andere. Sie ist in folgender Weise herzustellen:

Da zwei Figuren, die einer dritten ähnlich sind, auch unter einander ähnlich sind, vermitteln wir zwischen beiden Flächen dadurch, daß wir beide konform auf eine und dieselbe Ebene abbilden. (Vgl. hierzu die entsprechenden Bemerkungen für flächentreue Abbildungen auf S. 55.) Jedem Punkte der ersten Fläche entspricht dann ein Punkt der Ebene, und diesem Punkte entspricht ein Punkt der zweiten Fläche, so daß die konforme punktweise Beziehung zwischen beiden Flächen hergestellt ist. So erhält man offenbar alle konformen Abbildungen. Es leuchtet ein, daß die Sätze 36 bis 38 auch für konforme Abbildungen einer Fläche auf eine Fläche gelten; daher ist in ihnen das Wort: Ebene unterdrückt worden. Aus Satz 40 folgt noch:

Satz 41: Um eine Fläche in allgemeinster Weise auf eine andere Fläche konform abzubilden, bestimmt man auf der einen ein thermisches Parameterpaar und auf der anderen das allgemeinste thermische Parameterpaar. Darauf setzt man die Parameterpaare einander gleich.

Es mögen zwei Flächen vorliegen; die eine habe die Gleichungen:

(6) $$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

und die andere die Gleichungen:

(7) $$\bar{x} = \bar{\varphi}(u, v), \qquad \bar{y} = \bar{\chi}(u, v), \qquad \bar{z} = \bar{\psi}(u, v).$$

Indem wir bei beiden Flächen die Parameter gleich bezeichnet haben, nämlich mit u und v, ist schon jedem Punkte (u, v) der einen Fläche ein Punkt der anderen gesetzmäßig zugeordnet. Fragen wir uns, unter welchen Bedingungen diese Abbildung konform ist. Es seien

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

$$d\bar{s}^2 = \bar{E}\,du^2 + 2\bar{F}\,du\,dv + \bar{G}\,dv^2$$

die Quadrate der Bogenelemente beider Flächen. Nach Satz 36 haben wir zu verlangen, daß das Verhältnis

$$\frac{ds^2}{d\bar{s}^2} = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{\bar{E}\,du^2 + 2\bar{F}\,du\,dv + \bar{G}\,dv^2} = \frac{E + 2Fk + Gk^2}{\bar{E} + 2\bar{F}k + \bar{G}k^2}$$

für alle Werte von $k = dv : du$ dasselbe sei. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn

(8) $$E : F : G = \bar{E} : \bar{F} : \bar{G}$$

ist. Also gilt der

Satz 42: Um zwei Flächen konform aufeinander abzubilden, hat man solche Parameter auf beiden Flächen einzuführen, in denen die Verhältnisse der Fundamentalgrößen erster Ordnung auf der einen Fläche gleich den Verhältnissen der Fundamentalgrößen erster Ordnung auf der anderen Fläche sind. Alsdann entsprechen diejenigen Punkte beider Flächen einander, die zu denselben Parameterwerten gehören.

Die Minimalkurven der einen Fläche sind diejenigen Kurven, längs deren $ds^2 = 0$ ist. Entsprechend sind die Minimalkurven der zweiten Fläche diejenigen, längs deren $d\bar{s}^2 = 0$ ist. Man sieht hieraus, daß infolge von (8) die Bilder der Minimalkurven der einen Fläche bei konformer Abbildung die der anderen Fläche sind.

Dies läßt sich umkehren. Fragen wir nämlich, unter welchen Umständen die Abbildung der Fläche (6) auf die Fläche (7) so beschaffen ist, daß jeder Minimalkurve der einen Fläche eine Minimalkurve der anderen entspricht. Das Bogenelement ds wird als das Bogenelement $d\bar{s}$ abgebildet. Die vom Punkte (u, v) einer Fläche ausgehende Richtung $(dv : du)$ ist die einer Minimalkurve, wenn für sie das Bogenelement gleich Null ist. Wir haben also zu fordern,

daß der Ausdruck für $d\bar{s}^2$ gleich Null wird, sobald $dv:du$ so gewählt wird, daß der Ausdruck für ds^2 gleich Null ist. Diese Forderung führt wieder auf die Bedingungen (8). Mithin gilt der

Satz 43: Die konformen Abbildungen einer Fläche auf eine andere Fläche können auch als diejenigen Abbildungen definiert werden, wobei den Minimalkurven der einen Fläche die Minimalkurven der anderen entsprechen.

Man kann sich die Aufgabe stellen: Auf zwei Flächen ist je ein Isothermensystem gegeben. Gesucht werden alle diejenigen konformen Abbildungen der einen Fläche auf die andere, bei denen das eine Isothermensystem gerade dem anderen entspricht.

Es seien u, v solche thermische Parameter der einen Fläche, die zu dem gegebenen Isothermensystem gehören, entsprechend $\bar{u}, \bar{v}$ solche der anderen Fläche. Die Quadrate der Bogenelemente haben dann nach Satz 31, S. 71, die Formen:

$$ds^2 = \Omega(u, v)(du^2 + dv^2), \qquad d\bar{s}^2 = \Theta(\bar{u}, \bar{v})(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2),$$

so daß

$$\frac{ds^2}{d\bar{s}^2} = \frac{\Omega(u, v)}{\Theta(\bar{u}, \bar{v})} \cdot \frac{du^2 + dv^2}{d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2}$$

ist. Um eine Abbildung zu gewinnen, müssen wir $\bar{u}$ und $\bar{v}$ als Funktionen von u und v definieren. Wenn die Kurven (u) des einen Isothermennetzes als die Kurven $(\bar{u})$ des anderen abgebildet werden sollen, muß $\bar{u} =$ konst. sein, wenn $u =$ konst. gesetzt wird. Also muß $\bar{u}$ eine Funktion von u allein sein, ebenso $\bar{v}$ eine Funktion von v allein:

$$\bar{u} = \lambda(u), \qquad \bar{v} = \mu(v),$$

so daß kommt:

$$\frac{ds^2}{d\bar{s}^2} = \frac{\Omega(u, v)}{\Theta(\lambda, \mu)} \cdot \frac{du^2 + dv^2}{\lambda'^2 du^2 + \mu'^2 dv^2} = \frac{\Omega(u, v)}{\Theta(\lambda, \mu)} \cdot \frac{1 + k^2}{\lambda'^2 + \mu'^2 k^2}.$$

Dies Verhältnis soll nun nach Satz 36 von k unabhängig sein, was dann und nur dann der Fall ist, wenn

$$\lambda'(u)^2 = \mu'(v)^2$$

und daher jede dieser beiden Größen, weil die eine nur von u, die andere nur von v abhängt, konstant ist. Demnach kommt (wie in (14) auf S. 72):

$$\bar{u} = \lambda(u) = \pm\, au + \text{konst.}, \qquad \bar{v} = \mu(v) = \pm\, av + \text{konst.} \quad (a = \text{konst.}).$$

Hätten wir verlangt, daß die Kurven (u) als die Kurven $(\bar{v})$ und die Kurven (v) als die Kurven $(\bar{u})$ abgebildet werden sollen, so haben wir nur u mit v zu vertauschen. Demnach haben wir den

Satz 44: Um alle diejenigen konformen Abbildungen einer Fläche auf eine andere Fläche zu erhalten, bei denen ein gegebenes Isothermensystem der einen Fläche als ein gegebenes Isothermensystem der anderen abgebildet wird, bestimmt man thermische Parameter u, v und $\bar{u}$, $\bar{v}$ der beiden Systeme und setzt entweder:

$$\bar{u} = \pm\, au + \text{konst.}, \qquad \bar{v} = \pm\, av + \text{konst.}$$

oder:

$$\bar{u} = \pm\, av + \text{konst.}, \qquad \bar{v} = \pm\, au + \text{konst.} \qquad (a = \text{konst.}).$$

Dabei können die Vorzeichen nach Belieben genommen werden.

Kehren wir schließlich zu den konformen Abbildungen einer Fläche auf die Ebene zurück. Wenn auf der Fläche u und v thermische Parameter sind, die zu einem bestimmten Isothermensystem gehören, und wenn die Fläche so auf die Ebene abgebildet werden soll, daß dies System in ein System von zwei zueinander senkrechten Geradenscharen übergehen soll, das ja das einfachste Isothermensystem in der Ebene ist, so haben wir zu bedenken, daß die gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ in der Ebene thermische Parameter eines Systems von dieser einfachen Art sind. Nach dem Satz 44 haben wir daher entweder:

$$\mathfrak{x} = \pm\, au + \text{konst.}, \qquad \mathfrak{y} = \pm\, av + \text{konst.}$$

oder:

$$\mathfrak{x} = \pm\, av + \text{konst.}, \qquad \mathfrak{y} = \pm\, au + \text{konst.} \qquad (a = \text{konst.})$$

zu setzen. Die additiven Konstanten sind unwesentlich, da sie durch Schiebung des Achsenkreuzes in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene entfernt werden können. Die Vertauschung von u mit v kommt auf die Vertauschung von $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y}$ hinaus, d. h. darauf, daß man die Ebene von der anderen Seite betrachtet. Alle jene Abbildungen sind also nichts wesentlich anderes als die eine:

$$\mathfrak{x} = \pm\, au, \qquad \mathfrak{y} = \pm\, av \qquad (a = \text{konst.}).$$

Sie unterscheidet sich von der besonderen:

$$\mathfrak{x} = u, \qquad \mathfrak{y} = v \tag{9}$$

nur dadurch, daß das ganze Bild ähnlich vergrößert wird. Daher folgt:

Satz 45: Alle diejenigen konformen Abbildungen einer Fläche auf die Ebene, bei denen ein bestimmtes Isothermensystem der Fläche in ein System zweier zueinander senk-

rechter Geradenscharen übergeht, sind miteinander in gleichem oder entgegengesetztem Sinne ähnlich.

Wir werden uns also auf die Annahme (9) beschränken dürfen.

§ 11. Konforme Abbildung der Kugel auf die Ebene.

In dem 1. Beispiel auf S. 72 ergaben sich thermische Parameter auf einer beliebigen Rotationsfläche. Nach (14), S. 72, können wir daher alle thermischen Parameterpaare für diese Fläche und mithin nach Satz 40, S. 86, alle konformen Abbildungen der Rotationsfläche auf die Ebene angeben.[1] Insbesondere gilt dies auch für die Kugel.

Wenn man jedoch den konformen Abbildungen noch besondere Bedingungen vorschreibt, treten neue Probleme auf, die durch diese allgemeinen Betrachtungen noch nicht erledigt sind. Wir wollen hier einige derartige Aufgaben über die konforme Abbildung der Kugel auf die Ebene lösen.

Zunächst können wir die allgemeinste konforme Abbildung der Kugel

$$(1) \qquad x = \cos u \cos v, \qquad y = \cos u \sin v, \qquad z = \sin u$$

auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene auf Grund des Satzes 43, S. 90, sehr einfach ausdrücken, indem wir auf der Kugel und in der Ebene die Minimalgeraden als Parameterlinien wählen. Zu diesem Zwecke stellen wir die Kugel nach (10), S. 78, mittels der Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ so dar:

$$(2) \qquad x = \frac{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}, \qquad y = -i\,\frac{\mathfrak{u} - \mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}, \qquad z = \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v} - 1}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}.$$

Alsdann sind die Parameterlinien ($\mathfrak{u}$) und ($\mathfrak{v}$) die Minimalgeraden der Kugel. In der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene sind die Linien

$$\mathfrak{x} \pm i\mathfrak{y} = \text{konst.}$$

die Minimalgeraden. Nach dem angeführten Satze erhalten wir die allgemeinste konforme Abbildung der Kugel auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene, wenn wir $\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$ gleich irgendwelchen Funktionen von je nur einem der beiden Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ setzen, wenn wir also entweder

$$(3) \qquad \mathfrak{x} + i\mathfrak{y} = U(\mathfrak{u}), \qquad \mathfrak{x} - i\mathfrak{y} = V(\mathfrak{v})$$

oder

$$(4) \qquad \mathfrak{x} - i\mathfrak{y} = U(\mathfrak{u}), \qquad \mathfrak{x} + i\mathfrak{y} = V(\mathfrak{v})$$

[1] Vgl. die Anmerkung auf S. 81.

setzen, wobei U eine beliebige Funktion von $\mathfrak{u}$ und V eine beliebige Funktion von $\mathfrak{v}$ bedeutet. Doch dürfen diese Funktionen keine Konstanten sein. Es muß also

$$(5) \qquad U' \neq 0, \qquad V' \neq 0$$

sein.

Jetzt wollen wir die Aufgabe lösen, alle diejenigen konformen Abbildungen der Kugel auf die Ebene zu bestimmen, bei denen sich jeder Kreis der Kugel wieder als Kreis darstellt.[1]

Dabei machen wir davon Gebrauch, daß ein Kreis auf der Kugel (2) dadurch bestimmt wird, daß man nach S. 78 eine beliebige bilineare Gleichung

$$(6) \qquad \mathfrak{A}\,\mathfrak{u}\mathfrak{v} + \mathfrak{B}\,\mathfrak{u} + \mathfrak{C}\,\mathfrak{v} + \mathfrak{D} = 0 \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} = \text{konst.})$$

zwischen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ herstellt, oder, was dasselbe ist, dadurch, daß man $\mathfrak{v}$ gleich einer linear gebrochenen Funktion von $\mathfrak{u}$ setzt:

$$(7) \qquad \mathfrak{v} = \frac{\text{konst.}\,\mathfrak{u} + \text{konst.}}{\text{konst.}\,\mathfrak{u} + \text{konst.}}.$$

In der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene gilt dasselbe, wenn man anstatt $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ die Größen $\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$ benutzt. Unsere Aufgabe kann daher analytisch so ausgesprochen werden:

Man soll $U(\mathfrak{u})$ und $V(\mathfrak{v})$ in allgemeinster Weise so bestimmen, daß jede bilineare Gleichung zwischen $\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$ infolge von (3) oder (4) mit einer bilinearen Gleichung zwischen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ identisch ist. Oder: So, daß jede Gleichung von der Form

$$(8) \qquad V = \frac{\text{konst.}\,U + \text{konst.}}{\text{konst.}\,U + \text{konst.}},$$

in der links nur $\mathfrak{v}$ und rechts nur $\mathfrak{u}$ auftritt, mit einer Gleichung von der Form (7) oder — was dasselbe ist — von der Form (6) identisch ist.

Um dies Problem zu lösen, leiten wir zunächst einen Hilfssatz ab: Ist $\mathfrak{v}$ eine linear gebrochene Funktion von $\mathfrak{u}$, d. h. besteht eine Gleichung von der Form (6), so gibt sie, dreimal vollständig nach $\mathfrak{u}$ differenziert, drei Gleichungen für die Differentialquotienten $\mathfrak{v}', \mathfrak{v}'', \mathfrak{v}'''$ von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$, nämlich:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{v} + \mathfrak{u}\mathfrak{v}') + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}\,\mathfrak{v}' = 0,$$
$$\mathfrak{A}(2\mathfrak{v}' + \mathfrak{u}\mathfrak{v}'') + \mathfrak{C}\,\mathfrak{v}'' = 0,$$
$$\mathfrak{A}(3\mathfrak{v}'' + \mathfrak{u}\mathfrak{v}''') + \mathfrak{C}\,\mathfrak{v}''' = 0.$$

[1] Nebenbei sei erwähnt, daß man beweisen kann, daß eine Abbildung der Kugel auf die Ebene, bei der alle Kreise wieder als Kreise erscheinen, überhaupt stets konform ist.

Sie sind linear und homogen in $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, und aus ihnen folgt daher das Verschwinden der Determinante hinsichtlich $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$. So kommt man zu der Gleichung:

$$3\mathfrak{v}''^2 - 2\mathfrak{v}'\mathfrak{v}''' = 0. \tag{9}$$

Umgekehrt: Ist $\mathfrak{v}$ eine Funktion von $\mathfrak{u}$, deren Differentialquotienten diese Bedingung erfüllen, so ist

$$3\frac{\mathfrak{v}''}{\mathfrak{v}'} - 2\frac{\mathfrak{v}'''}{\mathfrak{v}''} = 0$$

oder integriert:

$$3\log\mathfrak{v}' - 2\log\mathfrak{v}'' = \text{konst.},$$

also:

$$\frac{\mathfrak{v}''}{\sqrt{\mathfrak{v}'^3}} = \text{konst.}$$

oder integriert:

$$-\frac{2}{\sqrt{\mathfrak{v}'}} = \text{konst.}\,\mathfrak{u} + \text{konst.},$$

mithin auch:

$$\mathfrak{v}' = \frac{1}{(\text{konst.}\,\mathfrak{u} + \text{konst.})^2},$$

woraus durch nochmalige Integration folgt, daß $\mathfrak{v}$ die Form (7) hat. Wir haben also den Hülfssatz gefunden:

Satz 46: Eine Veränderliche $\mathfrak{v}$ ist dann und nur dann eine linear gebrochene Funktion einer Veränderlichen $\mathfrak{u}$, wenn zwischen den Ableitungen $\mathfrak{v}', \mathfrak{v}'', \mathfrak{v}'''$ von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ die Gleichung

$$3\mathfrak{v}''^2 - 2\mathfrak{v}'\mathfrak{v}''' = 0$$

besteht.

Nach dem Vorhergehenden kommt es daher darauf an, U und V so als Funktionen von $\mathfrak{u}$ bzw. $\mathfrak{v}$ allein zu bestimmen, daß jede bilineare Gleichung

$$AUV + BU + CV + D = 0 \qquad (A, B, C, D = \text{konst.})$$

eine solche Funktion $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{u}$ definiert, deren Differentialquotienten $\mathfrak{v}', \mathfrak{v}'', \mathfrak{v}'''$ die Bedingung (9) erfüllen. Nun erhält man $\mathfrak{v}', \mathfrak{v}'', \mathfrak{v}'''$ aus den Gleichungen, die aus der vorstehenden durch dreimalige vollständige Differentiation nach $\mathfrak{u}$ hervorgehen. Diese Gleichungen sind linear und homogen in A, B, C, und es muß daher ihre Determinante hinsichtlich A, B, C gleich Null sein. Die so hervorgehende Formel

$$\begin{vmatrix} \frac{d\,U\,V}{d\,\mathfrak{u}} & \frac{d\,U}{d\,\mathfrak{u}} & \frac{d\,V}{d\,\mathfrak{u}} \\ \frac{d^2\,U\,V}{d\,\mathfrak{u}^2} & \frac{d^2\,U}{d\,\mathfrak{u}^2} & \frac{d^2\,V}{d\,\mathfrak{u}^2} \\ \frac{d^3\,U\,V}{d\,\mathfrak{u}^3} & \frac{d^3\,U}{d\,\mathfrak{u}^3} & \frac{d^3\,V}{d\,\mathfrak{u}^3} \end{vmatrix} = 0$$

ist alsdann die einzige zwischen $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{v}''$, $\mathfrak{v}'''$ bestehende Relation, die bei allen beliebigen Annahmen der Konstanten A, B, C, D gilt. Wir haben zu fordern, daß sie die Form (9) hat. Ausführlich geschrieben lautet die Formel aber so:

$$\begin{vmatrix} U'\,V + U\,V'\,\mathfrak{v}' & U' & V'\,\mathfrak{v}' \\ U''\,V + 2\,U'\,V'\,\mathfrak{v}' + U\,V''\,\mathfrak{v}'^2 + UV'\,\mathfrak{v}'' & U'' & V''\,\mathfrak{v}'^2 + V'\,\mathfrak{v}'' \\ \begin{matrix} U'''V + 3\,U''V'\,\mathfrak{v}' + 3\,U'V''\,\mathfrak{v}'^2 + UV'''\,\mathfrak{v}'^3 + \\ + 3\,U'\,V'\,\mathfrak{v}'' + 3\,UV''\,\mathfrak{v}'\,\mathfrak{v}'' + UV'\,\mathfrak{v}''' \end{matrix} & U''' & \begin{matrix} V'''\,\mathfrak{v}'^3 + 3\,V''\,\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'' + \\ + V'\,\mathfrak{v}''' \end{matrix} \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn man von der ersten Reihe die mit V multiplizierte zweite und die mit U multiplizierte dritte Reihe abzieht, vereinfacht sich die Determinante bedeutend. Ihre Ausrechnung ergibt alsdann die Gleichung

$$U'^2(3\,V''^2 - 2\,V'\,V''')\,\mathfrak{v}'^4 - V'^2(3\,U''^2 - 2\,U'\,U''')\,\mathfrak{v}'^2 + \\ + U'^2\,V'^2(3\,\mathfrak{v}''^2 - 2\,\mathfrak{v}'\,\mathfrak{v}''') = 0$$

zwischen $\mathfrak{v}', \mathfrak{v}'', \mathfrak{v}'''$. Da sie die Form (9) haben soll, folgt mit Rücksicht auf (5), daß

$$3\,U''^2 - 2\,U'\,U''' = 0, \qquad 3\,V''^2 - 2\,V'\,V''' = 0$$

sein muß. Dies aber sagt nach Satz 46 aus, daß U eine linear gebrochene Funktion von $\mathfrak{u}$ und V eine linear gebrochene Funktion von $\mathfrak{v}$ sein muß. Gehen wir jetzt auf (3) und (4) zurück, so kommt:

Satz 47: Alle diejenigen konformen Abbildungen der Kugel

$$x = \frac{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}, \quad y = -i\frac{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}, \quad z = \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v} - 1}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}$$

auf die Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, bei denen sich jeder Kreis als Kreis abbildet, ergeben sich, wenn man $\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$ gleich beliebigen linear gebrochenen Funktionen von je einem der beiden Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ setzt.

Setzen wir demnach

$$(10) \qquad \mathfrak{x} + i\mathfrak{y} = \frac{a_1\,\mathfrak{u} + b_1}{c_1\,\mathfrak{u} + d_1}, \quad \mathfrak{x} - i\mathfrak{y} = \frac{a_2\,\mathfrak{v} + b_2}{c_2\,\mathfrak{v} + d_2},$$

so ist nach (6) der Kreis

$$(11)\qquad \mathfrak{A}(\mathfrak{x}+i\mathfrak{y})(\mathfrak{x}-i\mathfrak{y})+\mathfrak{B}(\mathfrak{x}+i\mathfrak{y})+\mathfrak{C}(\mathfrak{x}-i\mathfrak{y})+\mathfrak{D}=0$$

in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene das Bild des Kreises

$$(12)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}(a_1\mathfrak{u}+b_1)(a_2\mathfrak{v}+b_2)+\mathfrak{B}(a_1\mathfrak{u}+b_1)(c_2\mathfrak{v}+d_2)+ \\ +\,\mathfrak{C}(c_1\mathfrak{u}+d_1)(a_2\mathfrak{v}+b_2)+\mathfrak{D}(c_1\mathfrak{u}+d_1)(c_2\mathfrak{v}+d_2)=0 \end{cases}$$

auf der Kugel. Insbesondere werden sich gewisse Kreise der Kugel als die Geraden der Ebene darstellen. Da diese Geraden aus (11) bei der Annahme $\mathfrak{A}=0$ hervorgehen, haben jene Kreise der Kugel nach (12) Gleichungen von der Form:

$$\mathfrak{B}(a_1\mathfrak{u}+b_1)(c_2\mathfrak{v}+d_2)+\mathfrak{C}(c_1\mathfrak{u}+d_1)(a_2\mathfrak{v}+b_2)+ \\ +\,\mathfrak{D}(c_1\mathfrak{u}+d_1)(c_2\mathfrak{v}+d_2)=0.$$

Wie auch die Konstanten $\mathfrak{B},\mathfrak{C},\mathfrak{D}$ gewählt sein mögen, stets wird diese Gleichung insbesondere durch die Parameterwerte $\mathfrak{u}=-d_1:c_1$ und $\mathfrak{v}=-d_2:c_2$ befriedigt. Mithin handelt es sich um alle diejenigen Kreise auf der Kugel, die durch den Punkt A mit diesen beiden Parameterwerten gehen. Die zweifach unendliche Schar aller derjenigen Kreise der Kugel also, die durch einen gewissen gemeinsamen Punkt A gehen, werden als die zweifach unendliche Schar aller Geraden in der Ebene abgebildet. Die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z von A würden sich aus (2) durch Einsetzen der Werte $-d_1:c_1$ und $-d_2:c_2$ für $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ ergeben.

Die Gerade vom Anfangspunkte nach A ist keine Minimalgerade, weil für diesen Punkt $x^2+y^2+z^2$ nicht gleich Null ist. Demnach hätten wir sie von vornherein als die z-Achse wählen können und den gemeinsamen Punkt A insbesondere als den Punkt $z=1$ auf der z-Achse, den sogenannten Nordpol der Kugel. Für A ist dann aber $x=y=0$ und $z=1$, so daß für ihn die Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ nach (2) unendlich groß werden. Deshalb müssen wir jetzt, da $\mathfrak{u}=-d_1:c_1$ und $\mathfrak{v}=-d_2:c_2$ ist, die Konstanten c_1 und c_2 gleich Null wählen. Wir haben also durch eine geeignete Drehung des Achsenkreuzes, ohne die betrachtete Abbildung der Kugel dadurch zu spezialisieren, erreicht, daß die Gleichungen der Abbildung statt (10) die einfachere Form

$$\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}=a_1\mathfrak{u}+b_1,\qquad \mathfrak{x}-i\mathfrak{y}=a_2\mathfrak{v}+b_2$$

annehmen. Durch Verschieben des Achsenkreuzes in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene können wir überdies erreichen, daß b_1 und b_2 gleich Null werden. Nun bleibt:

$$\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}=a_1\mathfrak{u},\qquad \mathfrak{x}-i\mathfrak{y}=a_2\mathfrak{v}.$$

Der Längenkreis in der xz-Ebene, für den die Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ einander gleich werden, bildet sich hiernach als die Gerade

$$\frac{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}}{a_1} = \frac{\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}}{a_2}$$

durch den Anfangspunkt der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene ab. Dies ist keine Minimalgerade, da sonst $a_1 = 0$ oder $a_2 = 0$ sein müßte, was offenbar auszuschließen ist. Deshalb können wir diese Gerade als $\mathfrak{x}$-Achse wählen, d. h. wir dürfen $a_1 = a_2$ annehmen. Nun sind die Gleichungen der Abbildung:

$$\mathfrak{x} + i\mathfrak{y} = a_1 \mathfrak{u}, \qquad \mathfrak{x} - i\mathfrak{y} = a_1 \mathfrak{v}$$

oder:

$$\mathfrak{x} = \tfrac{1}{2} a_1 (\mathfrak{u} + \mathfrak{v}), \qquad \mathfrak{y} = -\tfrac{1}{2} i a_1 (\mathfrak{u} - \mathfrak{v}).$$

Indem wir die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene ähnlich vergrößern oder verkleinern, was ja bei konformer Abbildung statthaft ist, erreichen wir insbesondere die Annahme $a_1 = 1$. Also haben wir:

$$(13) \qquad \mathfrak{x} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}), \qquad \mathfrak{y} = -\tfrac{1}{2} i (\mathfrak{u} - \mathfrak{v}).$$

Nach (2) bestehen daher zwischen den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines Punktes der Kugel und den rechtwinkligen Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ seines Bildpunktes die Beziehungen:

$$(14) \qquad x = \frac{2\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + 1}, \quad y = \frac{2\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + 1}, \quad z = \frac{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - 1}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + 1}.$$

Wenn wir jetzt die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene direkt mit der xy-Ebene zur Deckung bringen, und zwar auch hinsichtlich der Achsen, so läßt sich diese Beziehung geometrisch herstellen. Da nämlich nach (14)

$$x : y : (z - 1) = \mathfrak{x} : \mathfrak{y} : -1$$

ist, liegen die drei Punkte (x, y, z), $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 0)$ und $(0, 0, 1)$ auf einer Geraden. Der dritte Punkt $(0, 0, 1)$ ist der oben erwähnte Nordpol A. (Siehe Fig. 30.) Wenn man also vom Nordpol aus die Gerade durch einen Punkt (x, y, z) der Kugel zieht, schneidet sie die Äquatorebene $z = 0$ in dem zugehörigen Bildpunkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 0)$. Anders ausgesprochen: Die Abbildung wird dadurch gewonnen, daß man die Kugel vom Nordpole — als Projektionszentrum — perspektiv auf die Äquatorebene projiziert. Wird die Äquatorebene durch eine zu ihr parallele Ebene ersetzt, so wird das Bild nur ähnlich vergrößert.

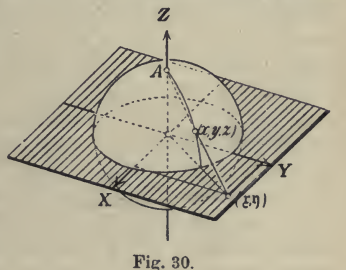


Fig. 30.

Außerdem muß man sich daran erinnern, daß wir zur Vereinfachung der Formeln einen bei der Abbildung ausgezeichneten Punkt als Nordpol wählten. An die Stelle des Nordpols kann also irgend ein Punkt der Kugel treten, die Bildebene ist alsdann eine zu seinem Durchmesser senkrechte Ebene. Ferner merken wir noch an, daß die durch (4) vermittelten Abbildungen aus den durch (3) vermittelten dadurch hervorgehen, daß man die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene von der anderen Seite betrachtet. Daher können wir das Ergebnis allgemein so aussprechen:

Satz 48: Die allgemeinste konforme Abbildung der Kugel auf eine Ebene, bei der sich insbesondere alle Kreise wieder als Kreise darstellen, erhält man, wenn man die Kugel von einem ihrer Punkte aus perspektiv auf eine zum Durchmesser dieses Punktes senkrechte Ebene projiziert.

Die perspektive Projektion der Kugel von einem Punkte der Kugel aus auf eine zu seinem Durchmesser senkrechte Ebene heißt die stereographische Projektion der Kugel.[1] Also:

Satz 49: Die stereographischen Projektionen der Kugel sind die einzigen konformen Abbildungen der Kugel auf die Ebene, bei denen jeder Kreis wieder als Kreis erscheint.

Wir wollen jetzt überhaupt nach allen denjenigen perspektiven Bildern der Kugel fragen, die konform sind.

Wird die Bildebene durch eine parallele Ebene ersetzt, so wird das perspektive Bild nur ähnlich vergrößert. Wir dürfen also annehmen, daß die Bildebene durch die Mitte der Kugel gehe, da diese Mitte selbst sicher nicht das Projektionszentrum ist, wie man sofort einsieht. Sie werde alsdann als $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene, die Kugelmitte als Anfangspunkt gewählt. Das Projektionszentrum habe die Koordinaten a, b, c, Nun soll der Bildpunkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 0)$ des Kugelpunktes (x, y, z) auf der Geraden durch das Projektionszentrum (a, b, c) und den Punkt (x, y, z) liegen. Also ist zu fordern:

[1] Daß bei der stereographischen Projektion die Winkel in wahrer Größe und die Kreise als Kreise erscheinen, ist leicht elementargeometrisch einzusehen. Diese Projektion soll denn auch schon von Hipparch (um 160 v. Chr.) erfunden worden sein. Ihre Bezeichnung rührt her von D'Aiguillon, „Optica", 1613. Die umständliche Ableitung dieser Abbildung, wie wir sie oben gegeben haben, hat den Zweck, den nicht so elementaren Satz zu beweisen, daß es außer der stereographischen Projektion keine konforme Abbildung gibt, bei der die Kreise wieder als Kreise erscheinen. Dieser Satz ist implizite in der oben (S. 81, Anm.) genannten Arbeit von Lagrange enthalten. Schon Lambert und Euler hatten sich vor Lagrange in ihren auf S. 57, 58 erwähnten Abhandlungen auch mit konformen Abbildungen der Kugel beschäftigt.

$$\frac{\mathfrak{x} - a}{x - a} = \frac{\mathfrak{y} - b}{y - b} = \frac{-c}{z - c},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\mathfrak{x} \pm i\mathfrak{y} = \frac{(a \pm ib)z - c(x \pm iy)}{z - c}.$$

Da nun bei jeder konformen Abbildung Gleichungen von der Form (3) oder (4) bestehen, muß also mit Rücksicht auf (2) jede der beiden Größen

$$\frac{(a + ib)(\mathfrak{u}\mathfrak{v} - 1) - 2c\mathfrak{u}}{(1 - c)\mathfrak{u}\mathfrak{v} - (1 + c)}, \quad \frac{(a - ib)(\mathfrak{u}\mathfrak{v} - 1) - 2c\mathfrak{v}}{(1 - c)\mathfrak{u}\mathfrak{v} - (1 + c)}$$

von nur je einem der beiden Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ abhängen. Es muß also entweder

$$a = b = 0, \quad c = 1 \quad \text{oder} \quad a = b = 0, \quad c = -1$$

sein, d. h. das Projektionszentrum ist einer der Schnittpunkte der z-Achse mit der Kugel. Wir kommen daher wieder zur stereographischen Projektion zurück. Daher gilt der

Satz 50: Die konformen perspektiven Bilder der Kugel ergeben sich sämtlich durch die stereographische Projektion.

Bei der stereographischen Projektion wird die ganze Kugel auf die unbegrenzte Ebene abgebildet. Die Halbkugel, die dem Zentrum A der Projektion gegenüberliegt, erfährt weniger starke Verzerrungen als die andere. Zu kartographischen Zwecken bedient man sich daher meistens der stereographischen Projektion nur für diese Halbkugel. So ist auch in Fig. 31, S. 98, die stereographische Projektion einer Halbkugel vom Südpol aus und in Fig. 32 von einem Punkte des Äquators aus dargestellt.[1] Die Bildseite ist dabei diejenige Seite der jedesmal senkrecht zum Durchmesser des Projektionszentrums gelegten Ebene, auf der dies Zentrum nicht liegt. Die Breitenkreise und Meridiane, die nach S. 72 ein Isothermensystem bilden, müssen sich auch in der Ebene als Isothermensysteme von Kreisen darstellen. Diese Systeme von Fig. 31 und 32 wurden im ersten Bande in Fig. 54, S. 174, und Fig. 56, S. 180, angegeben. Bei der stereographischen Projektion von irgend einem Punkte der

[1] Diese Figuren, sowie Fig. 33 und 34 sind in solcher Größe entworfen worden, daß jedesmal die Kartenmitte mit den früheren flächentreuen Karten (Fig. 20—26, S. 59—67) in der Flächengröße übereinstimmt.

Kugel aus tritt ebenfalls das in dieser letzten Figur dargestellte Isothermensystem auf, während die in Fig. 55, I S. 177, und Fig. 57, I S. 180, angegebenen Isothermensysteme hier nicht vorkommen.

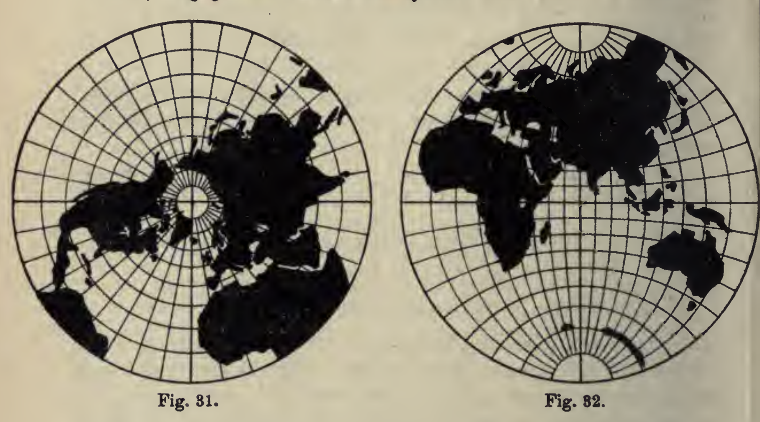


Fig. 31. Fig. 32.

Wir wollen jetzt die Aufgabe[1] lösen, alle diejenigen konformen Abbildungen der Kugel auf die Ebene zu bestimmen, bei denen die Längenkreise und Breitenkreise wieder als Kreise abgebildet werden, während wir es dahingestellt sein lassen, wie sich die übrigen Kreise der Kugel im Bilde zeigen.

Nach Satz 75, I S. 179, werden sich die Längenkreise und Breitenkreise, da sie ein Isothermensystem bestimmen, in der Bildebene, der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene, als Kreise darstellen, deren Gleichungen auf die Formen gebracht werden können:

$$(15) \qquad \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - 2p\mathfrak{x} = n^2, \quad \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - 2q\mathfrak{y} = -n^2.$$

Dabei ist n eine bestimmte positive Konstante, während p und q willkürliche Konstanten bedeuten. Die Kreise der ersten Schar haben die reellen Punkte $\mathfrak{y} = \pm n$ der $\mathfrak{y}$-Achse gemein, die der zweiten die imaginären Punkte $\mathfrak{x} = \pm in$ der $\mathfrak{x}$-Achse; p und q sind die Abszissen bzw. Ordinaten der auf der $\mathfrak{x}$-Achse bzw. $\mathfrak{y}$-Achse gelegenen Kreismitten. Wir fanden in den Formeln (18), I S. 179, daß

$$u' = \frac{1}{n} \operatorname{arc\,tg} \frac{p}{n}, \quad v' = \frac{1}{2n} \log \frac{q-n}{q+n}$$

[1] Diese Aufgabe wurde von Lagrange in seiner in der Anm. auf S. 81 erwähnten Abhandlung gestellt und gelöst.

thermische Parameter des Netzes (15) sind. Lösen wir diese Gleichungen nach p und q auf, so kommt:

$$(16)\qquad p = n\,\mathrm{tg}\,n u', \qquad q = -n\frac{e^{nv'}+e^{-nv'}}{e^{nv'}-e^{-nv'}}$$

Andererseits sind auf der Kugel

$$(17)\qquad x = \cos u \cos v\,, \qquad y = \cos u \sin v\,, \qquad z = \sin u$$

nach (19), S. 73,

$$(18)\qquad \bar{u} = \log \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\pi\right), \qquad \bar{v} = v$$

thermische Parameter des Netzes der Breitenkreise und Meridiane. Nach Satz 44, S. 89, erhalten wir daher die gewünschten Abbildungen, wenn wir entweder

$$u' = \pm a\bar{u} + \text{konst.}, \qquad v' = \pm a\bar{v} + \text{konst.}$$

oder

$$u' = \pm a\bar{v} + \text{konst.}, \qquad v' = \pm a\bar{u} + \text{konst.} \quad (a = \text{konst.})$$

setzen. Da eine Änderung des Vorzeichens von u' oder v' nach (16) nur auf eine Änderung des Vorzeichens von p oder q, d. h. auf eine Vertauschung einer Achsenrichtung mit der entgegengesetzten hinauskommt, und da das Bild nur ähnlich vergrößert wird, wenn p, q und n alle drei mit derselben Konstanten multipliziert werden, d. h. wenn die Größen u' und v' mit derselben Konstanten dividiert werden, dürfen wir uns auf die beiden Annahmen beschränken:

$$u' = -\bar{u} + \text{konst.}, \qquad v' = \bar{v} + \text{konst.}$$

und

$$u' = \bar{v} + \text{konst.}, \qquad v' = -\bar{u} + \text{konst.}$$

Bezeichnen wir die Konstanten mit α und β, so gibt (18) entweder:

$$u' = \alpha - \log \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\pi\right), \quad v' = v + \beta$$

oder:

$$u' = v + \beta, \qquad v' = \alpha - \log \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\pi\right),$$

so daß aus (16) entweder:

$$(19)\qquad \begin{cases} p = n\,\mathrm{tg}\left[n\alpha - n\log \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\pi\right)\right], \\ q = -n\dfrac{e^{n(v+\beta)} + e^{-n(v+\beta)}}{e^{n(v+\beta)} - e^{-n(v+\beta)}} \end{cases}$$

oder:

$$(20)\qquad \begin{cases} p = n\,\mathrm{tg}\,n(v+\beta), \\ q = -n\dfrac{e^{n\alpha - n\log\mathrm{tg}(\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\pi)} + e^{-n\alpha + n\log\mathrm{tg}(\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\pi)}}{e^{n\alpha - n\log\mathrm{tg}(\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\pi)} - e^{-n\alpha + n\log\mathrm{tg}(\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\pi)}} \end{cases}$$

folgt. Diese Gleichungen (19) bzw. (20) genügen zur Herstellung der Abbildungen, da sie zur gegebenen Breite u und Länge v die Mittelpunktskoordinaten p und q der Kreise (15) in der Bildebene liefern. Die Konstanten α, β, n sind dabei irgendwie, aber bestimmt zu wählen.

Bei der Abbildung (19) stellen sich die Breitenkreise (u) als die Kreise der ersten Schar (15) dar, also als Kreise durch zwei gemeinsame reelle Punkte, während die Bilder der Meridiane nicht — wie auf der Kugel — gemeinsame reelle Punkte haben. Für kartographische Zwecke benutzt man daher lieber die Abbildung (20), bei der die Bilder der Pole die beiden reellen Punkte ($\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = \pm n$) sind. Bei dieser Abbildung wird der Winkel v, den der Meridian (v) auf der Kugel im Nord- oder Südpol mit dem Nullmeridian einschließt, verzerrt. Denn die Bilder der Meridiane (v) sind die Kreise, die durch die erste Gleichung (15) definiert werden; der zu p gehörige Kreis aber hat im Punkte ($\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = n$) eine Tangente, deren Winkel ω mit der $\mathfrak{x}$-Achse durch

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{p}{n}$$

bestimmt wird. Hierfür kann nach der ersten Gleichung (20) geschrieben werden:

$$\omega = n(v + \beta) = nv + n\beta.$$

$n\beta$ ist bloß eine additive Konstante. Daher sieht man: Der Winkel, unter dem sich zwei Meridiane auf der Kugel im Nordpol schneiden, erscheint im Bilde in n-facher Größe. Die Abbildung ist deshalb für den Nordpol und ebenso für den Südpol nicht mehr winkeltreu, wenn n nicht etwa gerade gleich $+1$ oder -1 ist. In den Fällen $n = \pm 1$ aber geht die stereographische Projektion hervor.

Nehmen wir etwa $n = \frac{1}{2}$ an. Ferner sei der Meridian, der sich als Kreis um den Anfangspunkt der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene mit dem Radius n abbildet, der Meridian $v = \pi$. Es sei also $p = 0$ für $v = \pi$. Nach (20) tritt dies für $\beta = -\pi$ ein. Wir wählen deshalb $\beta = -\pi$. Der Äquator ($u = 0$) möge sich als die $\mathfrak{x}$-Achse abbilden, d. h. als der zur zweiten Gleichung (15) für $q = \infty$ gehörige Kreis. Zu diesem Zwecke wählen wir nach (20) die Konstante α gleich Null. Jetzt vereinfachen sich die Gleichungen (20) so:

$$p = -\tfrac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{v}{2}, \quad q = \tfrac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{u}{2}.$$

Diese konforme Abbildung ist in Fig. 33 dargestellt.

Die Formeln (20) dienen dazu, die ganze Kugelfläche konform

und eindeutig auf das Innere eines beliebigen ebenen Kreiszweiecks abzubilden, wobei die Meridiane als die Kreise durch die Ecken und die Breitenkreise als die dazu senkrechten Kreise erscheinen.

Es darf nicht übersehen werden, daß wir bei der Lösung unseres Problems von vornherein annahmen, das Bild der Breiten- und



Fig. 33.

Längenkreise sei ein a l l g e m e i n e s Isothermensystem von Kreisen in der Ebene, denn neben diesem gibt es ja nach I S. 180 noch drei besondere Gestalten, dargestellt durch die Figuren 54, 55, 57, I S. 174—180. Die Fälle der Figuren 55 und 57 gehen für $n = 0$ bzw. $n = \infty$ hervor. Im Falle $n = 0$ wird offenbar die Abbildung im Nordpol ausgeartet, im Falle $n = \infty$ liegt das Bild des Nordpols unendlich fern. Der Fall der Figur 54 geht nicht so einfach durch besondere Wahl der Konstanten n hervor. Da sich dieser Fall jedoch

ganz entsprechend erledigen läßt, wenn man auf das 1. Beispiel, I S. 174 zurückgeht, übergehen wir ihn.

Wir erwähnen noch einige Probleme: Man kann nach allen denjenigen konformen Abbildungen der Kugel fragen, bei denen sich alle größten Kreise der Kugel als die Geraden der Ebene darstellen. Aber es gibt keine solche Abbildung, was schon daraus folgt, daß die Winkelsumme in einem ebenen Dreiecke stets zwei Rechte beträgt, aber nicht in einem sphärischen.

Dagegen führt ein anderes Problem zu einer wichtigen Abbildung: Gesucht werden diejenigen konformen Abbildungen der Kugel auf die Ebene, bei denen die Loxodromen als Geraden erscheinen.

Unter einer Loxodrome versteht man eine Kurve konstanter Himmelsrichtung auf der Erdkugel, mathematisch ausgesprochen eine solche Kurve der Kugel, die alle Breitenkreise oder Meridiane unter einem konstanten Winkel schneidet. Zu den Loxodromen gehören die Breitenkreise und Meridiane; alle übrigen Loxodromen dagegen sind Kurven, die die Pole der Kugel zu asymptotischen Punkten I S. 27) haben, so daß also die größten Kreise der Kugel — außer den Meridianen und dem Äquator — keine Loxodromen sind. Da sich die Loxodromen als Geraden darstellen sollen, ist dies insbesondere von den Breitenkreisen und Meridianen zu fordern. Wegen der Winkeltreue müssen sie also als zwei Scharen zueinander senkrechter paralleler Geraden erscheinen.

Mithin müssen die Loxodromen wegen der Winkeltreue als Linien erscheinen, die eine Schar paralleler Geraden unter konstanten Winkeln schneiden, also in der Tat als Geraden.

Hieraus folgt, daß die gesuchten Abbildungen unter den oben besprochenen enthalten sind (nämlich für $n = \infty$). Es ist aber bequemer, sie direkt zu bestimmen: Denn auf der Kugel (17) sind die Größen (18) thermische Parameter der Breitenkreise und Meridiane. Daher geben die Gleichungen

$$(21) \qquad \mathfrak{x} = v, \quad \mathfrak{y} = \log \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\pi\right)$$

nach S. 89 eine Abbildung der gesuchten Art. Nach Satz 45, S. 89, folgt alsdann:

Satz 51: Alle diejenigen konformen Abbildungen der Kugel mit der Breite u und der Länge v auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene, bei denen die Loxodromen als Geraden erscheinen, sind mit der Abbildung

$$\mathfrak{x} = v, \quad \mathfrak{y} = \log \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \pi\right)$$

gleich- oder gegensinnig ähnlich.

Die Abbildung nach (21) heißt kurzweg die Seekarte.[1] Siehe Fig. 34. Das Bild erfüllt den ganzen Streifen zwischen den Geraden

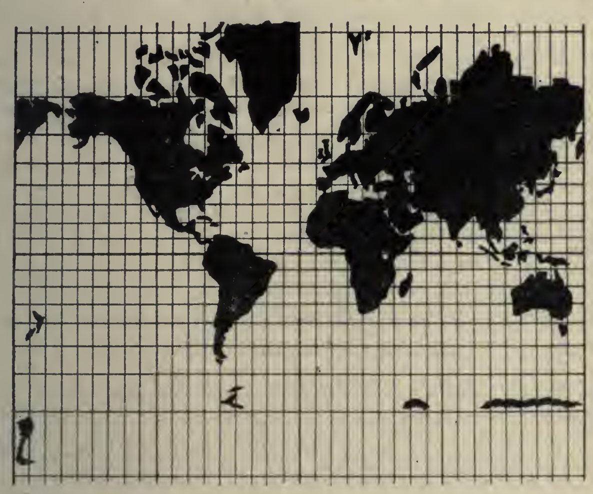


Fig. 34.

$\mathfrak{x} = \pm \pi$ bis ins Unendliche[2] und wiederholt sich beiderseits periodisch. Es sei hervorgehoben, daß sich diese Abbildung natürlich nicht etwa einfach dadurch herstellen läßt, daß man die Kugel

[1] Kremer, genannt Mercator, veröffentlichte 1569 diese Weltkarte, auf der er zwar ihre Vorzüge angab, aber über die Art ihrer Konstruktion nichts mitteilte. Nach seinem Tode fand Wright 1599 ein Näherungsverfahren, aber erst 1645 gab Bond den genauen mathematischen Ausdruck für die Abstände der Breitenkreise an in einem Anhange zu Norwoods „Epitome of navigation". Den ersten Beweis dafür gab endlich Halley, „An easy demonstration of the logarithmic tangents to the meridian line", Philos. Transactions für 1695—97, Bd. 18. Wegen ihres Nutzens für die Seefahrt heißt die Mercatorsche Karte schlechtweg die Seekarte, weil sie gestattet, die von der Seefahrt bevorzugten Linien konstanten Kurses, die Loxodromen, wegen ihrer Geradlinigkeit und Winkeltreue direkt mittels des Kompasses einzuzeichnen, sobald das Kartenblatt vorher orientiert worden ist.

[2] Die Fig. 34 geht nur von 80° nördlicher bis zu 80° südlicher Breite.

auf einen längs des Äquators berührenden Zylinder von der Mitte aus perspektiv projiziert und alsdann den Zylinder abwickelt. Aber dieses Verfahren gibt dieselben Meridiane und für niedrige Breiten wenig abweichende Bilder der Breitenkreise.

§ 12. Beliebige punktweise Abbildungen von Flächen.

In den Paragraphen 7, 10 und 11 haben wir einige besondere Arten, eine Fläche auf eine andere Punkt für Punkt zu beziehen, in Betracht gezogen. Jetzt wollen wir Sätze aufstellen, die für beliebige punktweise Abbildung gelten.

Wenn eine Fläche

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

nach irgendeinem Gesetze auf eine andere Fläche abgebildet wird, gehört zu jedem Punkte (x, y, z) der Fläche ein Punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ auf der zweiten Fläche. Daher sind dann $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ Funktionen von x, y, z oder nach (1) Funktionen von u und v. Es seien dies die Funktionen:

$$(2) \qquad \bar{x} = \bar{\varphi}(u, v), \quad \bar{y} = \bar{\chi}(u, v), \quad \bar{z} = \bar{\psi}(u, v).$$

Dies ist alsdann eine Parameterdarstellung der zweiten Fläche. Zu jedem Wertepaare u, v gehören einander entsprechende Punkte (x, y, z) und $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ oder P und $\bar{P}$ der beiden Flächen (1) und (2).

Die Bogenelement-Quadrate der beiden Flächen seien:

$$(3) \qquad \begin{cases} ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ d\bar{s}^2 = \bar{E}\,du^2 + 2\bar{F}\,du\,dv + \bar{G}\,dv^2. \end{cases}$$

Ändern sich u und v unendlich wenig, so ändern sich auch die Punkte P und $\bar{P}$ unendlich wenig. Das als eben aufzufassende unendlich kleine Stück der ersten Fläche in der Umgebung eines beliebigen Punktes P bildet sich als das ebenfalls als eben aufzufassende unendlich kleine Stück der zweiten Fläche in der Umgebung des zugeordneten Punktes $\bar{P}$ ab. Wir wollen die Beziehung zwischen diesen beiden unendlich kleinen Bereichen untersuchen, verstehen also unter u, v allgemein, aber b e s t i m m t gewählte Werte der Parameter und setzen nach (1) und (2) an:

$$(4) \qquad \begin{cases} dx = x_u\,du + x_v\,dv, \quad dy = y_u\,du + y_v\,dv, \quad dz = z_u\,du + z_v\,dv; \\ d\bar{x} = \bar{x}_u\,du + \bar{x}_v\,dv, \quad d\bar{y} = \bar{y}_u\,du + \bar{y}_v\,dv, \quad d\bar{z} = \bar{z}_u\,du + \bar{z}_v\,dv. \end{cases}$$

Hierin haben jetzt die partiellen Ableitungen von x, y, z und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ nach u und v b e s t i m m t e Werte, während die Differentiale ver-

änderlich bleiben. Man kann dx, dy, dz als rechtwinklige Punktkoordinaten für das unendlich kleine Stück der ersten Fläche in demjenigen Achsenkreuze betrachten, das dem ursprünglichen parallel ist und seinen Anfangspunkt im Punkte P oder (x, y, z) der Fläche hat. Entsprechendes gilt von $d\bar{x}, d\bar{y}, d\bar{z}$. Wir sehen aus (4), daß diese rechtwinkligen Koordinaten linear und homogen von den Hilfsveränderlichen du und dv abhängen.

Jeder Fortschreitungsrichtung $(dx : dy : dz)$ auf der ersten Fläche vom Punkte P aus entspricht hiernach eine Fortschreitungsrichtung $(d\bar{x} : d\bar{y} : d\bar{z})$ auf der zweiten Fläche vom Punkte $\bar{P}$ aus, und umgekehrt.

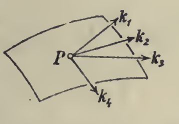
Wenn $dv : du$ einen bestimmten Wert k hat, ist der zugehörige Punkt $(u + du,\ v + dv)$ oder $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ der ersten Fläche an diejenige Tangente des Punktes (x, y, x) gebunden, deren Gleichungen in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ nach (17), S. 38, sind:

$$(5)\quad \mathfrak{x} = x + (x_u + x_v k)t, \quad \mathfrak{y} = y + (y_u + y_v k)t, \quad \mathfrak{z} = z + (z_u + z_v k)t,$$

ausgedrückt mittels eines längs der Tangente veränderlichen Parameters t. Dieser Tangente entspricht bei der zweiten Fläche die Tangente:

$$(6)\quad \bar{\mathfrak{x}} = \bar{x} + (\bar{x}_u + \bar{x}_v k)\bar{t}, \quad \bar{\mathfrak{y}} = \bar{y} + (\bar{y}_u + \bar{y}_v k)\bar{t}, \quad \bar{\mathfrak{z}} = \bar{z} + (\bar{z}_u + \bar{z}_v k)\bar{t}.$$

Wir wollen nun k vier Werte k_1, k_2, k_3, k_4 erteilen. Ihnen entsprechen vier Tangenten (5) in der Tangentenebene von P und vier Tangenten (6) in der Tangentenebene von $\bar{P}$. Siehe Fig. 35. Die ersten vier Tangenten haben ein Doppelverhältnis, das wir leicht bestimmen können: Geradeso wie auf S. 39 ergibt sich nämlich, daß es gleich dem Doppelverhältnisse der vier Werte k_1, k_2, k_3, k_4 selbst ist, d. h. es gilt der



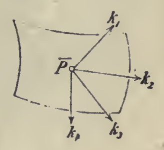


Fig. 35.

Satz 52: Diejenigen vier Tangenten eines Punktes (u, v) auf einer Fläche mit den Parametern u, v, für die $dv : du$ die Werte k_1, k_2, k_3, k_4 hat, haben das Doppelverhältnis $(k_1\, k_2\, k_3\, k_4)$.

Da der Satz auch für die Tangenten (6) der zweiten Fläche gilt, folgt hieraus:

Satz 53: Sind zwei Flächen Punkt für Punkt auf einander bezogen, so entsprechen den Fortschreitungsrichtungen, die auf der einen Fläche von irgend einem Punkte ausgehen, die Fortschreitungsrichtungen, die auf der anderen Fläche von dem zugeordneten Punkte ausgehen, und zwar in der Weise, daß irgend vier Richtungen vom ersten Punkte aus dasselbe Doppelverhältnis wie die entsprechenden vier Richtungen vom zweiten Punkte aus haben.

Wenn wir auf den Tangenten der Parameterlinien (v) und (u) des Punktes P der ersten Fläche $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ als Strecken auftragen und diese Strecken zum Parallelogramm vervollständigen, wenn wir ferner das Entsprechende beim Punkte P der zweiten Fläche tun, liegen zwei Parallelogramme vor, innerhalb deren wir jetzt die durch (4) rechnerisch ausgedrückte Beziehung zwischen den unendlich kleinen Flächenbereichen von P und $\bar{P}$ geometrisch herstellen können: Gibt man nämlich $dv:du$ einen Wert k, so werden wie in Fig. 9, S. 37, die Seiten $\sqrt{G}$ und $\sqrt{\bar{G}}$ mit k multipliziert. Wird dann aus diesen verlängerten Seiten und den anderen Seiten $\sqrt{E}$ bzw. $\sqrt{\bar{E}}$ jedesmal das Parallelogramm wieder vervollständigt, so entsprechen die Diagonalen beider Parallelogramme dem gegebenen Werte k von $dv:du$. Wir können die beiden Figuren von endlicher Ausdehnung als ähnliche Vergrößerungen der unendlich kleinen Parallelogramme auf den Flächen auffassen.

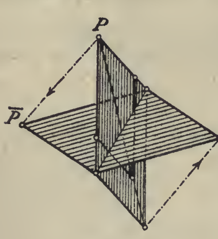


Fig. 36.

Wenn wir nun die eine unserer beiden Figuren, etwa die erste, soweit ähnlich vergrößern, bis die Querdiagonale des aus $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ gebildeten Parallelogramms mit der entsprechenden Diagonale in der zweiten Figur an Länge übereinstimmt, können wir beide Figuren so zusammenlegen, daß sie sich längs dieser Diagonale durchdringen. Siehe Fig. 36. Aus der Proportionalität der beiden vorhin mit $k = dv:du$ ausgeführten Konstruktionen folgt dann der in der Figur angedeutete

Satz 54: Sind zwei Flächen Punkt für Punkt auf einander bezogen, so entspricht jedem unendlich kleinen Stücke der einen Fläche ein unendlich kleines Stück der anderen Fläche. Bringt man zwei solche einander entsprechende Stücke in eine geeignete Lage zueinander, so

kann man die Zuordnung zwischen ihren Punkten durch eine passende ähnliche Vergrößerung des einen Stücks und darauf folgende Parallelprojektion des einen Stücks auf das andere geometrisch herstellen.

Man kann übrigens beide Stücke so zusammenlegen, daß die projizierenden Strahlen zu dem einen senkrecht werden.[1]

Aus diesem geometrischen Ergebnisse hätten wir den Satz 53 mit Hilfe der Sätze des § 11, 3. Abschn. des 1. Bds., ebenfalls ableiten können. Auch die folgenden Betrachtungen lassen sich zum Teil rein geometrisch wiedergeben, aber wir schlagen den analytischen Weg ein:

Die zu zwei Werten k und $\varkappa$ von $dv:du$ gehörigen Fortschreitungsrichtungen vom Punkte (u, v) der ersten Fläche aus bilden einen Winkel α miteinander, für den nach (21), S. 39,

$$\cos\alpha = \frac{E + F(k+\varkappa) + Gk\varkappa}{\sqrt{(E + 2Fk + Gk^2)(E + 2F\varkappa + G\varkappa^2)}} \tag{7}$$

ist. Die entsprechenden Richtungen im Punkte (u, v) der zweiten Fläche bilden einen Winkel $\bar\alpha$ miteinander, für den

$$\cos\bar\alpha = \frac{\bar E + \bar F(k+\varkappa) + \bar G k\varkappa}{\sqrt{(\bar E + 2\bar F k + \bar G k^2)(\bar E + 2\bar F\varkappa + \bar G\varkappa^2)}} \tag{8}$$

ist. Werden k und $\varkappa$ so gewählt, daß die zugehörigen Richtungen auf der ersten Fläche zueinander senkrecht sind, so werden die zugehörigen Richtungen auf der zweiten Fläche im allgemeinen nicht zueinander senkrecht sein. Einem rechten Winkel auf der ersten Fläche entspricht vielmehr nur dann ein rechter Winkel auf der zweiten, wenn die Bestimmungsstücke k und $\varkappa$ der Schenkel so gewählt werden, daß gleichzeitig $\cos\alpha = 0$ und $\cos\bar\alpha = 0$, also

$$\begin{cases} E + F(k+\varkappa) + Gk\varkappa = 0, \\ \bar E + \bar F(k+\varkappa) + \bar G k\varkappa = 0 \end{cases} \tag{9}$$

ist. Es müssen also k und $\varkappa$ so gewählt werden, daß ihre Summe und ihr Produkt die Werte haben:

$$k + \varkappa = \frac{G\bar E - E\bar G}{F\bar G - G\bar F}, \quad k\varkappa = \frac{E\bar F - F\bar E}{F\bar G - G\bar F}, \tag{10}$$

d. h. k und $\varkappa$ sind die Wurzeln der in k quadratischen Gleichung:

---

[1] Siehe Tissot, „Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques", Nouv. Ann. de Math., 2. Serie, 17. Bd. (1878).

$$(11) \qquad (E\bar{F} - F\bar{E}) - (G\bar{E} - E\bar{G})k + (F\bar{G} - G\bar{F})k^2 = 0$$

oder

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} k^2 & E & \bar{E} \\ -k & F & \bar{F} \\ 1 & G & \bar{G} \end{vmatrix} = 0.$$

Hinsichtlich dieser quadratischen Gleichung sind nun drei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Die Gleichung (11) oder (12) ist identisch erfüllt, d. h. es ist

$$E : F : G = \bar{E} : \bar{F} : \bar{G}.$$

Nach Satz 42, S. 87, ist alsdann die Abbildung **konform** oder winkeltreu. Jedem rechten Winkel zweier Fortschreitungsrichtungen des Punktes (u, v) der einen Fläche entspricht alsdann ein rechter Winkel auf der anderen Fläche. Des Folgenden wegen sei hierbei daran erinnert, daß in diesem Falle nach Satz 43, S. 88, die Bilder der Minimalkurven der einen Fläche die Minimalkurven der anderen Fläche sind, und zwar gilt dies für beide Scharen von Minimalkurven.

2. Fall: Die Gleichung (11) oder (12) hat zwei zusammenfallende Wurzeln k. Da dann $\varkappa$ in (9) gleich k zu setzen ist, gehört zu k eine Minimaltangente des Punktes (u, v) auf jeder der beiden Flächen, vgl. Satz 10, S. 34. In diesem Falle entsprechen daher den Minimalkurven einer Schar der einen Fläche Minimalkurven auf der anderen Fläche, aber nur einer Schar, nicht beider. Ein Orthogonalsystem, das sich wieder als Orthogonalsystem abbildete, ist also nicht vorhanden. Allerdings könnte man auf Grund des Satzes 63, I S. 457, sagen, daß jede Minimalkurve überall zu sich selbst senkrecht ist; man könnte also diese eine Schar von Minimalkurven, die sich wieder als Schar von Minimalkurven abbildet, als ein ausgeartetes Orthogonalsystem ansehen. Bei reellen Flächen mit reellen Parametern tritt dieser Fall nie ein. Denn es ist

$$\left(k + \frac{F}{G}\right)\left(\varkappa + \frac{F}{G}\right) = \frac{G^2 k\varkappa + FG(k + \varkappa) + F^2}{G^2}$$

oder, wenn man rechts im Zähler EG addiert und subtrahiert:

$$(13) \quad \left(k + \frac{F}{G}\right)\left(\varkappa + \frac{F}{G}\right) = \frac{G[E + F(k + \varkappa) + Gk\varkappa] - (EG - F^2)}{G^2}.$$

Da nun für die beiden Wurzeln k und $\varkappa$ der quadratischen Gleichung die Gleichungen (9) gelten, lehrt die erste, daß:

$$(14)\qquad \left(k + \frac{F}{G}\right)\left(\varkappa + \frac{F}{G}\right) = -\frac{EG - F^2}{G^2}$$

ist. Wäre nun $k = \varkappa$, so stände hier im reellen Falle links ein Quadrat, also eine positive Größe, während die rechte Seite negativ ist, weil $EG - F^2$ oder D^2 im reellen Falle nach S. 18 einen positiven Wert hat. Wir kommen also zu einem Widerspruche.

3. Fall: Die Gleichung (11) oder (12) hat zwei verschiedene Wurzeln k. Dann gibt es in jedem Punkte (u, v) der einen Fläche zwei und nur zwei zueinander senkrechte Fortschreitungsrichtungen, denen auf der anderen Fläche ebenfalls zwei zueinander senkrechte Fortschreitungsrichtungen entsprechen. Wenn wir k durch $dv:du$ ersetzen, lautet die Gleichung (11) oder (12) so:

$$(15)\qquad (E\bar{F} - F\bar{E})\,du^2 - (G\bar{E} - E\bar{G})\,du\,dv + (F\bar{G} - G\bar{F})\,dv^2 = 0$$

oder:

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} dv^2 & E & \bar{E} \\ -du\,dv & F & \bar{F} \\ du^2 & G & \bar{G} \end{vmatrix} = 0.$$

Sie definiert nach S. 13 als Differentialgleichung in u und v auf beiden Flächen ein Kurvennetz, und zwar sind beide Kurvennetze Orthogonalsysteme, von denen das eine bei der Abbildung gerade in das andere übergeht. Sind beide Flächen reell und haben sie reelle Parameter, so sind auch die Orthogonalsysteme reell, weil dann beide Wurzeln der quadratischen Gleichung reell sind. Denn die Formel (14) für die beiden Wurzeln k und $\varkappa$ lehrt, daß dann das Produkt

$$\left(k + \frac{F}{G}\right)\left(\varkappa + \frac{F}{G}\right)$$

negativ ist, während sich aus der ersten Gleichung (10) für die Summe

$$\left(k + \frac{F}{G}\right) + \left(\varkappa + \frac{F}{G}\right)$$

ein reeller Wert ergibt. Nun weiß man aber, daß zwei Größen, deren Summe reell und deren Produkt negativ ist, stets reell sind. Mithin sind

$$k + \frac{F}{G} \quad \text{und} \quad \varkappa + \frac{F}{G}$$

und folglich auch k und $\varkappa$ selbst reell.

Hiernach können wir die Ergebnisse so formulieren:

Satz 55: Bildet man eine Fläche Punkt für Punkt auf eine andere Fläche ab, so sind drei Fälle möglich:

Erstens: Die beiden Scharen von Minimalkurven der einen Fläche bilden sich als die beiden Scharen von Minimalkurven der anderen Fläche ab. Dann ist die Abbildung konform, und jedem Orthogonalsystem auf der einen Fläche entspricht ein Orthogonalsystem auf der anderen Fläche.

Zweitens: Nur eine Schar von Minimalkurven der einen Fläche bildet sich als eine Schar von Minimalkurven der anderen Fläche ab. Außer dieser als Ausartung eines Orthogonalsystems aufzufassenden Schar gibt es alsdann kein Orthogonalsystem auf der einen Fläche, dem auf der anderen Fläche wieder ein Orthogonalsystem entspräche. Bei reeller Abbildung tritt dieser Fall nie ein.

Drittens: Keine der beiden Scharen von Minimalkurven der einen Fläche bildet sich als Schar von Minimalkurven der anderen Fläche ab. Alsdann gibt es ein und nur ein Orthogonalsystem auf der einen Fläche, dem auf der anderen Fläche wieder ein Orthogonalsystem entspricht. Ist die Abbildung reell, so sind es auch diese beiden Orthogonalsysteme.

Der letzte Fall ist der allgemeinste. Wir wollen ihn daher insbesondere für reelle Abbildungen noch einmal als Satz aussprechen:

Satz 56: Wird eine reelle Fläche Punkt für Punkt, aber nicht konform, auf eine andere reelle Fläche abgebildet, so gibt es ein und nur ein Orthogonalsystem auf der einen Fläche, dem auf der anderen Fläche wieder ein Orthogonalsystem entspricht, und diese beiden Orthogonalsysteme sind reell.[1] — Sind auf beiden Flächen einander entsprechende Punkte (x, y, z) und $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ auf dasselbe Parameterpaar bezogen:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$
$$\bar{x} = \bar{\varphi}(u, v), \quad \bar{y} = \bar{\chi}(u, v), \quad \bar{z} = \bar{\psi}(u, v)$$

[1] Dies wurde zuerst von Tissot, „Sur les cartes géographiques“, Comptes Rendus Bd. 49 (1859), ausgesprochen. Eine ausführliche Begründung gab er 1878 in der in der Anm. zu S. 107 erwähnten Abhandlung. Daß der Satz bei imaginären Abbildungen nicht ausnahmslose gilt, bemerkte Lie, „Über geodätische Linien“, Note I: „Über die allgemeinste geodätische Abbildung einer reellen oder imaginären Fläche“, Math. Ann. 20. Bd. (1882). Er machte darin auf den in Satz 55 genannten zweiten Fall aufmerksam.

und sind E, F, G bzw. $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ die Fundamentalgrößen erster Ordnung auf den beiden Flächen, so werden jene Orthogonalsysteme durch die Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} dv^2 & E & \bar{E} \\ -du\,dv & F & \bar{F} \\ du^2 & G & \bar{G} \end{vmatrix} = 0$$

zwischen u und v definiert.

Sehen wir von dem Spezialfalle ab, der bei reeller Abbildung nie eintritt, nämlich davon, daß die quadratische Gleichung (11) eine Doppelwurzel hat, so können wir nunmehr annehmen, daß die Parameter u und v schon so gewählt seien, daß gerade die Parameterlinien (u) und (v) auf beiden Flächen Orthogonalsysteme bilden. Im allgemeinen ist dies nur auf eine Weise möglich, im Fall der konformen Abbildung auf unendlich viele Weisen. Hervorzuheben ist noch, daß die so eingeführten neuen Parameter u und v im Fall einer reellen Abbildung für reelle Punkte auch reell sind.

Der Satz 15, S. 44, lehrt, daß nunmehr F und $\bar{F}$ gleich Null, also

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2, \qquad d\bar{s}^2 = \bar{E}\,du^2 + \bar{G}\,dv^2 \tag{17}$$

wird. Insbesondere sind

$$d_u s = \sqrt{E}\,du, \quad d_v s = \sqrt{G}\,dv, \quad d_u \bar{s} = \sqrt{\bar{E}}\,du, \quad d_v \bar{s} = \sqrt{\bar{G}}\,dv$$

die Bogenelemente der Parameterlinien (v) und (u) der Flächen, vgl. (15), S. 36, sowie auch Fig. 9. Die Richtungen der Bogenelemente $d_u s$ und $d_v s$ stehen aufeinander senkrecht, ebenso die der Bogenelemente $d_u \bar{s}$ und $d_v \bar{s}$, siehe Fig. 37. Der zum Punkte P oder (u, v) der ersten Fläche unendlich benachbarte Punkt Q oder $(u + du,\ v + dv)$ liegt in einer Fortschreitungsrichtung, für deren Winkel φ mit $d_u s$ die Formeln gelten:

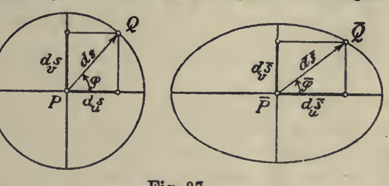


Fig. 37.

$$\cos\varphi = \frac{d_u s}{ds} = \frac{\sqrt{E}\,du}{ds}, \qquad \sin\varphi = \frac{d_v s}{ds} = \frac{\sqrt{G}\,dv}{ds} \tag{18}$$

Ganz entsprechend ergibt sich bei der zweiten Fläche für den Winkel $\bar{\varphi}$, den die Richtung vom Punkte $\bar{P}$ oder (u, v) nach dem Punkte $\bar{Q}$ oder $(u + du,\ v + dv)$ mit $d_u \bar{s}$ bildet:

$$(19)\qquad \cos\bar{\varphi} = \frac{d_u\bar{s}}{d\bar{s}} = \frac{\sqrt{\bar{E}}\,du}{d\bar{s}}, \qquad \sin\bar{\varphi} = \frac{d_v\bar{s}}{d\bar{s}} = \frac{\sqrt{\bar{G}}\,dv}{d\bar{s}}.$$

Bezeichnen wir die Koordinaten von Q bzw. $\bar{Q}$ in dem rechtwinkligen Achsenkreuze, das von $d_u s$ und $d_v s$ bzw. von $d_u\bar{s}$ und $d_v\bar{s}$ gebildet wird, mit $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ bzw. $d\bar{\mathfrak{x}}$ und $d\bar{\mathfrak{y}}$, so können wir auch so sagen: Der Punkt mit den Koordinaten

$$d\mathfrak{x} = ds\cos\varphi = \sqrt{E}\,du, \qquad d\mathfrak{y} = ds\sin\varphi = \sqrt{G}\,dv$$

wird als der Punkt mit den Koordinaten

$$d\bar{\mathfrak{x}} = d\bar{s}\cos\bar{\varphi} = \sqrt{\bar{E}}\,du, \qquad d\bar{\mathfrak{y}} = d\bar{s}\sin\bar{\varphi} = \sqrt{\bar{G}}\,dv$$

abgebildet. Hiernach ist:

$$(20)\qquad d\bar{\mathfrak{x}} = \frac{\sqrt{\bar{E}}}{\sqrt{E}}\,d\mathfrak{x}, \qquad d\bar{\mathfrak{y}} = \frac{\sqrt{\bar{G}}}{\sqrt{G}}\,d\mathfrak{y}.$$

Die Verzerrung, die eine unendlich kleine Figur in der Umgebung von P bei der Abbildung erleidet, besteht hiernach darin, daß ihre Abszissen $d\mathfrak{x}$ und ihre Ordinaten $d\mathfrak{y}$ je nach einem gewissen Verhältnisse $\sqrt{\bar{E}}:\sqrt{E}$ bzw. $\sqrt{\bar{G}}:\sqrt{G}$ verändert werden. Diese Verhältnisse sind von u und v abhängig, also im allgemeinen an anderen Stellen P auch andere. Insbesondere wird ein unendlich kleiner Kreis um P mit dem Radius ds in einen unendlich kleinen Kegelschnitt um $\bar{P}$ übergehen, dessen Halbachsen längs $d_u\bar{s}$ und $d_v\bar{s}$ liegen und gleich $\sqrt{\bar{E}}\,ds:\sqrt{E}$ und $\sqrt{\bar{G}}\,ds:\sqrt{G}$ sind. In der Tat folgt aus

$$d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2 = ds^2$$

nach (20):

$$\frac{E}{\bar{E}}\,d\bar{\mathfrak{x}}^2 + \frac{G}{\bar{G}}\,d\bar{\mathfrak{y}}^2 = ds^2.$$

Im reellen Falle sind $E, G, \bar{E}, \bar{G}$ nach S. 15 positiv, d. h. dann ist der Kegelschnitt eine Ellipse. Wenn die Abbildung konform ist, ergibt sich natürlich wieder ein Kreis.

Wir finden also:

Satz 57: Bildet man eine Fläche punktweise auf eine andere ab, so daß ein gewisses Orthogonalsystem der Fläche im Bilde wieder als Orthogonalsystem erscheint, so entspricht einem unendlich kleinen Kreise um einen Punkt P der Fläche auf der Bildfläche ein Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt der Bildpunkt $\bar{P}$ von P ist und dessen Achsen in den Tangenten der durch $\bar{P}$ gehenden Kurven

des zweiten Orthogonalsystems liegen. Im Falle einer reellen Abbildung ist der Kegelschnitt eine Ellipse.[1]

Die Radien des Kreises um P bilden sich als die Halbmesser des Kegelschnittes ab. Da die Achsen der Ellipse der größte und kleinste Durchmesser sind, sieht man:

Satz 58: Bildet man eine reelle Fläche punktweise, aber nicht konform auf eine andere reelle Fläche ab, so daß ein und nur ein Orthogonalsystem der Fläche im Bilde wieder als Orthogonalsystem erscheint, so sind die Kurven jenes Orthogonalsystems diejenigen Kurven, längs deren an jeder Stelle die von der Stelle ausgehenden Bogenelemente bei der Abbildung die stärkste Verzerrung ihrer Länge erleiden.

Auch sieht man ein, daß die Kurven ohne Längenverzerrung, für die also $ds^2 = d\bar{s}^2$ ist, zwei Scharen bilden, derart, daß die Winkel der durch einen Punkt gehenden beiden Kurven von den Kurven des Orthogonalsystems halbiert werden.

Setzen wir in (18) und (19) statt $dv:du$ wieder k ein, so kommt mit Rücksicht auf (17):

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E + G k^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{G}\,k}{\sqrt{E + G k^2}},$$

$$\cos\bar{\varphi} = \frac{\sqrt{\bar{E}}}{\sqrt{\bar{E} + \bar{G} k^2}}, \qquad \sin\bar{\varphi} = \frac{\sqrt{\bar{G}}\,k}{\sqrt{\bar{E} + \bar{G} k^2}}.$$

Lassen wir k um dk wachsen, d. h. ändern wir die Fortschreitungsrichtung unendlich wenig, so werden φ und $\bar{\varphi}$ um Differentiale $d\varphi$ und $d\bar{\varphi}$ zunehmen, und zwar ist dann, wie man durch Differentiation nach k findet:

$$d\varphi = \frac{\sqrt{E}\sqrt{G}\,dk}{E + G k^2}, \qquad d\bar{\varphi} = \frac{\sqrt{\bar{E}}\sqrt{\bar{G}}\,dk}{\bar{E} + \bar{G} k^2},$$

daher:

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\varphi} = \frac{\sqrt{\bar{E}}\sqrt{\bar{G}}}{\sqrt{E}\sqrt{G}}\;\frac{E + G k^2}{\bar{E} + \bar{G} k^2}.$$

Dies Verhältnis $d\bar{\varphi}:d\varphi$ einander entsprechender unendlich kleiner Winkel der Bild- und Originalebene ist eine Funktion von k^2. Sie

[1] Tissot a. a. O. Das Bild des Kreises, die Ellipse, wird häufig als Indikatrix bezeichnet. Da man aber andere später (auf S. 164) auftretende Kegelschnitte, die schon früher in die Flächentheorie eingeführt worden sind, ebenfalls so nennt, würde man die hier vorkommende Ellipse zur Unterscheidung die Tissotsche Indikatrix nennen müssen.

erreicht im reellen Falle ein Maximum oder Minimum für $k^2 = 0$ und $k^2 = 1:0$, d. h:

Satz 59: Bildet man eine reelle Fläche punktweise, aber nicht konform auf eine andere reelle Fläche ab, so daß ein gewisses Orthogonalsystem der Fläche wieder als Orthogonalsystem erscheint, so liegen diejenigen unendlich kleinen Winkel auf der einen Fläche, die von allen unendlich kleinen Winkeln mit demselben Scheitel die stärkste Verzerrung bei der Abbildung erleiden, längs der Kurven jenes Orthogonalsystems.

Auf gewisse Abbildungen von Flächen aufeinander kommen wir später zurück. —

Die wichtigsten Formeln dieses Abschnittes haben wir, um die Rückverweisung und Übersicht zu erleichtern, im Anhange zusammengestellt in der Tafel XI, wodurch der Anhang des ersten Bandes, Tafel I bis X, fortgesetzt wird. Wir verweisen auf diese Formeln künftig durch die Zeichen XI (A) bis XI (P).

Zweiter Abschnitt.

Die Krümmung der Fläche.

§ 1. Die Krümmung der Flächenkurven und die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung.

Beim Rückblicke auf den ersten Abschnitt wird man bemerken, daß die wesentliche Grundlage der Untersuchungen die Formel

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

für das Quadrat des Bogenelements war, anders ausgesprochen: es genügte uns im wesentlichen statt der Kenntnis der Gestalt einer Fläche die Kenntnis ihrer drei Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G als Funktionen der Parameter u und v.

Jetzt aber wollen wir die Gestalt der Flächen näher untersuchen, und dabei werden wir uns bald genötigt sehen, zu jenen Größen noch drei Fundamentalgrößen zweiter Ordnung hinzuzufügen.

Will man eine Fläche

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

in der Umgebung eines Punktes (u, v) untersuchen, so liegt es nahe, die Gestalt der verschiedenen durch diesen Punkt gehenden Kurven auf der Fläche in Betracht zu ziehen.

Hat man im Punkte (u, v) eine Flächentangente t ausgewählt, so kann man stets solche Kurven auf der Fläche ziehen, die im Punkte (u, v) die Tangente t haben, deren begleitendes Dreikant (vgl. I S. 223) aber an dieser Stelle im übrigen ganz beliebig vorgeschrieben worden ist. Um dies zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß man wenigstens eine Kurve auf der Fläche ziehen kann, die im Punkte (u, v) die Tangente t hat und deren Schmiegungsebene E in diesem Punkte irgend eine Ebene durch t ist. Eine derartige Kurve ist z. B. die ebene Kurve, in der die Ebene E

die Fläche schneidet. Um so mehr wird es nicht-ebene Kurven von der verlangten Eigenschaft geben.

Hiernach steht es fest, daß Kurven c auf der Fläche vorhanden sind, die im gewählten Punkte P oder (u, v) die gewählte Flächentangente t zur Tangente haben, während ihre Hauptnormalen in P beliebige Winkel ω mit der Flächennormale bilden können. Da die Normalebene einer Kurve c in P senkrecht zu t ist und also die Flächennormale enthält, wird die Hauptnormale in P durch Angabe ihres Winkels ω mit der Flächennormale festgelegt, aber allerdings noch nicht orientiert. Zu beachten ist dabei, daß wir die Flächennormale auf S. 32 orientiert haben, und daß wir natürlich auch die Tangente t orientieren werden. Wählen wir eine der beiden Möglichkeiten für die Hauptnormale, so ist alsdann auch die Binormale in P festgelegt und orientiert.

Analytisch wird die Kurve c dadurch bestimmt, daß längs ihrer die Parameter u und v Funktionen e i n e s Parameters sein müssen (nach S. 12). Indem wir den Fall, daß die Kurve c eine Minimalkurve sei, ausschließen, dürfen wir annehmen, dieser eine Parameter sei die Bogenlänge s der Kurve, gemessen von irgend einer Stelle an. Jetzt sind u und v in (1) als Funktionen von s aufzufassen, so daß auch x, y, z Funktionen von s werden, deren Differentiation nach s die Richtungskosinus α, β, γ der Tangente t liefert (nach III (B)):

$$(2) \qquad \alpha = x_u u' + x_v v', \qquad \beta = y_u u' + y_v v', \qquad \gamma = z_u u' + z_v v'.$$

Der Strich deutet die Differentiation nach s an:

$$(3) \qquad u' = \frac{du}{ds}, \qquad v' = \frac{dv}{ds}.$$

Wenn X, Y, Z wie auf S. 32 die Richtungskosinus der Flächennormale bedeuten, ist

$$X\alpha + Y\beta + Z\gamma = 0$$

die Bedingung dafür, daß die Flächennormale auf t senkrecht steht. Hierfür kann nach XI(F)[1] geschrieben werden:

$$\mathsf{S}(y_u z_v - z_u y_v)\alpha = 0.$$

Diese Formel kann durch Einsetzen der Werte (2) sofort bestätigt werden. Da sie längs der Kurve c überall gilt, darf sie nach s differenziert werden. Dies gibt nach III(C):

[1] Tafel XI im Anhange dieses Bandes, vgl. S. 114.

$$\frac{1}{r}\,\mathsf{S}\,(y_u z_v - z_u y_v)\,l + \mathsf{S}\,(y_{uu} z_v + y_u z_{uv} - z_{uu} y_v - z_u y_{uv})\,u'\alpha +$$
$$+ \mathsf{S}\,(y_{uv} z_v + y_u z_{vv} - z_{uv} y_v - z_u y_{vv})\,v'\alpha = 0\,.$$

Hierbei bedeuten l, m, n die Richtungskosinus der Hauptnormale und r den Krümmungsradius der Kurve c an der Stelle (u, v) oder (s). Das erste Glied in der Formel ist nach XI (F) gleich

$$\frac{D}{r}\,\mathsf{S}\,X l$$

oder also, da ω den Winkel der Flächennormale mit der Hauptnormale bezeichnen soll, gleich:

$$\frac{D}{r}\cos\omega\,.$$

Setzen wir ferner in den beiden anderen Gliedern die Werte von α, β, γ aus (2) ein, so werden sie homogen vom zweiten Grade in u' und v'. Dabei heben sich mehrere Größen fort, so daß — nachdem nach den Potenzen von u' und v' geordnet worden ist — die Formel hervorgeht:

$$\frac{D}{r}\cos\omega - \mathsf{S}\,(y_u z_v - z_u y_v)\,x_{uu}\,.\,u'^2 -$$
$$- 2\,\mathsf{S}\,(y_u z_v - z_u y_v)\,x_{uv}\,.\,u'v' - \mathsf{S}\,(y_u z_v - z_u y_v)\,x_{vv}\,.\,v'^2 = 0.$$

Wenn wir nach XI (F) die Werte DX, DY, DZ für die Inhalte der Klammern einführen, können wir D fortheben, da $D \neq 0$ ist (vgl. S. 18), so daß bleibt:

$$\frac{\cos\omega}{r} = \mathsf{S}\,X x_{uu}\,.\,u'^2 + 2\,\mathsf{S}\,X x_{uv}\,.\,u'v' + \mathsf{S}\,X x_{vv}\,.\,v'^2.$$

Nach (3) und wegen der Formel

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

können wir dies Ergebnis auch so schreiben:

(4) $$\frac{\cos\omega}{r} = \frac{\mathsf{S}\,X x_{uu}\,.\,du^2 + 2\,\mathsf{S}\,X x_{uv}\,.\,du\,dv + \mathsf{S}\,X x_{vv}\,.\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Diese Formel dient zur Berechnung der Krümmung $1:r$ der Flächenkurve c an der Stelle P oder (u, v).

Das Bemerkenswerte an dieser Formel (4) ist, daß ihre rechte Seite nur von u, v und von $dv:du$ abhängt, da sie in du und dv homogen von nullter Ordnung ist. Demnach hat die rechte Seite einen bestimmten Wert, sobald man den Flächenpunkt (u, v) oder P gewählt und eine bestimmte Fortschreitungsrichtung $(dv:du)$ von ihm aus, d. h. eine bestimmte Flächentangente von P angenommen hat. Mithin hat $\cos\omega:r$ für alle diejenigen Flächenkurven c, die durch P gehen und dort diese Flächentangente berühren, an der Stelle P

einen und denselben Wert. Die Gesamtheit dieser Kurven ist unbegrenzt. Wie man das Ergebnis geometrisch ausdrücken kann, erhellt aus Fig. 38. Da nämlich allen diesen Kurven c die Tangente in P gemein ist, liegen ihre von P ausgehenden Hauptnormalen in der Ebene durch P senkrecht zur Tangente. In Fig. 38 ist diese Ebene schraffiert. Außerdem ist darin die Schmiegungsebene des Punktes P für eine der Kurven angedeutet, schließlich noch die Ebene durch die Tangente und Flächennormale. Trägt man auf den Hauptnormalen jeweils die zugehörige Krümmung $1:r$ von P aus als Strecke PN auf und projiziert die Endpunkte N dieser Strecken senkrecht auf die Flächennormale, so ergibt sich für alle in Betracht kommenden Flächenkurven ein und derselbe Punkt Q auf der Flächennormale, da $\cos\omega : r$, wie gesagt, für alle diese Kurven an der Stelle P einen und denselben Wert hat. Wir haben daher den

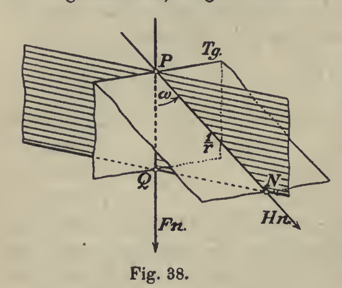


Fig. 38.

Satz 1: Legt man durch einen Flächenpunkt P lauter Flächenkurven c, die in P dieselbe Flächentangente berühren, und trägt man auf den Hauptnormalen dieser Kurven in P stets ihre Krümmung $1:r$ als Strecke von P aus ab, so ist der Ort der Endpunkte eine die Flächennormale von P schneidende Gerade, die auf der Ebene der Flächennormale und gewählten Flächentangente senkrecht steht.

Der analytische Beweis dieses Satzes ist einfach: Der Punkt N der Hauptnormale hat die Koordinaten:

$$\mathfrak{x} = x + \frac{l}{r}, \qquad \mathfrak{y} = y + \frac{m}{r}, \qquad \mathfrak{z} = z + \frac{n}{r}.$$

Da nun $\mathbf{S}\,\alpha l = 0$ nach II (A) und $\mathbf{S}\,Xl = \cos\omega$ ist, liegt N folglich in den beiden Ebenen

$$\mathbf{S}\,\alpha(\mathfrak{x} - x) = 0, \qquad \mathbf{S}\,X(\mathfrak{x} - x) = \frac{\cos\omega}{r},$$

also in ihrer gemeinsamen Geraden. Diese Schnittgerade ist aber für alle zu konstruierenden Punkte N dieselbe, weil $\cos\omega : r$, wie gesagt, für alle denselben Wert hat. Die erste Gleichung stellt die Ebene durch P senkrecht zur Tangente dar, die zweite eine Ebene senk-

recht zur Flächennormale. Beide Ebenen schneiden einander daher in der Tat in einer Geraden, die die Flächennormale trifft (in Q) und zur Tangente und Flächennormale senkrecht ist.

Man kann, statt $1:r$ auf der jeweiligen Hauptnormale aufzutragen und den Endpunkt N auf die Flächennormale zu projizieren, auch so verfahren, wie es Fig. 39 andeutet: Auf der Hauptnormale wird der Krümmungsradius r selbst von P aus als Strecke PK aufgetragen und alsdann in K das Lot zu PK in der Ebene der Flächen- und Hauptnormale errichtet. Es treffe die Flächennormale in M. Dann ist $PM = PK : \cos\omega$ oder also gleich $r : \cos\omega$, und wir wissen, daß dieser Wert für alle in Betracht kommenden Flächenkurven der gleiche ist. Somit gelangt man zu einem bestimmten Punkte M' auf der Flächennormale, d. h. K ergibt sich, wenn man diesen einen Punkt M auf die jeweilige Hauptnormale senkrecht projiziert.

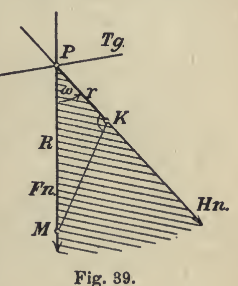


Fig. 39.

Auch dies wollen wir analytisch bestätigen: Der Punkt K hat die Koordinaten $x + rl$, $y + rm$ und $z + rn$. Die Ebene, die in K auf der Hauptnormale senkrecht steht, hat demnach in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Gleichung:

$$\mathbf{S}\, l(\mathfrak{x} - x - rl) = 0$$

oder wegen $\mathbf{S}\, l^2 = 1$ die Gleichung:

$$\mathbf{S}\, l(\mathfrak{x} - x) = r. \tag{5}$$

Wir suchen den Schnittpunkt M dieser Ebene mit der Flächennormale. Hat er von P die Entfernung $PM = R$, die entsprechend der Orientierung der Flächennormale zu messen ist, so sind $x + RX$, $y + RY$, $z + RZ$ seine Koordinaten. Man hat sie in (5) statt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ einzusetzen. Daraus ergibt sich

$$R\, \mathbf{S}\, lX = r$$

oder, da $\mathbf{S}\, lX = \cos\omega$ ist:

$$R = \frac{r}{\cos\omega}. \tag{6}$$

Dieser Wert aber ist, wie gesagt, für alle in Betracht kommenden Flächenkurven der gleiche.

Zu diesen Kurven gehören insbesondere solche, deren Hauptnormalen mit der Flächennormale in P zusammenfallen. Für sie

ist $\cos\omega$ gleich ± 1, also der Krümmungsradius r nach (6) gleich $\pm R$. Die Vergleichung von (6) mit (4) lehrt somit, daß

$$(7)\qquad \frac{1}{R} = \frac{\mathbf{S}\, X x_{uu} \,.\, du^2 + 2\mathbf{S}\, X x_{uv} \,.\, du\, dv + \mathbf{S}\, X x_{vv} \,.\, dv^2}{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2},$$

abgesehen vom Vorzeichen, die Krümmung aller derjenigen Flächenkurven in P darstellt, die in P die Fortschreitungsrichtung $(dv:du)$ haben und deren Hauptnormale in P insbesondere mit der Flächennormale von P zusammenfällt.

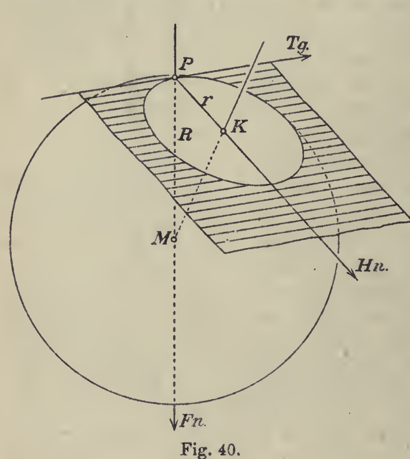


Fig. 40.

Nach (6) ist der vorhin in Fig. 39 konstruierte Punkt M der Krümmungsmittelpunkt aller dieser besonderen Flächenkurven. Da nun der Kreis mit dem Radius r, der K zum Mittelpunkte hat und in der Ebene der in Fig. 39 angegebenen Hauptnormale und Tangente liegt, auf derjenigen Kugel gelegen ist, die M zum Mittelpunkte hat und durch P geht, so folgt sofort der durch Fig. 40 erläuterte

Satz 2:[1] Die zu einem Flächenpunkte P gehörigen Krümmungskreise aller derjenigen Flächenkurven, die in P eine und dieselbe Tangente haben, werden durch die jeweils zugehörigen Schmiegungsebenen aus einer Kugel ausgeschnitten, die in P die Fläche berührt.

Insbesondere können wir durch P und die gewählte Tangente von P ebene Schnitte der Fläche legen. Alsdann bekommen wir ebene Flächenkurven, und es folgt:

Satz 3: Alle Flächenkurven, die durch einen gemeinsamen Punkt P der Fläche gehen und dort dieselbe Schmie-

---

[1] Dieser Satz wurde von Meusnier in seinem „Mémoire sur la courbure des surfaces", Mém des Savants étrangers 10. Bd. (lu 1776), Paris 1785, aufgestellt und heißt daher der Meusniersche Satz.

gungsebene haben, stimmen ebenda in der Krümmung mit derjenigen ebenen Kurve überein, in der die Fläche von der Schmiegungsebene geschnitten wird.

Normalschnitte des Flächenpunktes P heißen alle ebenen Flächenkurven, in denen die Fläche durch diejenigen Ebenen geschnitten wird, die die Flächennormale von P enthalten. Insbesondere versteht man unter dem zu einer Fortschreitungsrichtung $(dv:du)$ von P gehörigen Normalschnitte die ebene Flächenkurve, die in der Ebene der Flächennormale von P und der gewählten von P ausgehenden Richtung liegt. Dementsprechend bedeutet der zu einer Stelle P einer Flächenkurve gehörige Normalschnitt die ebene Flächenkurve, die in der Ebene durch die Flächennormale von P und die Kurventangente von P liegt. Hiernach läßt sich Satz 2 so ausdrücken:

Satz 4: Der Krümmungsmittelpunkt einer Stelle P einer Flächenkurve ist die senkrechte Projektion des Krümmungsmittelpunktes des zugehörigen Normalschnittes auf die zugehörige Schmiegungsebene der Kurve.

Im reellen Falle ergibt sich sofort:

Satz 5: Unter allen reellen Flächenkurven, die man mit gemeinsamer Tangente von einem reellen Punkte einer Fläche aus ziehen kann, hat der zugehörige Normalschnitt in diesem Punkte die geringste Krümmung.

Die Größe R, deren reziproker Wert in (7) angegeben wurde, dient zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes M des zur Fortschreitungsrichtung $(dv:du)$ von P gehörigen Normalschnittes; es sind nämlich $x + RX$, $y + RY$, $z + RZ$ die rechtwinkligen Koordinaten von M. Aber in I S. 231 waren im reellen Falle Vorschriften über das Vorzeichen der Krümmung einer Raumkurve gemacht worden; deshalb gibt (7), wie bemerkt wurde, die Krümmung des Normalschnittes nur abgesehen von Vorzeichen richtig an. Wir lassen nun für die Normalschnitte die seinerzeit gemachten Vorschriften fallen, nennen also $1:R$ stets die Krümmung des zur Fortschreitungsrichtung $(dv:du)$ gehörigen Normalschnittes an der Stelle P, wie auch der Wert (7) von $1:R$ ausfallen mag. Im reellen Falle wird alsdann der Krümmungsradius R des Normalschnittes positiv oder negativ gerechnet, je nachdem der Krümmungsmittelpunkt M auf der positiven oder negativen Flächennormale von P liegt. Wir erinnern hierbei daran, daß wir auch bei reellen ebenen Kurven in I S. 46 die Krümmung nicht absolut gemessen

haben. Die Normalschnitte sind ja ebene Kurven, und in ihren Ebenen ist die gemeinsame Flächennormale orientiert, so daß wir danach in der Lage sind, die Krümmung nach der einen Seite der Tangente hin von der nach der anderen Seite hin zu unterscheiden. Vgl. die Auseinandersetzungen in I S. 247.

Setzen wir zur Abkürzung ein für allemal

$$(8)\qquad \begin{cases} L = \mathsf{S}\, X x_{uu} = X x_{uu} + Y y_{uu} + Z z_{uu}, \\ M = \mathsf{S}\, X x_{uv} = X x_{uv} + Y y_{uv} + Z z_{uv}, \\ N = \mathsf{S}\, X x_{vv} = X x_{vv} + Y y_{vv} + Z z_{vv}, \end{cases}$$

so gibt (7):

$$(9)\qquad \frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

oder, wenn wir wieder $dv : du = k$ setzen:

$$(10)\qquad \frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2}.$$

Die Richtungskosinus X, Y, Z der Flächennormale sind nach XI (F) Funktionen der partiellen Ableitungen erster Ordnung von x, y, z nach u und v. Folglich sind die durch (8) definierten Größen L, M und N Funktionen der partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von x, y, z nach u und v, nämlich diese:

$$(11)\quad L = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_{uu} \\ y_u & y_v & y_{uu} \\ z_u & z_v & z_{uu} \end{vmatrix}, \quad M = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_{uv} \\ y_u & y_v & y_{uv} \\ z_u & z_v & z_{uv} \end{vmatrix}, \quad N = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_{vv} \\ y_u & y_v & y_{vv} \\ z_u & z_v & z_{vv} \end{vmatrix}$$

Wir nennen L, M und N die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der vorgelegten Fläche.[1]

Wir merken für später hier sogleich noch eine andere Schreibweise an: Differenzieren wir XI (I) partiell nach u und partiell nach v, so erhalten wir vier Formeln:

$$\mathsf{S}\, X_u x_u + \mathsf{S}\, X x_{uu} = 0, \qquad \mathsf{S}\, X_u x_v + \mathsf{S}\, X x_{uv} = 0,$$
$$\mathsf{S}\, X_v x_u + \mathsf{S}\, X x_{uv} = 0, \qquad \mathsf{S}\, X_v x_v + \mathsf{S}\, X x_{vv} = 0,$$

aus denen nach (8) folgt:

$$(12)\quad L = -\mathsf{S}\, X_u x_u, \qquad M = -\mathsf{S}\, X_u x_v = -\mathsf{S}\, X_v x_u, \qquad N = -\mathsf{S}\, X_v x_v.$$

Die Größen L, M, N sind sämtlich für beliebige Wertepaare u, v gleich Null, wenn die Fläche eine Ebene ist, denn dann sind die

[1] Gauss benutzte in seinen „Disquisitiones" (vgl. Anm. S. 6) statt dieser Größen die Größen DL, DM, DN, die er mit D, D', D'' bezeichnete. Wir benutzen als Fundamentalgrößen zweiter Ordnung die oben angegebenen nach dem Vorgange von Hoppe in seinem „Lehrbuch der analytischen Geometrie in zwei Teilen", 2. Teil, Leipzig 1890.

Richtungskosinus X, Y, Z der Normalen konstant, ihre Ableitungen also gleich Null, so daß nach (12) auch L, M und N gleich Null werden. Umgekehrt: Ist $L = M = N = 0$, so gibt (12) unter anderem

$$\mathbf{S}\, x_u X_u = 0, \qquad \mathbf{S}\, x_v X_u = 0.$$

Nach XI(H) ist aber auch

$$\mathbf{S}\, X X_u = 0.$$

Diese drei in X_u, Y_u, Z_u linearen homogenen Gleichungen haben nach XI(L) die von Null verschiedene Determinante D. Folglich müssen X_u, Y_u, Z_u gleich Null sein. Ebenso ergibt sich $X_v = Y_v = Z_v = 0$. Mithin sind X, Y, Z konstant. Aus XI(I), d. h. $\mathbf{S}\, X x_u = 0$ und $\mathbf{S}\, X x_v = 0$ schließt man weiterhin, daß zwischen x, y, z eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten besteht, die Fläche also eine Ebene ist. Daher ist bewiesen:

Satz 6: Die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung einer Fläche sind dann und nur dann auf der ganzen Fläche gleich Null, wenn die Fläche eine Ebene ist.

Nach S. 16 wird von Flächenpunkten, in denen $D = 0$ ist, stets abgesehen. In der Tat kann man auch für derartige Minimalpunkte (vgl. S. 23) die Fundmentalgrößen zweiter Ordnung gar nicht definieren. Denn ihre Normalen haben keine Richtungskosinus X, Y, Z. Die Formeln (8) und (12) sind also hier unbrauchbar. Ebenso auch die Formeln (11), weil darin D in den Nennern vorkommt.

Es sei noch hervorgehoben:

Satz 7: Die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung einer Fläche bleiben bei Ausführung von Bewegungen ungeändert.

Der Beweis ist so wie der des entsprechenden Satzes für die Fundamentalgrößen erster Ordnung auf S. 16. Wenn wir wie dort die neuen Koordinaten einführen:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a,\\ \bar{y} &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + b,\\ \bar{z} &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c,\end{aligned}$$

wobei die α_i, β_i, γ_i die in der Tafel I angegebenen Bedingungen erfüllen, wird

$$\bar{x}_u = \alpha_1 x_u + \alpha_2 y_u + \alpha_3 z_u$$

usw., ferner:

$$\bar{x}_v = \alpha_1 x_v + \alpha_2 y_v + \alpha_3 z_v$$

usw. Auch die zweiten Ableitungen $\bar{x}_{uu}$, $\bar{x}_{uv}$, $\bar{x}_{vv}$ usw. drücken sich

entsprechend durch die zweiten Ableitungen der ursprünglichen Koordinaten x, y, z aus. Berechnen wir nun die in (11) auftretenden Determinanten, geschrieben in $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, so ergibt das Multiplikationsgesetz der Determinanten sofort, daß sie gleich den in (11) selbst stehenden Determinanten, multipliziert mit

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

sind. Aber diese Determinante ist nach I (F) gleich Eins. Da ferner D bei Ausführung einer Bewegung nach S. 18 ungeändert bleibt, gilt dasselbe von L, M und N

Wenn man in dem in (9) vorkommenden Ausdrucke

$$L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2$$

für L, M und N die Werte (12), und zwar für M den einen wie auch den andern Wert je einmal benutzt, nimmt der Ausdruck die Form an:

$$-\mathsf{S}\,X_u x_u du^2 - \mathsf{S}\,X_u x_v du\,dv - \mathsf{S}\,X_v x_u du\,dv - \mathsf{S}\,X_v x_v dv^2,$$

oder

$$-\mathsf{S}\,(X_u du + X_v dv)(x_u\,du + x_v\,dv).$$

Also ist:

(13) $$L\,du^2 + 2\,M du\,dv + N dv^2 = -\,\mathsf{S}\,dX dx.$$

Diese Formel ist zuweilen nützlich. Sie hat einige Analogie mit der Formel für das Quadrat des Bogenelements:

$$E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 = \mathsf{S}\,dx^2.$$

Danach läßt sich (9) auch so schreiben:

(14) $$\frac{1}{R} = -\,\frac{\mathsf{S}\,dX\,dx}{\mathsf{S}\,dx^2}.$$

Liegt die Fläche in der Darstellungsform

$$z = f(x, y)$$

vor und sind p, q, r, s, t die in (3) auf S. 1 definierten Größen, so ist wie in (7) auf S. 15:

(15) $$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2$$

und:

$$D = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

also nach (11):

(16) $$L = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Sind ferner α, β, γ wie oben die Richtungskosinus der Tangente der betrachteten Kurve auf der Fläche, so wird

$$\alpha:\beta:\gamma = dx:dy:dz = dx:dy:(p\,dx + q\,dy),$$

also:

(17)
$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{dx}{\sqrt{(1+p^2)dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1+q^2)dy^2}}, \\ \beta = \dfrac{dy}{\sqrt{(1+p^2)dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1+q^2)dy^2}}, \\ \gamma = \dfrac{p\,dx + q\,dy}{\sqrt{(1+p^2)dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1+q^2)dy^2}}, \end{cases}$$

so daß (9) gibt:

(18)
$$\frac{1}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Aber der Allgemeinheit halber werden wir diese Formel nicht anwenden, sondern bei den allgemeinen Parametern u und v bleiben.

§ 2. Normalschnitte und Hauptkrümmungsrichtungen.

Nach Satz 4, S. 121, kennt man die Krümmung einer Flächenkurve in einem Flächenpunkte P, sobald man weiß, welchen Winkel ω ihre Hauptnormale mit der Flächennormale bildet, und sobald man überdies die Krümmung des zugehörigen Normalschnittes kennt.

Wir beschränken uns daher von jetzt an auf die Betrachtung der Krümmungen der verschiedenen Normalschnitte eines Flächenpunktes P oder (u, v). Für den zur Fortschreitungsrichtung $(dv:du)$ oder k gehörigen Normalschnitt wird sie nach (9) und (10), S. 122, angegeben durch

(1)
$$\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

oder

(2)
$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2}.$$

Die Krümmung wird dabei gemessen, wie auf S. 121 erläutert wurde. Im reellen Falle insbesondere ist sie positiv oder negativ, je nachdem der Krümmungsmittelpunkt auf der positiven oder negativen Seite der Tangentenebene des Flächenpunktes P liegt.

Wollen wir nun die Krümmung der einfach unendlich vielen Normalschnitte eines und desselben Flächenpunktes P miteinander vergleichen, so haben wir die Größe k veränderlich zu lassen. Dabei sind drei verschiedene Fälle denkbar. Dadurch, daß wir die besonderen Fälle zuerst erledigen, erreichen wir, daß wir beim dritten — allgemeinen — Falle wissen, welche besonderen Punkte und Flächen dem allgemeinen Gesetze nicht gehorchen.

Erster (besonderer) Fall: Die rechte Seite der Formel (2) enthält nur scheinbar k. Dies tritt ein, wenn für den betrachteten Punkt P entweder insbesondere $L = M = N = 0$ oder allgemeiner

(3) $$L : M : N = E : F : G$$

ist. Alsdann haben alle Normalschnitte in P entweder die Krümmung Null oder, falls (3) gilt, denselben Krümmungsmittelpunkt. Die Annahme $L = M = N = 0$ ordnen wir als Spezialfall der Annahme (3) unter, und wir nennen den Punkt P unter den gemachten Voraussetzungen einen Nabelpunkt.[1] Im allgemeinen stellt (3) zwei Gleichungen zwischen u und v dar, d. h. auf einer beliebigen Fläche werden nur vereinzelte Nabelpunkte zu erwarten sein. Auf gewissen Flächen aber gibt es Kurven von lauter Nabelpunkten, ja es gibt Flächen, deren Punkte sämtlich Nabelpunkte sind. Insbesondere gehören dazu nach Satz 6, S. 123, die Ebenen. Für den Fall einer Kurve von lauter Nabelpunkten liefern die Rotationsflächen ein einfaches Beispiel.

1. Beispiel: Wie in (10), S. 48, liege eine Rotationsfläche

$$x = p(u)\cos v\,, \qquad y = p(u)\sin v\,, \qquad z = q(u)$$

vor, deren Nullmeridian ($v = 0$) in der xz-Ebene verläuft und die Gleichungen hat:

$$x = p(u)\,, \qquad y = 0\,, \qquad z = q(u)\,.$$

Es bedeute wieder u die Bogenlänge des Meridians, es sei also wie in (11), S. 48:

$$E = 1\,, \qquad F = 0\,, \qquad G = p^2.$$

Setzen wir — was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist — voraus, daß für alle Punkte des Meridians ($v = 0$) die Koordinate $x = p(u)$ im reellen Falle positiv sei, so kommt $D = p(u)$, und dies dürfen wir auch im imaginären Falle annehmen. Nach (11), S. 122, ist nun:

$$L = p'q'' - q'p''\,, \qquad M = 0\,, \qquad N = pq'.$$

Da u die Bogenlänge des Nullmeridians und demnach

$$p'^2 + q'^2 = 1\,, \qquad p'p'' + q'q'' = 0$$

ist, kann man auch schreiben:

$$L = -\frac{p''}{q'}.$$

Die Bedingungen (3) für den Nabelpunkt geben mithin hier nur eine Gleichung:

$$pp'' + q'^2 = 0\,.$$

Nach Satz 18, I S. 39, sind daher diejenigen Punkte des Nullmeridians Nabelpunkte, deren Krümmungsmittelpunkte auf der Achse der

[1] Nach Monge, dessen grundlegendes Werk: „Application de l'analyse à la géométrie", 4. (noch vom Verfasser selbst besorgte) Auflage Paris 1809, 5. (von Liouville besorgte) Auflage, Paris 1850, wir schon in I S. 203 genannt haben.

Rotationsfläche liegen, und sie erzeugen bei der Drehung des Meridians um die Achse solche Breitenkreise, deren Punkte lauter Nabelpunkte sind. Ist die Rotationsfläche insbesondere eine Kugel, so trifft dies für alle Breitenkreise zu.[1]

Wir wollen jetzt alle Flächen, deren Punkte sämtlich Nabelpunkte sind, bestimmen. Die Annahme $L = M = N = 0$ gibt nach Satz 6, S. 123, die Ebenen. Wir wenden uns zur Annahme (3). Die Bedingungen (3) müssen wegen ihrer geometrischen Bedeutung für alle Punkte einer solchen Fläche ohne Rücksicht auf das gerade gewählte Parametersystem bestehen. Wir benutzen zur Vereinfachung der Formeln die Minimalkurven der Fläche als Parameterlinien. Dann ist das Quadrat des Bogenelements nach Satz 14, S. 44, von der Form:

$$ds^2 = 2F\,du\,dv,$$

so daß $E = G = 0$ ist. Nach (3) soll jetzt also auch $L = N = 0$ sein.

Sehen wir zu, was zunächst aus $L = 0$ folgt. Da für die Richtungskosinus X, Y, Z der Normale nach XI (H)

$$XX_u + YY_u + ZZ_u = 0$$

und wegen $L = 0$ nach (12), S. 122,

$$x_u X_u + y_u Y_u + z_u Z_u = 0$$

ist, ergibt sich:

$$X_u : Y_u : Z_u = (Yz_u - Zy_u) : (Zx_u - Xz_u) : (Xy_u - Yx_u).$$

Nach XI (K) und wegen $E = 0$ können wir hierfür schreiben:

(4) $$X_u : Y_u : Z_u = x_u : y_u : z_u.$$

Die Bedingung $N = 0$ ist noch nicht benutzt worden. Sie gibt entsprechend:

$$X_v : Y_v : Z_v = x_v : y_v : z_v.$$

Hiernach dürfen wir setzen:

(5) $$X_u = \lambda x_u, \quad Y_u = \lambda y_u, \quad Z_u = \lambda z_u;$$
$$X_v = \mu x_v, \quad Y_v = \mu y_v, \quad Z_v = \mu z_v.$$

Aus der zweiten Gleichung (12), S. 122, folgt nun

$$(\lambda - \mu)\,\mathbf{S}\,x_u x_v = 0 \quad \text{oder} \quad (\lambda - \mu) F = 0.$$

Da $E = G = 0$ und also $F \neq 0$ ist (vgl. S. 15), muß somit $\lambda = \mu$ sein. Außer den drei Formeln (5) haben wir also noch diese:

(6) $$X_v = \lambda x_v, \quad Y_v = \lambda y_v, \quad Z_v = \lambda z_v.$$

---

[1] K. Kommerell bestimmte in seinen „Beiträgen zur Flächentheorie", Archiv f. Math. u. Phys. 3. Reihe, 17. Bd. (1911), alle reellen Flächen, die gegebene Kurven von Nabelpunkten enthalten.

Es muß aber sein:

$$\frac{\partial X_u}{\partial v} = \frac{\partial X_v}{\partial u}$$

usw. Somit folgt aus (5) und (6):

$$\lambda_v x_u - \lambda_u x_v = 0, \quad \lambda_v y_u - \lambda_u y_v = 0, \quad \lambda_v z_u - \lambda_u z_v = 0.$$

Weil $y_u z_v - z_u y_v$, $z_u x_v - x_u z_v$ und $x_u y_v - y_u x_v$ nach S. 6 nicht sämtlich gleich Null sind, muß somit $\lambda_u = \lambda_v = 0$ und daher $\lambda =$ konst. sein. Ist $\lambda = 0$, so sind X, Y, Z nach (5) und (6) konstant; die Fläche hat dann lauter parallele Normalen und ist nach S. 123 eine Ebene. Ist $\lambda =$ konst., aber $\neq 0$, so folgt aus (5) und (6):

$$X = \lambda x + a, \quad Y = \lambda y + b, \quad Z = \lambda z + c \quad (a, b, c = \text{konst.}),$$

daher wegen $\mathbf{S} X^2 = 1$:

$$(\lambda x + a)^2 + (\lambda y + b)^2 + (\lambda z + c)^2 = 1.$$

Dies aber ist die Gleichung einer Kugel. Offenbar sind auch alle Punkte einer Kugel Nabelpunkte. Daher:

Satz 8: Eine Fläche hat dann und nur dann lauter Nabelpunkte, wenn sie eine Kugel oder Ebene ist.

Wir können aus $L = 0$ auch wie folgt schließen: Die erste Formel (8), S. 122, gibt

$$X x_{uu} + Y y_{uu} + Z z_{uu} = 0.$$

Da $E = \mathbf{S} x_u^2 = 0$ ist, wird auch $E_u = 0$, also:

$$x_u x_{uu} + y_u y_{uu} + z_u z_{uu} = 0,$$

mithin kommt:

$$x_{uu} : y_{uu} : z_{uu} = (Y z_u - Z y_u) : (Z x_u - X z_u) : (X y_u - Y x_u),$$

woraus wegen XI (K) und $E = 0$ folgt:

$$x_{uu} : y_{uu} : z_{uu} = x_u : y_u : z_u,$$

oder:

$$\frac{\partial \log x_u}{\partial u} = \frac{\partial \log y_u}{\partial u} = \frac{\partial \log z_u}{\partial u}.$$

Setzen wir diese drei Differentialquotienten gleich

$$\frac{\partial \log \varrho}{\partial u},$$

indem wir unter ϱ eine Funktion von u und v verstehen, so kommt:

(7) $$x_u = F_1(v)\varrho, \quad y_u = F_2(v)\varrho, \quad z_u = F_3(v)\varrho,$$

wo F_1, F_2, F_3 Funktionen von v allein sind. Natürlich ist hierbei $\varrho \neq 0$ und wegen $E = 0$ noch

(8) $$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 0.$$

Längs der Parameterlinien (v) wachsen x, y, z um Differentiale proportional zu x_u, y_u, z_u, die sich nach (7) zueinander verhalten wie die Funktionen V_1, V_2, V_3 von v und daher längs jeder einzelnen Kurve (v) konstante Verhältnisse haben. Die Minimalkurven (v) sind also Geraden.

Dies läßt sich umkehren: Sind die Parameterkurven (u) und (v) Minimalkurven und insbesondere die Kurven (v) Minimalgeraden, so müssen die Verhältnisse $x_u : y_u : z_u$ frei von u sein, d. h. es müssen dann Gleichungen von der Form (7) bestehen. Berechnen wir auf Grund dieser Gleichungen x_{uu}, y_{uu}, z_{uu}, so lehrt die erste Formel (11), S. 122, daß $L = 0$ ist. Daher:

Satz 9: Sind die Parameterlinien (u) und (v) einer Fläche Minimalkurven, so ist die Fundamentalgröße L dann und nur dann auf der ganzen Fläche gleich Null, wenn die Kurven (v) Minimalgeraden sind.

Wenn auch $N = 0$ ist, sind die Parameterlinien (u) ebenfalls Minimalgeraden. Daher:

Satz 10: Die Flächen, deren Punkte sämtlich Nabelpunkte sind, sind mit denjenigen Flächen identisch, die zwei verschiedene Scharen von Minimalgeraden enthalten.

Nach Satz 8 folgt hieraus:

Satz 11: Außer den Ebenen und Kugeln gibt es keine Fläche mit zwei verschiedenen Scharen von Minimalgeraden.

Wir hatten tatsächlich schon in Satz 32, S. 78, gesehen, daß jede Kugel zwei Scharen von Minimalgeraden enthält.

Zweiter (besonderer) Fall:[1] Die rechte Seite der Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2} \tag{9}$$

enthält zwar nicht nur scheinbar k, läßt sich aber mit einem in k linearen Faktor kürzen. In diesem Falle ist $1 : R$ eine linear gebrochene Funktion von k. Dasselbe gilt dann auch bei Einführung neuer Parameter. Denn wenn u und v gleich Funktionen zweier neuer Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ gesetzt werden und unter $\bar{k}$ die Größe $d\bar{v} : d\bar{u}$ verstanden wird, ist

[1] Über diesen Fall sagen die Lehrbücher der Flächentheorie nichts. Wir finden ihn in Salmon-Fiedlers „Analytischer Geometrie des Raumes, II. Teil“, 3. Aufl., Leipzig 1880, in der Anmerkung 16) auf S. XXIX kurz erwähnt. Untersucht wurde er von Stäckel, „Beiträge zur Flächentheorie“, Leipziger Berichte 1896.

$$k = \frac{dv}{du} = \frac{\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\,\bar{k}}{\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\,\bar{k}},$$

also eine linear gebrochene Funktion von $\bar{k}$. Setzen wir sie in die Formel für $1:R$ ein, so wird mithin $1:R$ auch eine linear gebrochene Funktion von $\bar{k}$,

Die Bedingung für den vorliegenden Fall kann auch so ausgesprochen werden: Die beiden in k quadratischen Gleichungen

(10) $$E + 2Fk + Gk^2 = 0, \qquad L + 2Mk + Nk^2 = 0$$

sollen eine Wurzel k gemein haben. Für diese gemeinsame Wurzel ist

(11) $$1 : 2k : k^2 = (FN - GM) : (GL - EN) : (EM - FL),$$

daher:

(12) $$(GL - EN)^2 - 4(EM - FL)(FN - GM) = 0.$$

Unter dieser Bedingung also hat $1:R$ die Form:

(13) $$\frac{1}{R} = \frac{\alpha k + \beta}{\gamma k + \delta},$$

worin α, β, γ, δ Funktionen von u und v bedeuten.

Wir haben in Satz 52, S. 105, gesehen, daß die vier Tangenten des Punktes P oder (u, v), die zu vier Werten von k gehören, dasselbe Doppelverhältnis haben wie die vier Werte von k selbst. Die vier Tangenten sind die Schnittlinien der vier zugehörigen Normalschnittebenen mit der Tangentenebene. Diese vier Ebenen haben nach I S. 452 dasselbe Doppelverhältnis. Nach (13) und nach Satz 49, I S. 446, haben die Krümmungsmittelpunkte der vier Normalschnitte ebenfalls dies Doppelverhältnis. Daher liegt hier der Fall vor, daß irgend vier Normalschnittebenen des Punktes (u, v) dasselbe Doppelverhältnis wie die zugehörigen vier Krümmungsmittelpunkte auf der Normalen des Punktes (u, v) haben. Siehe Fig. 41.[1]

Fig. 41.

Die analytische Bedingung (12) für Flächenpunkte (u, v) von der hier betrachteten Art ist eine Gleichung zwischen u und v. Demnach kann es auf der Fläche gewisse Kurven geben, deren Punkte sämtlich diese Beschaffenheit haben. Aber es ist möglich, daß zugleich die Bedingungen (3) erfüllt, die Punkte also Nabelpunkte sind.

[1] In einem regulären Flächenpunkte kann, wie nachher gezeigt wird, dieser Fall nur dann eintreten, wenn der Punkt imaginär ist. Die Fig. 41 ist deshalb nur schematisch aufzufassen wie schon Fig. 107, I S. 454.

2. Beispiel: Bei der im 1. Beispiele betrachteten Rotationsfläche lautet die Bedingung (12) so:

$$\frac{p}{q'}(pp'' + q'^2) = 0.$$

Die Annahme $p = 0$ führt zu den singulären Schnittpunkten der Fläche mit ihrer Achse, und die Annahme $pp'' + q'^2 = 0$ gibt, wie wir sahen, lauter Nabelpunkte. Rotationsflächen haben also keine Punkte von der hier betrachteten Art.

Reelle reguläre Punkte von der hier betrachteten Art, kann es nicht geben, denn die gemeinsame Wurzel k der Gleichungen (10) ist im reellen Falle imaginär, da die erste Gleichung (10) ja dann keine reellen Wurzeln hat. Nun aber sind die Glieder der Proportion (11) auf der rechten Seite für eine reelle Fläche mit reellen Parametern stets reell; also ergibt sich ein Widerspruch.

Es gibt imaginäre Flächen, die überall Punkte von der jetzt betrachteten Art haben. Um sie zu bestimmen, benutzen wir wie oben die Minimalkurven der Fläche als Parameterlinien (u) und (v). Dann ist $E = G = 0$, $F \neq 0$, so daß die Bedingung (12) einfach $LN = 0$ ergibt. Nehmen wir $L = 0$ an, so muß $N \neq 0$ vorausgesetzt werden, weil sonst der Fall der Nabelpunkte vorläge. Nach Satz (9) sagen die Bedingungen $E = G = 0$ und $L = 0$, $N \neq 0$ aus, daß die Parameterlinien (v) Minimalgeraden sind, dagegen die Parameterlinien (u) nicht. Mithin gilt der

Satz 12: Diejenigen Flächen, bei denen in jedem Punkte das Krümmungsmaß eines Normalschnittes eine linear gebrochene Funktion der zugehörigen Tangentenrichtung $dv:du$ ist, bei denen also vier Normalschnittebenen eines Punktes stets dasselbe Doppelverhältnis wie die vier zugehörigen Krümmungsmittelpunkte haben, sind identisch mit denjenigen Flächen, die eine Schar von geradlinigen und eine Schar von nicht geradlinigen Minimalkurven enthalten. Sie sind sämtlich imaginär.

Ferner gilt der

Satz 13: Die rechte Seite der Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2}$$

für das Krümmungsmaß des zu einer Fortschreitungsrichtung k oder $dv:du$ von einem Flächenpunkte (u, v) aus gehörigen Normalschnittes der Fläche ist dann und nur dann frei von k oder wenigstens mit einem in k linearen Faktor zu kürzen, wenn die Größe

$$(GL - EN)^2 - 4(EM - FL)(FN - GM)$$

für den betrachteten Punkt (u, v) gleich Null ist.

Dritter (allgemeiner) Fall: Die rechte Seite der Formel

$$(14) \qquad \frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2}$$

ist weder frei von k noch mit einem in k linearen Faktor zu kürzen. Dieser Fall liegt in einem Punkte allgemeiner Lage jeder Fläche vor, die keine Schar von Minimalgeraden enthält. Insbesondere tritt dieser Fall in jedem regulären Punkte einer reellen Fläche ein, wenn man nur die Ebenen und Kugeln ausschließt.

Die quadratische gebrochene Funktion von k, als die sich die Krümmung des zu k gehörigen Normalschnittes nach (14) darstellt, hat für zwei verschiedene Werte von k den Differentialquotienten Null. Denn Nullsetzen der Ableitung von (14) nach k ergibt:

$$(15) \qquad (M + Nk)(E + 2Fk + Gk^2) - (F + Gk)(L + 2Mk + Nk^2) = 0$$

oder:

$$(16) \qquad (EM - FL) - (GL - EN)k + (FN - GM)k^2 = 0$$

oder auch:

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} k^2 & E & L \\ -k & F & M \\ 1 & G & N \end{vmatrix} = 0.$$

Wir haben dabei den bei der Differentiation auftretenden Nenner

$$(E + 2Fk + Gk^2)^2$$

fortgelassen, und dies darf geschehen, weil er für keine Wurzel k der quadratischen Gleichung (15) verschwindet. Wäre er nämlich für eine Wurzel k von (15) gleich Null, so würde für diese Wurzel aus (15) folgen:

$$(F + Gk)(L + 2Mk + Nk^2) = 0.$$

Aber der Inhalt der zweiten Klammer darf für die Wurzel nicht verschwinden, weil sich sonst der Bruch (14) mit einer linearen Funktion von k kürzen ließe. Demnach müßte für die fragliche Wurzel $F + Gk = 0$ sein. Dies aber würde bedeuten, daß die quadratische Gleichung

$$E + 2Fk + Gk^2 = 0$$

eine Doppelwurzel hätte, was nur dann eintreten könnte, wenn $EG - F^2$ oder D^2 gleich Null wäre. Aber solche Punkte der Fläche, für die D^2 verschwindet, sind nach S. 18 ausgeschlossen.

Wir bezeichnen die beiden Wurzeln k von (16) oder (17) mit k_1 und k_2. Dann ist:

$$(18) \qquad k_1 + k_2 = \frac{GL - EN}{FN - GM}, \qquad k_1 k_2 = \frac{EM - FL}{FN - GM}.$$

Da nun $FN - GM$, $GL - EN$ und $EM - FL$ bzw. mit E, F, G multipliziert die Summe Null haben, ebenso bzw. mit L, M, N multipliziert, folgt weiterhin:

$$(19) \qquad \begin{cases} E + F(k_1 + k_2) + G k_1 k_2 = 0, \\ L + M(k_1 + k_2) + N k_1 k_2 = 0. \end{cases}$$

Umgekehrt: Erfüllen k_1 und k_2 die beiden Gleichungen (19), so bestehen die Gleichungen (18), d. h. dann sind k_1 und k_2 die Wurzeln k der quadratischen Gleichung (16) oder (17).

Auf S. 107 traten unter (9) entsprechend wie (19) gebaute Gleichungen für zwei Größen k und $\varkappa$ auf. Ebenso ist die Gleichung (17) entsprechend wie die Gleichung (12) auf S. 108 gebaut. Deshalb läßt sich geradeso wie auf S. 109 beweisen, daß k_1 und k_2 im reellen Falle ebenfalls reell sind.

Stets sind k_1 und k_2 voneinander verschieden, denn wäre es anders, so würde (19) zeigen, daß sich die quadratisch gebrochene Funktion (14) entgegen der gemachten Annahme mit einer linearen Funktion von k kürzen ließe. Die erste Gleichung (19) besagt nach Satz 13, S. 39, daß die Fortschreitungsrichtungen (k_1) und (k_2) zueinander senkrecht sind. Keine ist die einer Minimaltangente, da $E + 2Fk + G k^2$ wie gesagt weder für $k = k_1$ noch für $k = k_2$ gleich Null wird. Die geometrische Bedeutung der zweiten Gleichung (19) können wir erst später (in § 9) angeben. Schließlich ist noch zu bemerken, daß der Wert (14) von $1:R$ weder für $k = k_1$ noch für $k = k_2$ unendlich groß wird, weil eben der Nenner von Null verschieden ausfällt.

Da k_1 und k_2 diejenigen beiden Werte von k sind, für die der Differentialquotient der Funktion (14) hinsichtlich k verschwindet, kann die Krümmung $1:R$ eines Normalschnittes im reellen Falle nur für $k = k_1$ oder $k = k_2$ ein Maximum oder Minimum haben. Die Entscheidung hängt von dem Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten der Funktion (14) hinsichtlich k ab. Weil diese Funktion ein Bruch ist, hat ihre zweite Ableitung für $k = k_1$ oder $k = k_2$ nach bekannter Regel dasselbe Vorzeichen wie die Differenz:

$$(E + 2Fk + Gk^2)\frac{d^2(L + 2Mk + Nk^2)}{dk^2} - (L + 2Mk + Nk^2)\frac{d^2(E + 2Fk + Gk^2)}{dk^2}$$

oder also wie der Ausdruck:

(20) $$EN - GL + 2k(FN - GM).$$

Er wird weder für $k = k_1$ noch für $k = k_2$ gleich Null, weil die quadratische Gleichung (16) keine Doppelwurzel hat. Im reellen Falle treten demnach stets für $k = k_1$ und $k = k_2$ und nur für diese beiden Werte von k Extremwerte der Krümmung $1:R$ auf. Schreiben wir die quadratische Gleichung (16) für den Augenblick abgekürzt so:

(21) $$A + Bk + Ck^2 = 0,$$

so wird der Ausdruck (20) gleich $B + 2Ck$. Da sein Vorzeichen über das Maximum oder Minimum im Falle $k = k_1$ oder $k = k_2$ entscheidet und da er für die beiden reellen und verschiedenen Wurzeln k_1 und k_2 von (21) verschiedene Vorzeichen hat, ergibt sich:

Im reellen Falle tritt für einen der beiden Werte k_1 und k_2 von k ein Maximum und für den anderen ein Minimum der Krümmung $1:R$ des Normalschnittes ein.

Zur Bestimmung der zu $k = k_1$ und $k = k_2$ gehörigen Werte von $1:R$ ziehen wir aus (14) und (15) die Gleichung:

(22) $$(M + Nk)R - (F + Gk) = 0 \qquad (k = k_1, k_2),$$

woraus folgt:

(23) $$k = -\frac{MR - F}{NR - G} \qquad (k = k_1, k_2).$$

Setzen wir dies in (17) ein, so kommt zunächst:

$$\begin{vmatrix} (MR - F)^2 & E & L \\ (MR - F)(NR - G) & F & M \\ (NR - G)^2 & G & N \end{vmatrix} = 0.$$

Zur Vereinfachung subtrahieren wir von der ersten Reihe das $(G - NR)$fache der zweiten und das $(NR^2 - GR)$fache der dritten. Dann wird das zweite und dritte Element der ersten Reihe gleich Null, so daß bleibt:

(24) $$(LN - M^2)R^2 - (EN - 2FM + GL)R + (EG - F^2) = 0.$$

Diese Gleichung liefert die zu k_1 und k_2 gehörigen Werte R_1 und R_2 von R, die wir aber auch, wenn k_1 und k_2 gefunden sind, aus (22) berechnen können.

Die Krümmungen $1:R_1$ und $1:R_2$ genügen der quadratischen Gleichung:

(25) $$(LN - M^2) - (EN - 2FM + GL)\frac{1}{R} + (EG - F^2)\frac{1}{R^2} = 0.$$

Hiernach ist

$$(26)\quad \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2},\qquad \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

Künftig bezeichnen wir diese beiden Werte mit H und K:

$$(27)\qquad H=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2},\qquad K=\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}\,.$$

Man nennt die beiden Richtungen (k_1) und (k_2) durch P, für die der Krümmungsradius des Normalschnittes im reellen Falle ein Maximum oder Minimum hat oder, allgemeiner gesagt, die Ableitung von $1:R$ nach k gleich Null ist, die Hauptkrümmungsrichtungen des Flächenpunktes P, entsprechend die Radien R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien, ihre reziproken Werte die Hauptkrümmungen und die zugehörigen Mittelpunkte die Hauptkrümmungsmittelpunkte des Flächenpunktes.[1]

Wir haben gefunden:

Satz 14: Liegt eine Fläche mit den Parametern u, v vor, die keine Schar von Minimalgeraden enthält, so gibt es unter den Normalschnitten eines Flächenpunktes von allgemeiner Lage zwei zueinander senkrechte und im reellen Falle reelle Schnitte, für die die Ableitung der Krümmung eines Normalschnittes nach der zugehörigen Fortschreitungsrichtung gleich Null wird. Die Summe H und das Produkt K der diesen beiden ausgezeichneten Normalschnitten zukommenden Krümmungen haben die Werte:

$$H=\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2},\qquad K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},$$

ausgedrückt mittels der Fundamentalgrößen E, F, G und L, M, N, während die Fortschreitungsrichtungen (k) der beiden ausgezeichneten Normalschnitte durch die quadratische Gleichung

$$\begin{vmatrix} k^2 & E & L \\ -k & F & M \\ 1 & G & N \end{vmatrix}=0$$

bestimmt sind.

[1] Die ersten Untersuchungen über die Krümmung der Flächenkurven verdankt man Euler, der in der wichtigen Arbeit: „Recherches sur la courbure des surfaces“, Mém. de l'Acad. des Sciences de Berlin, Bd. 16 1760 (hrsg. 1767), die Krümmungen der Normalschnitte, die Hauptkrümmungsrichtungen und ihre Radien zuerst bestimmt hat.

Und ferner iusbesondere für den reellen Fall:

Satz 15: Unter den reellen Normalschnitten eines Punktes einer reellen Fläche, die keine Ebene und keine Kugel ist, gibt es stets einen, für den die Krümmung ihr Maximum hat, und einen, für den sie ihr Minimum hat. Die Ebenen dieser beiden Normalschnitte sind zueinander senkrecht, und diese Normalschnitte enthalten die Hauptkrümmungen des Flächenpunktes.

3. Beispiel: Bei der gemeinen Schraubenfläche

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = q v$$

ist nach dem 2. Beispiele, S. 73 u. f., $E = 1$, $F = 0$ und $G = u^2 + q^2$, also auch D^2 gleich $u^2 + q^2$. Ferner gibt die Anwendung der Formeln (11), S. 122:

$$L = 0, \qquad M = -\frac{q}{D}, \qquad N = 0.$$

Satz 14 liefert daher:

$$H = 0, \qquad K = -\frac{q^2}{(u^2 + q^2)^2}.$$

$H = 0$ bedeutet: Bei der gemeinen Schraubenfläche sind in jedem Punkte die beiden Hauptkrümmungsradien einander entgegengesetzt gleich. Die quadratische Gleichung für die beiden Hauptkrümmungsrichtungen k ist hier:

$$k^2 = \frac{1}{u^2 + q^2}.$$

Die beiden Hauptkrümmungsradien, die die Wurzeln R der Gleichung (24) sind, haben niemals gleiche Werte, denn wenn die Gleichung eine Doppelwurzel hätte, müßte dasselbe von der Gleichung (16) gelten, da die Bedingung für eine Doppelwurzel bei beiden Gleichungen zu derselben Formel führt. Wir formulieren also noch den

Satz 16: Die beiden Hauptkrümmungsradien eines Flächenpunktes einer Fläche, die keine Schar von Minimalgeraden enthält, sind stets voneinander verschieden.

Nur bei solchen Flächen, die keine Schar von Minimalgeraden haben, sind die Hauptkrümmungsradien in einem allgemeinen Punkte wohl definiert. Hat eine Fläche zwei Scharen von Minimalgeraden, d. h. ist sie eine Ebene oder Kugel, vgl. Satz 11, so haben alle Normalschnitte eines Punktes dieselbe Krümmung, weil in diesem Falle die rechte Seite von (14) frei von k ist. Dies hindert nicht, daß man zuweilen Sätze, die sich auf die beiden Hauptkrümmungsradien beziehen, auch auf die Ebenen und Kugeln ausdehnen kann, indem man dann in einem Flächenpunkte irgend zwei zueinander

senkrechte Normalschnitte die Stelle derjenigen beiden vertreten läßt, in denen die Hauptkrümmungen vorkommen.

Nach der grundlegenden Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2}$$

sind die Krümmungen der Normalschnitte eines Flächenpunktes stets an dasselbe allgemeine Gesetz gebunden. Nur die Koeffizienten L, M, N und E, F, G in der Formel werden für verschiedene Punkte (u, v) verschiedene Werte haben. Aber man kann leicht geometrisch reelle Flächen herstellen, bei denen dies allgemeine Gesetz für einen gewissen reellen Punkt nicht gilt, indem man nämlich in allen Ebenen durch die z-Achse in irgend einer stetigen Art Kreise konstruiert, die durch den Anfangspunkt gehen und ihre Mitten auf der z-Achse haben. Die Gesamtheit dieser einfach unendlich vielen Kreise bildet dann eine Fläche, auf der jenes Gesetz für den Anfangspunkt nicht zu gelten braucht.[1] Aber bei allen derartigen Flächen ist der Anfangspunkt, wie man leicht sieht, ein singulärer Punkt.

§ 3. Hauptkrümmungen bei einer Rotationsfläche.

Wir wollen die Ergebnisse des zweiten Paragraphen auf eine beliebige Rotationsfläche anwenden. Die Achse der Fläche wählen wir wie im Beispiele auf S. 47 u. f. als z-Achse, so daß

(1) $$x = p(u)\cos v, \quad y = p(u)\sin v, \quad z = q(u)$$

die Gleichungen der Fläche sind und u die Bogenlänge der Meridiane bedeutet, also $p'^2 + q'^2 = 1$ ist. Im reellen Falle setzen wir dabei wie auf S. 56 voraus, daß $p(u) > 0$ sei. Auch können wir dann die Bogenlänge u positiv im Sinne der wachsenden Koordinate z annehmen, d. h. $q' > 0$ voraussetzen. Wie auf S. 126 ist nun:

(2) $$\begin{cases} E = 1, \quad F = 0, \quad G = p^2, \quad D = p, \\ L = -\dfrac{p''}{q'}, \quad M = 0, \quad N = pq'. \end{cases}$$

Nach XI (F) kommt ferner:

(3) $$X = -q'\cos v, \quad Y = -q'\sin v, \quad Z = p'.$$

Jede Flächennormale liegt hier in der Ebene des Meridians, der durch den betrachteten Flächenpunkt (u, v) geht; die Flächennormalen

[1] Hierauf machte Poisson in seinem „Mémoire sur la courbure des surfaces“, Journ. de l'École polyt., cah. 21 (1832), aufmerksam.

schneiden also die z-Achse. Insbesondere ergibt sich für den Nullmeridian ($v = 0$), daß $X = -q'$, $Y = 0$, $Z = p'$, also X im reellen Falle negativ wird. Dies bedeutet, daß die Flächennormale positiv im Sinne vom Flächenpunkte (u, v) nach der z-Achse hin ist. Die Gleichung des Satzes 14, S. 135, für k_1 und k_2 ist hier: $k = 0$. Sie hat, aufgefaßt als quadratische Gleichung, die Wurzeln $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$. Aus (14), S. 132, ergeben sich die zugehörigen Hauptkrümmungsradien:

$$R_1 = -\frac{q'}{p''}, \quad R_2 = \frac{p}{q'}. \tag{4}$$

Nach S. 121 sind

$$\mathfrak{x} = x + XR, \quad \mathfrak{y} = y + YR, \quad \mathfrak{z} = z + ZR$$

die Koordinaten des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes für $R = R_1$ bezw. $R = R_2$. Mithin gibt $k_1 = 0$ für den Punkt P oder (u, 0) des Nullmeridians ($v = 0$) als Koordinaten des einen Hauptkrümmungsmittelpunktes:

$$\mathfrak{x}_1 = p + \frac{q'^2}{p''}, \quad \mathfrak{y}_1 = 0, \quad \mathfrak{z}_1 = q - \frac{p'q'}{p''}.$$

Da $p'^2 + q'^2 = 1$, also $p'p'' + q'q'' = 0$ ist, wird:

$$\mathfrak{z}_1 = q + \frac{p'^2}{q''}.$$

Dieser Hauptkrümmungsmittelpunkt ist nach Satz 18, I S. 39, der Krümmungsmittelpunkt $\mathfrak{K}$ des in der xz-Ebene gelegenen Nullmeridians ($v = 0$). Dies war vorauszusehen, denn $k_1 = 0$ bedeutet $dv = 0$, d. h. der zu k_1 gehörige Normalschnitt ist der Meridian. Ferner bedeutet $k_2 = \infty$ oder $du = 0$, daß die zweite Hauptkrümmungsrichtung durch die Tangente des Breitenkreises (u) von P angegeben wird. (Siehe Fig. 42.) Der zugehörige Hauptkrümmungsmittelpunkt hat die Koordinaten:

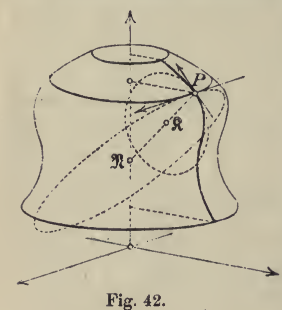


Fig. 42.

$$\mathfrak{x}_2 = 0, \quad \mathfrak{y}_2 = 0, \quad \mathfrak{z}_2 = q + \frac{pp'}{q'},$$

liegt also auf der z-Achse und ist daher der Schnittpunkt $\mathfrak{N}$ der Normalen mit der Drehachse. Ferner ist nach (27), S. 135:

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\frac{p''}{q'} + \frac{q'}{p}, \quad K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = -\frac{p''}{p}.$$

Das Produkt $R_1 R_2$ ist absolut genommen gleich dem Produkt der Strecken $P\mathfrak{K}$ und $P\mathfrak{N}$, und zwar ist es im reellen Falle positiv oder

negativ, je nachdem beide Strecken nach derselben Seite von P liegen oder nach verschiedenen Seiten. Daher:

Satz 17: Bei einer Rotationsfläche sind die Hauptkrümmungsrichtungen eines beliebigen Punktes P die Tangente des durch P gehenden Meridians und die Tangente des durch P gehenden Breitenkreises. Die zugehörigen Hauptkrümmungsmittelpunkte sind der Mittelpunkt $\mathfrak{K}$ des Krümmungskreises jenes Meridians und der Schnittpunkt $\mathfrak{N}$ der Flächennormale $P\mathfrak{K}$ mit der Drehachse. Das Produkt der Hauptkrümmungsradien ist bei einer reellen Fläche positiv oder negativ, je nachdem $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{N}$ auf derselben Seite von P liegen oder nicht.

Wir haben in Satz 62, I S. 141, alle reellen ebenen Kurven bestimmt, bei denen das Produkt aus dem Krümmungsradius und der Normalen, diese gemessen bis zu ihrem Schnittpunkte mit einer Geraden — damals der y-Achse — konstant und zwar gleich ± 1 ist, wobei das Vorzeichen positiv oder negativ angenommen wurde, je nachdem beide Strecken nach derselben oder nach verschiedenen Seiten des Kurvenpunktes lagen. Durch ähnliche Vergrößerung gehen aus jenen Kurven solche hervor, bei denen das Produkt irgend einen von Null verschiedenen konstanten Wert hat. Lassen wir diese Kurven sich um die y-Achse drehen, so erzeugen sie diejenigen Rotationsflächen, auf denen

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}$$

konstant ist. Wenn wir statt der xy-Ebene jetzt die xz-Ebene benutzen, finden wir demnach mit Rücksicht auf S. 135 den

Satz 18: Jede reelle Rotationsfläche, bei der das Produkt K der Hauptkrümmungen überall konstant, aber von Null verschieden ist, ist einer derjenigen Rotationsflächen ähnlich, die durch Drehung der ebenen Kurven:

$$\text{(I a)} \quad x = c\cos\varphi, \quad y = 0, \quad z = E(c,\varphi),$$

$$\text{(I b)} \quad x = \frac{1}{c}\triangle\varphi, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{c}E(c,\varphi) - \frac{1-c^2}{c}F(c,\varphi),$$

$$\text{(II a)} \quad x = c\cos\varphi, \quad y = 0, \quad z = F(c,\varphi) - E(c,\varphi),$$

$$\text{(II b)} \quad x = \frac{1}{c}\triangle\varphi, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{c}F(c,\varphi) - \frac{1}{c}E(c,\varphi)$$

um die z-Achse hervorgehen. Dabei bedeutet φ den Parameter der Kurve und c eine positive Konstante kleiner oder gleich Eins. Ferner ist:

$$\Delta \varphi = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi},$$

$$E(c, \varphi) = \int_0^\varphi \Delta \varphi \, d\varphi, \quad F(c, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}.$$

Das konstante Produkt der Hauptkrümmungen ist bei den Typen (I a) und (I b) gleich $+1$, bei den Typen (II a) und (II b) gleich -1. Insbesondere fallen die beiden ersten Typen für $c = 1$ zusammen und geben die Kugel vom Radius Eins. Ebenso fallen die beiden letzten Typen für $c = 1$ zusammen und geben die Fläche, die durch Drehung der Traktrix

$$x = \cos \varphi, \quad y = 0, \quad z = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \sin \varphi$$

um die z-Achse hervorgeht.

Aus den Schlußbemerkungen jenes zitierten Satzes folgt noch:

Satz 19: Verschiebt man eine Rotationsfläche, bei der das Produkt der Hauptkrümmungen überall konstant, gleich K, ist, längs ihrer Achse, so gehen lauter Flächen hervor, die von lauter Rotationsflächen mit derselben Achse, bei denen jenes Produkt gleich $-K$ ist, überall senkrecht durchschnitten werden.

In den Figuren 43 bis 48 sind die sechs Typen von reellen Rotationsflächen, bei denen $K = \pm 1$ ist, dargestellt. Insbesondere entspricht den Figuren 45 und 46 der Wert $c = 1$, den Figuren 43, 44, 47 und 48 der Wert $c = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (siehe I S. 143). Die Figuren 43 und 44, dann 45 und 46, endlich 47 und 48 gehören paarweise zusammen, wie es Satz 19 angibt. Die beiden ersten Figuren gehören zu den Typen (I a) und (II a), die beiden letzten zu den Typen (I b) und (II b) des Satzes 18. Fig. 45 ist die Kugel,[1] Fig. 46 die Rotationsfläche der Traktrix.

Wir wollen auch diejenigen Rotationsflächen bestimmen, auf denen überall die beiden Hauptkrümmungen einander entgegengesetzt gleich sind, d. h. $H = 0$ ist. Nach Satz 17 und Fig. 42 kommt es darauf an, alle Meridiane zu bestimmen, bei denen der Krümmungsradius $P\mathfrak{K} = -P\mathfrak{N}$ ist. Dabei wollen wir, um die Formeln des ersten Bandes anwenden zu können, die xz-Ebene wieder als xy-Ebene bezeichnen, also die z-Achse durch die y-Achse ersetzen.

[1] Obgleich man bei der Kugel eigentlich nicht von Hauptkrümmungsradien sprechen kann, wird sie hier doch mit Rücksicht auf unsere Bemerkung auf S. 136, 137 der Vollständigkeit wegen eingeschaltet.

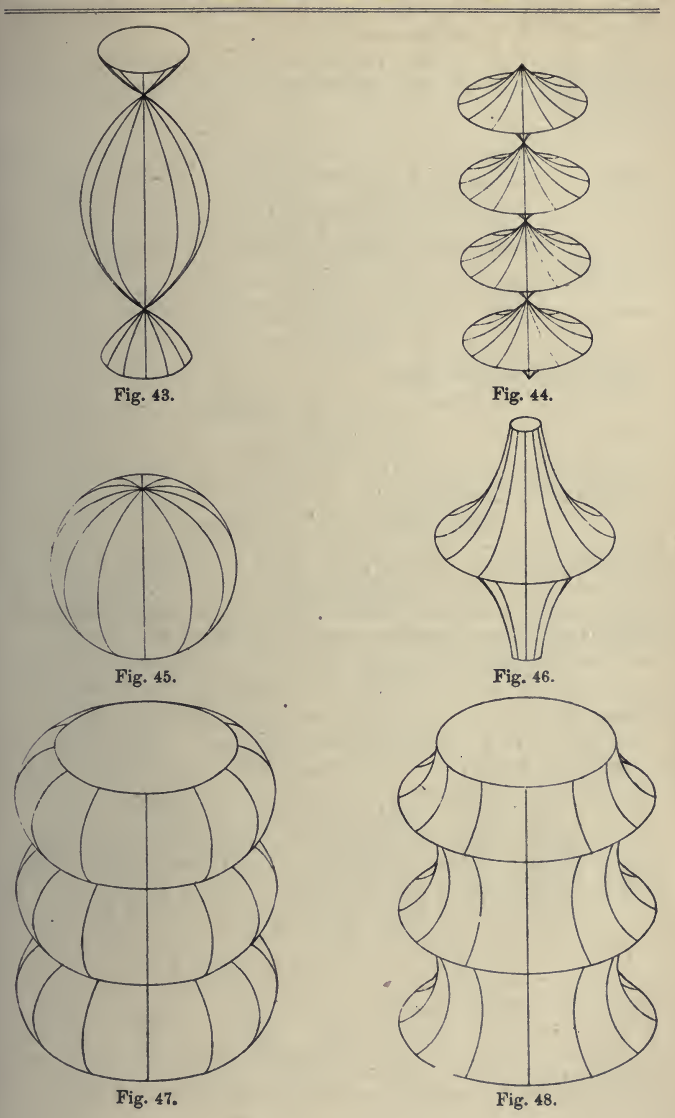


Fig. 43. Fig. 44.

Fig. 45. Fig. 46.

Fig. 47. Fig. 48.

Ist s die Bogenlänge der Kurve in der xy-Ebene und die y-Achse die feste Gerade, so haben wir zu verlangen, daß die x-Koordinate des Krümmungsmittelpunktes, d. h. nach Satz 18, I S. 39, die Größe

$$x + \frac{y'^2}{x''}$$

doppelt so groß wie x selbst sei, daher:

$$y'^2 = x x'',$$

wenn der Strich die Differentiation nach s andeutet. Wegen $x'^2 + y'^2 = 1$ folgt hieraus:

$$1 - x'^2 = x x''$$

oder:

$$\frac{d(x x')}{ds} = 1.$$

Mithin ergibt eine Integration:

$$x x' = s + b \qquad (b = \text{konst.})$$

oder:

$$\frac{d(x^2)}{ds} = 2s + 2b,$$

also eine zweite Integration:

$$x^2 = s^2 + 2bs + a^2 \qquad (a^2 = \text{konst.}).$$

Die Bogenlänge sei von derjenigen Stelle an gemessen, an der die Tangente der y-Achse parallel und daher $x x' = 0$ ist, was auf die Annahme $b = 0$ hinaus kommt, wodurch die Allgemeinheit der Betrachtung nicht beschränkt wird. Jetzt ist:

$$x = \sqrt{s^2 + a^2}, \qquad x' = \frac{s}{\sqrt{s^2 + a^2}},$$

daher

$$y' = \sqrt{1 - x'^2} = \frac{a}{\sqrt{s^2 + a^2}},$$

also:

$$y = a \log\left(s + \sqrt{s^2 + a^2}\right) + c \qquad (c = \text{konst.}).$$

Wenn wir noch durch Verschieben der Kurve längs der y-Achse — was ja gestattet ist — den Punkt $(s = 0)$ auf die x-Achse bringen, muß $y = 0$ sein für $s = 0$, mithin $c = -a \log a$, sobald wir — im reellen Falle — die Quadratwurzel positiv nehmen, was auch erlaubt ist. Nun kommt:

$$x = \sqrt{s^2 + a^2}, \qquad y = a \log \frac{s + \sqrt{s^2 + a^2}}{a}$$

oder, wenn s eliminiert wird:

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}}\right).$$

Dies aber ist die Gleichung einer Kettenlinie, deren Leitlinie die

y-Achse ist. Durch Drehung der Kurve um ihre Leitlinie entsteht ein sogenanntes Katenoid.[1] Siehe Fig. 49. Daher:

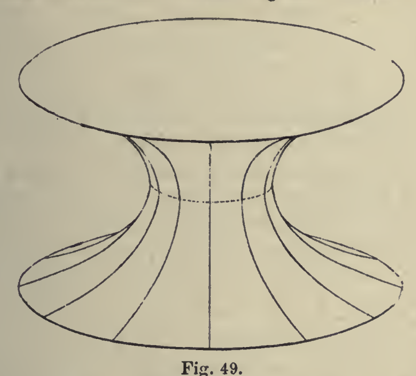


Fig. 49.

Satz 20:[2] Die Katenoide sind die einzigen Rotationsflächen, auf denen überall die beiden Hauptkrümmungsradien einander entgegengesetzt gleich sind.

§ 4. Haupttangenten.

In den beiden letzten Paragraphen wurden ausgezeichnete Fortschreitungsrichtungen von einem Flächenpunkte aus untersucht, nämlich die Hauptkrümmungsrichtungen. Zu ihnen gesellen sich nun noch andere, die sogenannten Haupttangentenrichtungen. Man kommt hierzu bei der Beantwortung der Frage nach denjenigen Tangenten eines Flächenpunktes, die die Fläche in höherer als erster Ordnung berühren. Diese Tangenten heißen die Haupttangenten des betrachteten Flächenpunktes.[3] Schon in I S. 311 war von ihnen vorübergehend die Rede. Wir wollen sie jetzt von neuem ermitteln, indem wir uns dabei die Fläche nicht wie damals durch eine Gleichung $F(x, y, z) = 0$, sondern mittels zweier Parameter u und v gegeben denken in der Form:

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v).$$

[1] Vgl. die erste Anmerkung auf S. 57.

[2] Hier sei daran erinnert, daß wir nach S. 48 stets voraussetzen, die Achse der Fläche sei keine Minimalgerade.

[3] Diese Geraden wurden zuerst untersucht von Dupin in seinen „Développements de géométrie", Paris 1813.

Ein Flächenpunkt (u_0, v_0) oder (x_0, y_0, z_0) sei bestimmt gewählt worden. Alsdann wird eine Tangente dieses Punktes die Fläche ebenda in höher als erster Ordnung berühren, sobald es (nach I S. 306) eine von derselben Stelle ausgehende Flächenkurve c gibt, mit der jene Tangente im Punkte (x_0, y_0, z_0) eine Berührung von mindestens zweiter Ordnung eingeht. Zunächst also muß jene Flächentangente zugleich Tangente der Flächenkurve c im Punkte (u_0, v_0) sein. Nach S. 12 wird nun irgend eine vom Punkte (u_0, v_0) ausgehende Flächenkurve c durch (1) dargestellt, sobald man unter u und v irgend zwei derartige Funktionen eines Parameters t versteht, die etwa für $t = 0$ die Werte u_0 und v_0 annehmen. Deutet alsdann der Strich die Differentiation nach t an, so hat diese Flächenkurve c im Punkte (u_0, v_0) oder (x_0, y_0, z_0) nach Satz 5, I S. 217, die Tangente:

$$(2) \qquad \mathfrak{x} = x_0 + x_0'\tau, \quad \mathfrak{y} = y_0 + y_0'\tau, \quad \mathfrak{z} = z_0 + z_0'\tau,$$

wobei der Index Null die Annahme $t = 0$, d. h. $u = u_0$, $v = v_0$ nach vollzogener Differentiation nach t ausdrücken soll. Hier sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die laufenden Koordinaten der Tangente, während unter τ ein Parameter verstanden wird. Nach dem soeben angegebenen Satze wird die Berührung zwischen der Flächenkurve c und der Tangente (2) von höherer als erster Ordnung, sobald

$$(3) \qquad \frac{x_0''}{x_0'} = \frac{y_0''}{y_0'} = \frac{z_0''}{z_0'}$$

ist. Alsdann stellt (2) also eine Haupttangente des Flächenpunktes (u_0, v_0) dar.

Nach (1) ist hierbei

$$x' = x_u u' + x_v v', \qquad x'' = x_u u'' + x_v v'' + x_{uu} u'^2 + 2 x_{uv} u' v' + x_{vv} v'^2,$$

und entsprechende Werte haben y', y'' sowie z', z''.

Verstehen wir unter ϱ den gemeinsamen Wert der drei Brüche (3), so haben wir also zu fordern:

$$(4) \begin{cases} x_u^0 u_0'' + x_v^0 v_0'' + x_{uu}^0 u_0'^2 + 2 x_{uv}^0 u_0' v_0' + x_{vv}^0 v_0'^2 = \varrho(x_u^0 u_0' + x_v^0 v_0'), \\ y_u^0 v_0'' + y_v^0 v_0'' + y_{uu}^0 u_0'^2 + 2 y_{uv}^0 u_0' v_0' + y_{vv}^0 v_0'^2 = \varrho(y_u^0 u_0' + y_v^0 v_0'), \\ z_u^0 u_0'' + z_v^0 v_0'' + z_{uu}^0 u_0'^2 + 2 z_{uv}^0 u_0' v_0' + z_{vv}^0 v_0'^2 = \varrho(z_u^0 u^{0\prime} + z_v^0 z_0'). \end{cases}$$

Demnach fragt es sich, ob es einen Wert ϱ sowie zwei Funktionen u und v von t derart gibt, daß u und v für $t = 0$ die Werte v_0 und v_0 annehmen und daß die Werte ihrer Ableitungen u', v' und u'', v'' für $t = 0$ die Bedingungen (4) erfüllen.

Aus diesen drei Forderungen (4) läßt sich nun leicht eine finden, die von u_0'' und v_0'' frei ist. Versteht man nämlich wie sonst unter

X, Y, Z die Richtungskosinus der Flächennormale, also unter X_0, Y_0, Z_0 insbesondere die der Flächennormale des Punktes (u_0, v_0), so ergibt die Multiplikation der Gleichungen (4) mit X_0, Y_0, Z_0 und Addition nach XI (l) und nach (8), S. 122, sofort:

$$(5) \qquad L_0 u_0'^2 + 2 M_0 u_0' v_0' + N_0 v_0'^2 = 0 .$$

Hier bedeuten L_0, M_0, N_0 die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung für $u = u_0$, $v = v_0$. Erfüllen nun u_0' und v_0' die Bedingung (5), so ist eine der drei Gleichungen (4) eine Folge der beiden anderen. Danach bleiben dann nur zwei Gleichungen (4) übrig. Da sie in u_0'' und v_0'' linear sind, gibt es dann Werte u_0'', v_0'', die ihnen genügen. Man muß nämlich beachten, daß nach S. 6, 7 nicht alle drei zweireihigen Determinanten

$$y_u^0 z_v^0 - z_u^0 y_v^0, \quad z_u^0 x_v^0 - x_u^0 z_v^0, \quad x_u^0 y_v^0 - y_u^0 x_v^0$$

gleich Null sein können.

Hiernach steht fest: Es gibt dann und nur dann eine Flächenkurve c, die ihre Tangente (2) im Punkte (u_0, v_0) in höherer als erster Ordnung berührt, wenn es Werte u_0' und v_0' gibt, die der Bedingung (5) Genüge leisten. Jene Tangente (2) läßt sich auch so darstellen:

$$\mathfrak{x} = x_0 + (x_u^0 u_0' + x_v^0 v_0')\tau, \quad \mathfrak{y} = y_0 + (y_u^0 u_0' + y_v^0 v_0')\tau,$$
$$\mathfrak{z} = z_0 + (z_u^0 u_0' + z_v^0 v_0')\tau;$$

sie gehört daher zu der Fortschreitungsrichtung (k), für die

$$k = \frac{dv}{du} = \frac{v_0'}{u_0'}$$

ist, vgl. (17), S. 38. Nach (5) wird dieser Fortschreitungsrichtung demnach die Bedingung auferlegt:

$$(6) \qquad L_0 + 2 M_0 k + N_0 k^2 = 0,$$

und zwar ist dies die e i n z i g e Bedingung, die erfüllt sein muß, damit die zur Fortschreitungsrichtung (k) gehörige Tangente des Flächenpunktes (u_0, v_0) mit der Fläche eine Berührung in höherer als erster Ordnung eingeht.

Es ist lästig, den Index Null in den Formeln weiterhin mitzuschleppen. Statt des Punktes (u_0, v_0) betrachten wir daher von jetzt an einen Punkt (u, v) der Fläche. Alsdann können wir sagen:

Satz 21: Diejenigen Fortschreitungsrichtungen (k) oder ($dv : du$) von einem Flächenpunkte (u, v) aus, zu denen solche Tangenten gehören, die mit der Fläche eine Berührung in

höherer als erster Ordnung eingehen, werden durch die Bedingung

$$L + 2Mk + Nk^2 = 0$$

bestimmt, worin L, M, N die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung bedeuten.

Nach der auf S. 143 eingeführten Bezeichnung ist somit

(7) $$L + 2Mk + Nk^2 = 0$$

die Bedingung für die Haupttangentenrichtungen (k) eines Flächenpunktes (u, v).

Die linke Seite der Bedingung (7) ist nun der Zähler des auf S. 122 unter (10) gewonnenen Wertes für die Krümmung $1:R$ des zu k gehörigen Normalschnittes des Flächenpunktes (u, v):

(8) $$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2}.$$

Deshalb hat man wie auf S. 126 u. f. drei Fälle zu unterscheiden, von denen wir zuerst die beiden besonderen erledigen, so daß der dritte alsdann der allgemeine Fall sein wird.

Erster (besonderer) Fall: Die rechte Seite der Formel (8) enthält nur scheinbar k, d. h. der betrachtete Flächenpunkt (u, v) ist ein Nabelpunkt. Wie auf S. 126 ist alsdann entweder $L = M = N = 0$ oder

$$L:M:N = E:F:G.$$

Bei der ersten Annahme zeigt (7), daß alle Werte von k Haupttangenten liefern. Daher gilt der

Satz 22: Alle Tangenten eines regulären Flächenpunktes (u, v) gehen dort mit der Fläche eine Berührung in höherer als erster Ordnung dann und nur dann ein, wenn L, M und N für den Punkt (u, v) den Wert Null haben.

Solche Stellen einer Fläche mögen von jetzt an Flachpunkte heißen. Nach Satz 6, S. 123, erhellt:

Satz 23: Die Ebenen sind die einzigen Flächen mit lauter Flachpunkten.

Wenn nun die Größen L, M, N für den betrachteten Punkt (u, v) nicht sämtlich gleich Null sind, aber sich wie E, F, G zueinander verhalten, hat die Gleichung (7) dieselben Wurzeln wie die Gleichung

(9) $$E + 2Fk + Gk^2 = 0,$$

also zwei verschiedene Wurzeln, da wir von solchen Stellen absehen, wo $EG - F^2$ oder D^2 verschwindet, vgl. S. 18. Nach Satz 11,

S. 38, 39, bestimmt aber (9) diejenigen Werte von k oder $dv:du$, zu denen Minimalgeraden als Tangenten gehören. Somit gilt der

Satz 24: Die Haupttangenten eines Nabelpunktes, der kein Flachpunkt ist, sind die Minimaltangenten der Stelle.

Der vorliegende erste besondere Fall tritt überall auf der Fläche ein, wenn es sich um eine Ebene oder Kugel handelt, vgl. Satz 10, S. 129. Auf einer Ebene, die ja nur Flachpunkte hat, sind alle Geraden durch einen beliebigen Punkt als seine Haupttangente zu bezeichnen; auf einer Kugel dagegen, die keine Ebene ist, sind es die beiden Scharen von Minimalgeraden, die auf der Kugel liegen.

Zweiter (besonderer) Fall: Die rechte Seite der Formel (8) läßt sich mit einem und nur einem in k linearen Faktor kürzen. Dies bedeutet, daß eine und nur eine der beiden Wurzeln k von (7) auch (9) genügt, d. h. es ist eine und nur eine der beiden Minimaltangenten des Flächenpunktes eine Haupttangente, während noch eine zweite Haupttangente vorkommt, die keine Minimalgerade ist. Nach dem Früheren tritt dieser besondere Fall auf, wenn zwar E, F, G nicht alle drei proportional zu L, M, N sind, dagegen die Gleichung (12) auf S. 130 besteht:

$$(GL - EN)^2 - 4(EM - FL)(FN - GM) = 0.$$

Zu der soeben erwähnten zweiten Haupttangente gehört ein Wert von k, der zwar der Gleichung (7), aber nicht der Gleichung (9) genügt, für den also die Krümmung des Normalschnittes nach (8) gleich Null wird. Dieser Normalschnitt hat demnach an der Stelle (u, v) einen Wendepunkt, vgl. I S. 43. Nach S. 131 tritt der vorliegende Fall nie in einem regulären reellen Punkte einer reellen Fläche auf. Diejenigen imaginären Flächen, auf denen überall der gegenwärtig betrachtete Fall vorkommt, sind nach Satz 12, ebenda, die Flächen mit einer und nur einer Schar von Minimalgeraden.

Dritter (allgemeiner) Fall: Die rechte Seite von (8) ist weder frei von k noch mit einem in k linearen Faktor zu kürzen. Dieser Fall liegt vor, sobald die zuletzt angegebene Gleichung nicht erfüllt ist. Insbesondere tritt er in jedem regulären Punkte einer reellen Fläche auf, wenn man nur die Ebenen und Kugeln ausschließt.

Die Gleichung (7) hat zwei Wurzeln $k = \varkappa_1$ und $k = \varkappa_2$, die allerdings zusammenfallen können, was eintritt, wenn für den betrachteten Flächenpunkt $LN - M^2$ verschwindet. Da $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$

jetzt die Gleichung (9) nicht befriedigen, sind die beiden zu $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ gehörigen Haupttangenten keine Minimalgeraden. Nach (8) sind ferner die Krümmungen $1:R$ der zu den beiden Haupttangenten gehörigen Normalschnitte gleich Null, so daß diese Normalschnitte nach I S. 43 im Punkte (u, v) Wendepunkte aufweisen. Umgekehrt: Wenn ein Normalschnitt des Punktes (u, v) ebenda einen Wendepunkt hat, berührt er die zugehörige Tangente in höherer als erster Ordnung, und deshalb muß die Tangente eine Haupttangente sein. Folglich besteht der

Satz 25: Ist in einem Flächenpunkte (u, v) der Ausdruck

$$(GL - EN)^2 - 4(EM - FL)(FN - GM)$$

von Null verschieden, was übrigens stets der Fall ist für einen reellen regulären Punkt einer reellen Fläche, die keine Ebene oder Kugel ist, so kommen dem Punkte zwei Haupttangenten zu, die nur dann zusammenfallen, wenn der Ausdruck $LN - M^2$ für den Punkt verschwindet. Nur diejenigen Normalschnitte des Flächenpunktes, die zu den Haupttangenten gehören, weisen ebenda Wendepunkte auf.

1. Beispiel: Auf einer geradlinigen Fläche ist in jedem Punkte die hindurchgehende Erzeugende eine Haupttangente. Auf den Flächen mit zwei Scharen von Geraden, z. B. im reellen Falle auf dem einschaligen Hyperboloid und dem hyperbolischen Paraboloid, sind somit alle Erzeugenden identisch mit den Haupttangenten der Fläche, vorausgesetzt, daß man von den Ebenen absieht, in denen alle Geraden Haupttangenten sind, vgl. Satz 23.

Im reellen Falle kann man noch feststellen, was geometrisch auszusagen ist, je nachdem die Wurzeln $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ der quadratischen Gleichung für k:

$$L + 2Mk + Nk^2 = 0 \tag{10}$$

imaginär, reell gleich oder reell verschieden ausfallen. Dabei sehen wir von den Ebenen und Kugeln ab.

Wenn k alle reellen Werte durchläuft, wenn man also nach und nach alle reellen Normalschnitte des Punktes (u, v) betrachtet, gibt das Vorzeichen von

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2} \tag{11}$$

nach S. 125 jedesmal an, ob der Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes auf der positiven oder negativen Seite der Tangentenebene liegt. Der Nenner in (11) bleibt nun aber beständig positiv, denn sein Produkt mit dem positiven Quadrate du^2 gibt ja wegen $k = dv:du$

das im reellen Falle beständig positive Bogenelement-Quadrat ds^2. Demnach wechselt die Krümmung nur dann ihr Zeichen, wenn k durch eine der Wurzeln $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ der Gleichung (10) hindurchgeht.

Sobald also beide Wurzeln $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ imaginär sind, d. h. im Falle

$$LN - M^2 > 0$$

haben alle reellen Normalschnitte einerlei Vorzeichen der Krümmung, so daß alle nach derselben Seite der Tangentenebene gekrümmt sind. Dann sagt man, daß die Fläche in dem betrachteten Punkte konvex-konvex sei, siehe Fig. 50.[1] Die Haupttangenten sind hier beide imaginär, und die beiden Hauptkrümmungskreise haben ihre



Fig. 50.

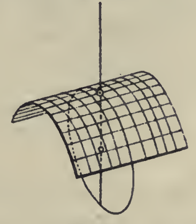


Fig. 51.

Mittelpunkte auf derselben Seite der Tangentenebene, so daß in diesem Falle die beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 dasselbe Vorzeichen haben.

Wenn $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ reell und gleich sind, d. h. im Falle

$$LN - M^2 = 0$$

sind zwar wie vorher alle Normalschnitte des Flächenpunktes nach derselben Seite der Tangentenebene hin gekrümmt, aber ein Normalschnitt hat die Krümmung Null, d. h. sein Krümmungskreis artet in die einzige vorhandene Haupttangente aus. Da diese Krümmung Null ein Minimum oder Maximum der Krümmungen der Normalschnitte ist, muß diese Haupttangente nach Satz 15, S. 136, eine der beiden Hauptkrümmungsrichtungen angeben, während die andere zu ihr senkrecht ist. Von den beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 wird also in diesem Falle der eine unendlich groß. Siehe Fig. 51.

[1] In dieser Figur haben wir, um die Hauptkrümmungskreise deutlicher zur Anschauung zu bringen, eine Fläche dargestellt, die mit ihren Hauptkrümmungskreisen Bogenstücke von endlicher Ausdehnung gemein hat. Dasselbe gilt auch für die Fig. 51.

Wenn endlich $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ reell und verschieden sind, d. h. im Falle

$$LN - M^2 < 0$$

gibt es zwei verschiedene reelle Haupttangenten. Die Ebenen durch die Flächennormale und diese beiden Haupttangenten trennen das Gebiet der nach der einen Seite der Tangentenebene gekrümmten Normalschnitte von dem Gebiete der nach der anderen Seite gekrümmten, siehe Fig. 52.[1] Die beiden Hauptkrümmungsradien R_1

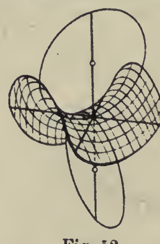


Fig. 52.

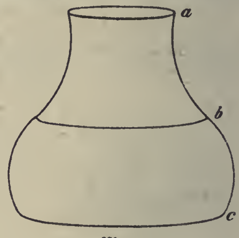


Fig. 53.

und R_2 haben in diesem Falle verschiedene Vorzeichen, weil sie ja das Maximum und Minimum vorstellen, nach Satz 15, S. 136. Man sagt, daß die Fläche hier **konvex-konkav** sei.

2. Beispiel: Auf einer reellen Rotationsfläche

$$x = p(u)\cos v, \qquad y = p(u)\sin v, \qquad z = q(u)$$

setzen wir wie auf S. 137 wieder $p > 0$, $q' > 0$ voraus. Hier lautet die Gleichung (10) so:

$$-\frac{p''}{q'} + p\,q'\,k^2 = 0$$

und gibt also:

$$\left.\begin{matrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{matrix}\right\} = \pm\frac{1}{q'}\sqrt{\frac{p''}{p}},$$

so daß der erste, zweite oder dritte Fall vorliegt, je nachdem $p'' < 0$, $= 0$ oder > 0 ausfällt. Da nun nach S. 138

$$p + \frac{q'^2}{p''}$$

die x-Koordinate des Krümmungsmittelpunktes $\mathfrak{K}$ des Null-Meridians ($v = 0$) ist, während p selbst die x-Koordinate der zugehörigen Stelle P des Null-Meridians bedeutet, so erhellt, daß $\mathfrak{K}$ auf der negativen oder positiven Normale von P liegt, je nachdem $p'' > 0$ oder < 0 ist. Dabei ist die positive Normale wie auf S. 138 nach der z-Achse hin gerichtet. Man erkennt deshalb, daß solche

[1] Zur besseren Veranschaulichung ist hier eine Fläche gewählt worden, die nicht nur mit den Hauptkrümmungskreisen des betrachteten Punktes endliche Bogenstücke gemein hat, sondern auch die beiden Haupttangenten des Punktes vollständig enthält.

Punkte P des Null-Meridians, deren Krümmungsmittelpunkte $\mathfrak{K}$ **außen** liegen, konvex-konkav sind, dagegen solche, deren Krümmungsmittelpunkte $\mathfrak{K}$ **innen** liegen, konvex-konvex. Hierbei soll außen von der Drehachse fort- und innen nach der Drehachse hingerichtet bedeuten. Entsprechendes gilt natürlich von allen anderen Meridiankurven. Diejenigen Breitenkreise also, auf denen die Wendepunkte der Meridiane liegen, siehe Fig. 53, trennen die konvex-konkaven Gebiete der Fläche von den konvex-konvexen. Insbesondere ist in Fig. 53 der Streifen zwischen a und b von konvex-konkaven Punkten mit reellen und verschiedenen Haupttangenten erfüllt, dagegen der übrige Teil der Fläche zwischen b und c von konvex-konvexen Punkten mit imaginären Haupttangenten. Die Wendepunkte der Meridiankurven erfüllen diejenigen Breitenkreise, die lauter Punkte mit je nur einer Haupttangente aufweisen, z. B. den Breitenkreis b.

3. **Beispiel:** Die reellen **gemeinen Schraubenflächen** (S. 136) und reellen **Katenoide** (S. 143) haben überall entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien und sind daher überall konvex-konkav.

4. **Beispiel:** In einem Punkte einer reellen **geradlinigen Fläche** mit reellen Erzeugenden ist die hindurchgehende Erzeugende nach dem 1. Beispiele eine Haupttangente. Also kann hier nur der zweite oder dritte Fall vorliegen. Demnach ist die Fläche nirgends konvex-konvex.

§ 5. Schnittkurve von Fläche und Tangentenebene.

Wenn auch die Tangentenebene eines Flächenpunktes in gewissem Sinne im Raume eine ähnliche Rolle gegenüber der Fläche spielt wie in der Ebene die Tangente eines Kurvenpunktes gegenüber der Kurve, so tritt doch bei den Tangentenebenen manches von wesentlich neuer Art auf. Insbesondere hat die Tangentenebene eines Flächenpunktes P_0 mit der Fläche, allgemein geredet nicht nur diesen Punkt P_0, sondern eine durch P_0 gehende Kurve gemein. In der Tat, wenn auf der Fläche

$$x = \varphi(u,v), \qquad y = \chi(u,v), \qquad z = \psi(u,v) \tag{1}$$

ein Punkt P_0 mit den Parameterwerten u_0 und v_0 ausgewählt wird und wenn X_0, Y_0, Z_0 die Richtungskosinus der Flächennormale von P_0 sind, hat die Tangentenebene von P_0 in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ nach XI (E) die Gleichung

$$X_0(\mathfrak{x} - x_0) + Y_0(\mathfrak{y} - y_0) + Z_0(\mathfrak{z} - z_0) = 0. \tag{2}$$

Soll also der Flächenpunkt (x, y, z) der Tangentenebene angehören, so müssen seine Parameter u und v die Gleichung

$$X_0(x - x_0) + Y_0(y - y_0) + Z_0(z - z_0) = 0 \tag{3}$$

befriedigen. Hierin haben x_0, y_0, z_0 und X_0, Y_0, Z_0 bestimmte Werte, während x, y, z die Funktionen (1) von u und v bedeuten. Mithin

liegt in (3) eine Gleichung zwischen u und v vor, die nach Satz 2, S. 12, eine Kurve c auf der Fläche, nämlich die Schnittkurve der Fläche mit der Tangentenebene des Punktes P_0 definiert.

1. Beispiel: Ein Kreis vom Radius r, dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt und die Abszisse a hat und dessen Ebene die xz-Ebene ist, beschreibt bei der Drehung um die z-Achse die schon im Beispiele auf S. 21, 22 betrachtete Ringfläche

$$x = (a + r\cos u)\cos v\,, \qquad y = (a + r\cos u)\sin v\,, \qquad z = r\sin u\,.$$

Dabei seien a und r reell und $a > r$, so daß der Kreis die Drehachse nicht trifft. Die x-Achse hat mit der Ringfläche vier Punkte gemein, unter anderen den Punkt P_0 mit der Abszisse $x_0 = a - r$. Er liegt auf dem kleinsten Breitenkreise der Rotationsfläche, und zu ihm gehören die Parameterwerte $u_0 = -\pi$, $v_0 = 0$.

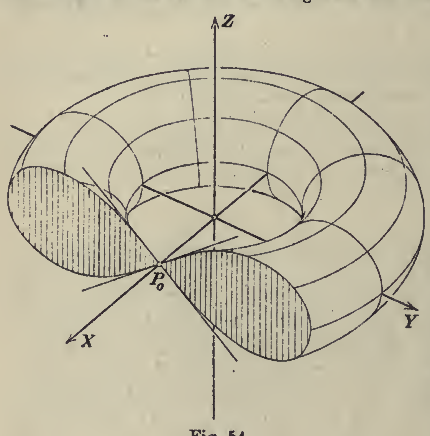


Fig. 54.

Die Tangentenebene dieses Punktes ist zur x-Achse senkrecht und hat also die Gleichung $\mathfrak{x} = x_0$ oder $\mathfrak{x} = a - r$. Ersetzen wir $\mathfrak{x}$ durch die auf die Fläche bezügliche Koordinate x, so ergibt sich für die Schnittkurve der Fläche mit der Tangentenebene von P_0 die Bedingung

$$(a + r\cos u)\cos v = a - r\,.$$

Will man die Schnittkurve mittels der rechtwinkligen Koordinaten y und z darstellen, so hat man hieraus und aus

$$y = (a + r\cos u)\sin v, \qquad z = r\sin u$$

die Parameter u und v zu eliminieren. Da sich sofort $\operatorname{tg} v$ gleich $y:(a-r)$ und $\sin u$ gleich $z:r$ ergibt, liefert die Elimination zunächst

$$a + \sqrt{r^2 - z^2} = \sqrt{y^2 + (a-r)^2}$$

oder nach Beseitigung der Wurzeln:

$$(y^2 + z^2)^2 - 4ary^2 + 4a(a-r)z^2 = 0\,.$$

Diese Schnittkurve ist in Fig. 54 dargestellt; sie ist eine algebraische Kurve vierter Ordnung und schneidet sich selbst im Punkte P_0.

Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt P auf der Schnittkurve c der Fläche mit der Tangentenebene des Flächenpunktes P_0, d. h. P habe solche Parameterwerte u und v, die der Gleichung (3) genügen. Von P geht eine Fortschreitungsrichtung $(k = dv : du)$

längs der Tangente der Schnittkurve. Der Wert von k geht durch vollständige Differentiation von (3) hervor, denn nach (3) ist längs der Kurve

$$(X_0 x_u + Y_0 y_u + Z_0 z_u)\,du + (X_0 x_v + Y_0 y_v + Z_0 z_v)\,dv = 0$$

oder kürzer:

$$\mathsf{S}\, X_0 x_u . du + \mathsf{S}\, X_0 x_v . dv = 0,$$

woraus sich für die Fortschreitungsrichtung

$$k = \frac{dv}{du} = -\frac{\mathsf{S}\, X_0 x_u}{\mathsf{S}\, X_0 x_v} \tag{4}$$

ergibt. Da die Gleichung (3) insbesondere durch $u = u_0$, $v = v_0$ befriedigt wird, weil dann x, y, z, gleich x_0, y_0, z_0 werden, da also — was ja übrigens von vornherein klar ist — der Punkt P_0 selbst der Kurve c angehört, könnte man die Formel (4) auf die von P_0 ausgehende Fortschreitungsrichtung längs der Kurve c anwenden. Aber wenn wir u und v in (4) durch u_0 und v_0 ersetzen, nimmt der Wert (4) die unbestimmte Form $0:0$ an, denn nach XI(I) ist ja $\mathsf{S}\, X x_u = 0$ und $\mathsf{S}\, X x_v = 0$. Nach bekannter Regel geht der Wert, dem $dv:du$ zustrebt, wenn u und v unter der Bedingung (3) nach u_0 und v_0 streben, hervor, indem man in (4) vor der Substitution $u = u_0$, $v = v_0$ Zähler und Nenner für sich vollständig differenziert. Es kommt daher für den Punkt P_0:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\mathsf{S}\, X_0 x^0_{uu} . du + \mathsf{S}\, X_0 x^0_{uv} . dv}{\mathsf{S}\, X_0 x^0_{uv} . du + \mathsf{S}\, X_0 x^0_{vv} . dv}.$$

Dabei deutet der Index Null überall die Substitution $u = u_0$, $v = v_0$ an. Nach (8), S. 122, sind die hier im Zähler und Nenner vorkommenden Summen die Fundamentalgrößen L und M bzw. M und N für $u = u_0$, $v = v_0$, also die Größen L_0 und M_0 bzw. M_0 und N_0. Bezeichnen wir $dv:du$ wieder mit k, so geht demnach für die Richtung (k) vom Punkte P_0 aus die Bedingung hervor:

$$k = -\frac{L_0 + M_0 k}{M_0 + N_0 k} \tag{5}$$

Diese Formel zur Bestimmung von k kann wieder versagen, wenn Zähler und Nenner der rechten Seite gleich Null sind, d. h. wenn einzeln L_0, M_0 und N_0 den Wert Null haben. Dann aber ist P_0 nach S. 146 ein Flachpunkt. Sehen wir von den Flachpunkten ab, so gibt (5), wenn man den Nenner beseitigt:

$$L_0 + 2M_0 k + N_0 k^2 = 0. \tag{6}$$

Nach (7), S. 146, ist dies die Bedingung für die Fortschreitungsrichtungen längs der Haupttangenten des Flächenpunktes P_0. Demnach gilt der

Satz 26: Die Kurve, in der eine Fläche durch die Tangentenebene eines ihrer Punkte geschnitten wird, berührt in diesem Punkte die von ihm ausgehenden Haupttangenten der Fläche. Dabei wird vorausgesetzt, daß der gewählte Punkt kein Flachpunkt sei.

Da dem Punkte P_0 im allgemeinen zwei Haupttangenten zukommen, wird also auch die Schnittkurve c seiner Tangentenebene mit der Fläche ebenda zwei Tangenten haben, d. h. P_0 wird ein singulärer Punkt der Schnittkurve sein. In der Tat wurde ja auch ein Punkt einer Kurve in der xy-Ebene in I S. 4 und S. 104 als singulär bezeichnet, wenn sich für $dy:dx$ oder also für seine Tangentenrichtung die unbestimmte Form 0:0 ergibt, wie es ja vorhin der Fall war.

Im reellen Falle ergibt sich insbesondere nach I S. 111, daß der Punkt P_0 für die Schnittkurve c seiner Tangentenebene mit der Fläche ein isolierter Punkt ist, wenn die Fläche in P_0 konvex-konvex verläuft, da ja dann die beiden von P_0 ausgehenden Haupttangenten imaginär sind. An einer konvex-konkaven Stelle P_0 dagegen sind zwei reelle Haupttangenten vorhanden, so daß dann P_0 ein Doppelpunkt der Schnittkurve c sein muß. Demnach sagen wir:

Satz 27: Für die Kurve, in der die Tangentenebene eines Flächenpunktes die Fläche durchsetzt, ist diese Stelle selbst singulär, und zwar ist sie im reellen Falle ein isolierter oder ein Doppelpunkt der Kurve, je nachdem die Fläche an der Stelle konvex-konvex oder konvex-konkav verläuft.

Wenn für P_0 die beiden Wurzeln k der Gleichung (6) zusammenfallen, also $L_0 N_0 - M_0^2$ gleich Null ist (vgl. S. 149), fallen die beiden von P_0 ausgehenden Haupttangenten in nur eine zusammen. Man darf daher schließen, daß P_0 alsdann eine Spitze der Schnittkurve c sein wird; aber streng bewiesen ist es nicht. Der Fall eines konvex-konkaven Punktes ist in Fig. 54 auf S. 152 dargestellt. Für den Fall einer Spitze bringen wir folgendes

2. Beispiel: Die Fläche

$$z = ay^2 + bx^3, \tag{7}$$

bei der a und b reelle Konstanten seien, läßt sich in Parametern u und v nach S. 5 so darstellen:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = av^2 + bu^3.$$

Die Tangentenebene des Punktes ($u = 0$, $v = 0$), d. h. des Anfangspunktes O, hat nach XI (D) die Gleichung $\mathfrak{z} = 0$. Mithin schneidet diese Tangentenebene die Fläche in der algebraischen Kurve dritter Ordnung

$$ay^2 + bx^3 = 0.$$

Diese Kurve hat im Anfangspunkte O eine Spitze, indem sie dort von beiden Seiten her die positive bzw. die negative x-Achse berührt, je nachdem $a:b$ negativ oder positiv ist (vgl. I S. 108). Man erkennt leicht, daß $LN - M^2$ an der betrachteten Stelle O gleich Null wird.

Bei der Unterscheidung der Punkte mit reellen und der Punkte mit imaginären Haupttangenten gibt, wie wir wissen (vgl. S. 149), das Vorzeichen von $LN - M^2$ den Ausschlag, also auch bei der Unterscheidung, ob ein Punkt ein Doppelpunkt oder ein isolierter Punkt der Schnittkurve seiner Tangentenebene mit der Fläche ist. Deshalb sei noch erwähnt, daß sich dieser Ausdruck in einer bemerkenswerten anderen Form darstellen läßt. Nach (12), S. 122, ist nämlich

$$LN - M^2 = \mathbf{S}\, X_v x_u \,.\, \mathbf{S}\, X_v x_v - \mathbf{S}\, X_u x_v \,.\, \mathbf{S}\, X_v x_u$$
$$= \mathbf{S}\,(Y_u Z_v - Z_u Y_v)(y_u z_v - z_u y_v),$$

also nach XI(F):

$$LN - M^2 = D \,.\, \mathbf{S}\, X (Y_u Z_v - Z_u Y_v),$$

daher

$$LN - M^2 = D \begin{vmatrix} X & X_u & X_v \\ Y & Y_u & Y_v \\ Z & Z_u & Z_v \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Da D im reellen Falle positiv ist (nach S. 18), gibt somit das Vorzeichen der hier auftretenden Determinante die Entscheidung: J e n a c h d e m d i e D e t e r m i n a n t e p o s i t i v o d e r n e g a t i v i s t, l i e g t e i n k o n v e x - k o n v e x e r o d e r e i n k o n v e x - k o n k a v e r F l ä c h e n p u n k t v o r.

Der Wert (8) kann noch anders ausgedrückt werden. Multiplikation mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} X & 0 & 0 \\ Y & 1 & 0 \\ Z & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

die den Wert X hat, gibt nach dem Multiplikationsatze der Determinanten, indem man Reihe mit Reihe kombiniert, nach XI(H):

$$X(LN - M^2) = D(Y_u Z_v - Z_u Y_v).$$

Demnach ist

$$LN - M^2 = D\frac{Y_u Z_v - Z_u Y_v}{X} = D\frac{Z_u X_v - X_u Z_v}{Y} = D\frac{X_u Y_v - Y_u X_v}{Z}. \tag{9}$$

Die beiden letzten Ausdrücke gehen aus dem vorhergehenden durch zyklische Vertauschung hervor.

Es ist leicht, diejenigen Flächen zu bestimmen, auf denen überall $LN - M^2$ gleich Null ist, d. h. nach (8) überall

$$\begin{vmatrix} X & X_u & X_v \\ Y & Y_u & Y_v \\ Z & Z_u & Z_v \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

ist. Nach Satz 7, S. 27, besagt nämlich diese Bedingung, daß die Verhältnisse von X, Y, Z voneinander abhängig sind. Bilden wir außerdem den Ausdruck

$$\mathfrak{D} = Xx + Yy + Zz = \mathsf{S}\, Xx, \tag{11}$$

so kommt wegen XI (I):

$$\mathfrak{D}_u = \mathsf{S}\, X_u x, \qquad \mathfrak{D}_v = \mathsf{S}\, X_v x,$$

also

$$\begin{vmatrix} X & X_u & X_v \\ Y & Y_u & Y_v \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{D}_u & \mathfrak{D}_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & X_u & X_v \\ Y & Y_u & Y_v \\ \mathsf{S}\, Xx & \mathsf{S}\, X_u x & \mathsf{S}\, X_v x \end{vmatrix}$$

Wird rechts die erste Zeile mit x, die zweite mit y multipliziert und dann jedesmal von der letzten Zeile subtrahiert, so ergibt sich

$$\begin{vmatrix} X & X_u & X_v \\ Y & Y_u & Y_v \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{D}_u & \mathfrak{D}_v \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} X & X_u & X_v \\ Y & Y_u & Y_v \\ Z & Z_u & Z_v \end{vmatrix}$$

Infolge von (10) ist daher auch die linksstehende Determinante gleich Null, was nach dem Satze 7, S. 27, besagt, daß die Verhältnisse von X, Y und $\mathfrak{D}$ voneinander abhängig sind. Ebenso erkennt man, daß die Verhältnisse von Y, Z und $\mathfrak{D}$ sowie die von Z, X und $\mathfrak{D}$ voneinander abhängig sind. Nun aber stellt nach XI (E)

$$X(\mathfrak{x} - x) + Y(\mathfrak{y} - y) + Z(\mathfrak{z} - z) = 0$$

oder nach (11)

$$X\mathfrak{x} + Y\mathfrak{y} + Z\mathfrak{z} = \mathfrak{D}$$

alle Tangentenebenen der Fläche in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ vor. Diese Gleichung ist von der allgemeinen Form

$$\mathfrak{A}(u, v)\mathfrak{x} + \mathfrak{B}(u, v)\mathfrak{y} + \mathfrak{C}(u, v)\mathfrak{z} = \mathfrak{D}(u, v),$$

und nach dem, was vorhin bewiesen wurde, hängen dabei die Verhältnisse von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ sämtlich voneinander ab. Deshalb hat die Fläche höchstens ein einfach unendliche Schar von Tangentenebenen, ja es kann sein, daß sie nur eine Tangentenebene hat, nämlich wenn sie selbst eine Ebene ist. Wird noch beachtet, daß diejenigen Flächen, auf denen überall $D^2 = 0$ ist, nach S. 18 aus-

geschlossen werden, so lehrt Satz 13, I S. 381, sowie Satz 9 auf S. 31, daß die Fläche abwickelbar sein muß.

Umgekehrt: Liegt eine abwickelbare Fläche wie in I S. 351 vor in der Form

$$x = \varphi(v) + u\varphi'(v), \qquad y = \chi(v) + u\chi'(v), \qquad z = \psi(v) + u\psi'(v),$$

so ergibt sich, da x, y, z in u linear sind, nach (11), S. 122, sofort $DL = 0$ und $DM = 0$, also auch $D(LN - M^2) = 0$ und daher $LN - M^2 = 0$.

Mithin haben wir den

Satz 28: Diejenigen Flächen, auf denen überall $LN - M^2$ gleich Null ist, sind identisch mit den abwickelbaren Flächen.

Hierbei sei bemerkt: Nach Satz 15, I S. 390, sind die Tangentenflächen von Minimalkurven, nicht-zylindrischen Kegel von Minimalgeraden und Minimalebenen keine abwickelbaren Flächen. Auf ihnen ist $D = 0$. Ferner: Weil die Bedingung $LN - M^2 = 0$ für einen Flächenpunkt (u, v) die geometrische Bedeutung hat, daß seine beiden Haupttangenten zusammenfallen, gilt sie auch dann, wenn man die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung in bezug auf irgend ein anderes System von Parametern auf der Fläche bildet.

Da die Ebenen alle ihre Geraden zu Haupttangenten haben, führt Satz 28, wenn man die Ebene deshalb ausschließt, zu dem

Satz 29: Die nicht-ebenen abwickelbaren Flächen sind diejenigen Flächen, auf denen überall die beiden Haupttangenten zusammenfallen und zwar in die geradlinigen Erzeugenden der Flächen.

Die Schlußworte des Satzes leuchten nach dem 1. Beispiele auf S. 148 ein.

Oben wurde bemerkt, daß das Auftreten von Spitzen oder Rückkehrpunkten beim Schnitte einer Fläche mit einer Tangentenebene in dem Falle, wo im Berührungspunkte $LN - M^2$ verschwindet, nicht streng bewiesen ist. In der Tat trifft es auch bei den abwickelbaren Flächen nicht zu, denn sie haben mit ihren Tangentenebenen jeweils eine geradlinige Erzeugende in ihrer ganzen Ausdehnung gemein.

Aus Satz 26 läßt sich noch eine Folgerung ziehen, die für die nicht-abwickelbaren Flächen zweiter Ordnung gilt. Nach Satz 29 haben allgemein gewählte Punkte einer solchen Fläche nicht etwa zwei zusammenfallende, sondern notwendig getrennte Haupttangenten. Die Schnittkurve der Fläche mit einer allgemein ge-

wählten Tangentenebene muß also im Berührungspunkte zwei verschiedene Tangenten haben; sie ist aber ein Kegelschnitt, und folglich muß dieser Kegelschnitt in diese beiden Tangenten zerfallen. Demnach sind alle Haupttangenten der Fläche Geraden, die vollständig der Fläche angehören. Somit enthält jede nicht-abwickelbare Fläche zweiter Ordnung zwei einfach unendliche Scharen von Geraden.

Umgekehrt: Wenn eine Fläche zwei einfach unendliche Scharen von Geraden hat, so daß also durch einen allgemein gewählten Punkt der Fläche zwei Geraden gehen, die der Fläche angehören, so ist sie notwendig von der zweiten Ordnung. Denn da alle diese Geraden nicht etwa durch einen gemeinsamen Punkt gehen oder parallel sind, weil die Fläche sonst ein Kegel oder Zylinder wäre, der offenbar nur eine Geradenschar hat, sind in der einen Schar jedenfalls drei Geraden vorhanden, die nicht sämtlich durch denselben Punkt gehen oder parallel sind. Die Geraden der zweiten Schar müssen sie schneiden. Man beweist aber bekanntlich in der analytischen Geometrie, daß alle Geraden, die jene drei treffen, eine Fläche zweiter Ordnung bilden. Deshalb gilt der

Satz 30: Die nicht-abwickelbaren Flächen zweiter Ordnung sind die einzigen Flächen, die lauter Geraden derart enthalten, daß durch einen allgemein gewählten Flächenpunkt zwei verschiedene Geraden gehen. Alle diese Geraden sind zugleich die Haupttangenten der Flächen.

Auf dem einschaligen Hyperboloid und dem hyperbolischen Paraboloid sind die Geraden reell, auf dem zweischaligen Hyperboloid, dem elliptischen Paraboloid und dem Ellipsoid imaginär. Die Kugel ist ein Ellipsoid; von ihr wissen wir schon, daß sie zwei Scharen von Minimalgeraden enthält, die also ihre Haupttangenten sind (vgl. Satz 32, S. 78).

§ 6. Die Indikatrix eines Flächenpunktes.

Wir betrachten weiterhin die grundlegende Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2}$$

für die Krümmung des zu $k = dv:du$ gehörigen Normalschnittes eines Flächenpunktes (u, v), vgl. S. 125. Nach S. 130 ist die rechte Seite nur dann mit einem in k linearen Faktor zu kürzen, wenn der Ausdruck

$$(GL - EN)^2 - 4(EM - FL)(FN - GM)$$

gleich Null wird. Auch ist bekannt, daß dieser Fall nie in einem reellen Punkte einer reellen Fläche vorkommt, die keine Ebene oder Kugel ist (vgl. S. 131). Da die folgenden Betrachtungen nur für solche Punkte gelten, für die jener Ausdruck nicht gleich Null ist, empfiehlt es sich, einen regulären Flächenpunkt (u, v) gewöhnlich oder außergewöhnlich zu nennen, je nachdem für ihn der Ausdruck

$$(GL - EN)^2 - 4(EM - FL)(FN - GM)$$

von Null verschieden oder gleich Null ist. Alle reellen regulären Punkte einer reellen Fläche, abgesehen von Ebenen und Kugeln, sind zugleich gewöhnliche Punkte.

Wie gesagt, sehen wir jetzt von den außergewöhnlichen Punkten ab. Dies braucht jedoch in den aufzustellenden Sätzen nicht besonders hervorgehoben zu werden, sobald darin von den Hauptkrümmungsradien oder von den Hauptkrümmungen eines Flächenpunktes die Rede ist, denn es kommen nur den gewöhnlichen regulären Flächenpunkten Hauptkrümmungsradien und Hauptkrümmungen zu.

Die Formel für die Krümmung der Normalschnitte eines gewöhnlichen Flächenpunktes soll uns nun zu einer geometrischen Konstruktion der Krümmungsradien der Normalschnitte führen. Zu diesem Zwecke benutzen wir wie auch später öfters ein besonders geeignetes neues rechtwinkliges Koordinatensystem $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$:

Der Flächenpunkt P oder (u, v) sei der neue Anfangspunkt, die $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Achse seien die Tangenten der beiden Hauptkrümmungsschnitte des Punktes P, die ja nach Satz 14, S. 135, aufeinander senkrecht stehen und im reellen Falle auch reell sind. Die $\mathfrak{z}$-Achse soll auch in der Orientierung mit der Normalen des Punktes P zusammenfallen. In dem neuen Koordinatensystem wollen wir die Koordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ selbst als Parameter, statt u und v, benutzen. Die Fläche denken wir uns also analytisch in der Form dargestellt (vgl. S. 6):

$$\mathfrak{z} = f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}).$$

Wir nennen das neue rechtwinklige Achsenkreuz kurz das begleitende Achsenkreuz des Flächenpunktes P.

Die der neuen Darstellung zugehörigen Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung seien mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ bezeichnet, so daß wir haben:

$$\frac{1}{R} = \frac{\mathfrak{L} + 2\mathfrak{M}\mathfrak{k} + \mathfrak{N}\mathfrak{k}^2}{\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}\mathfrak{k} + \mathfrak{G}\mathfrak{k}^2},$$

wobei nun

$$\mathfrak{k} = d\mathfrak{y} : d\mathfrak{x}$$

ist. Da die Parameterlinie $\mathfrak{y} = 0$ im neuen Anfangspunkte P die $\mathfrak{x}$-Achse und die Parameterlinie $\mathfrak{x} = 0$ dort die $\mathfrak{y}$-Achse berührt, ist für den Anfangspunkt P:

(1) $$\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}}\right)_0 = 0.$$

Der Index 0 soll hier wie nachher daran erinnern, daß sich die Gleichungen nur auf den Punkt P beziehen. Nach XI (A) und XI (C) kommt:

(2) $$\mathfrak{E}_0 = 1, \quad \mathfrak{F}_0 = 0, \quad \mathfrak{G}_0 = 1, \quad \mathfrak{D}_0 = 1.$$

Da ferner $d\mathfrak{y} = 0$ und $d\mathfrak{x} = 0$ oder also $\mathfrak{k} = 0$ und $\mathfrak{k} = \infty$ die Hauptkrümmungsrichtungen von P liefern, muß die quadratische Gleichung für $\mathfrak{k}$, die — nur mit lateinischen statt deutschen Buchstaben — in Satz 14, S. 135, angegeben wurde, für den Punkt P die Form $\mathfrak{k} = 0$ haben. Also ist jetzt auch für den Punkt P:

(3) $$\mathfrak{M}_0 = 0$$

oder nach (16), S. 124:

(4) $$\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}\, \partial \mathfrak{y}}\right)_0 = 0.$$

Nunmehr kommt:

$$\frac{1}{R} = \frac{\mathfrak{L}_0 + \mathfrak{N}_0 \mathfrak{k}^2}{1 + \mathfrak{k}^2}.$$

Für $\mathfrak{k} = 0$ und $\mathfrak{k} = \infty$ ergeben sich die beiden Hauptkrümmungen:

(5) $$\frac{1}{R_1} = \mathfrak{L}_0, \quad \frac{1}{R_2} = \mathfrak{N}_0,$$

so daß nach (16), S. 124, für den Punkt P

(6) $$\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}^2}\right)_0 = \frac{1}{R_1}, \quad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}^2}\right)_0 = \frac{1}{R_2}$$

ist. Ferner sei φ der Winkel der Richtung ($\mathfrak{k}$) mit der Richtung der $\mathfrak{x}$-Achse ($\mathfrak{k} = 0$), also:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = \mathfrak{k}.$$

Die Formel für $1 : R$ kann nun so geschrieben werden:

(7) $$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}.$$

Da wir für jeden gewönlichen Flächenpunkt P diese Betrachtung anstellen können, indem wir immer das zugehörige begleitende Achsenkreuz benutzen, folgt:

Satz 31: Sind R_1 und R_2 die Abszissen der Mittelpunkte der beiden Hauptkrümmungskreise eines Flächenpunktes, gemessen vom Flächenpunkte an entsprechend der Orien-

tierung seiner Normalen, so haben die Krümmungsmittelpunkte derjenigen Normalschnitte, die mit dem ersten Hauptkrümmungsschnitte die Winkel $\pm \varphi$ bilden, eine Abszisse R, die sich aus der Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}$$

bestimmt.[1]

Ersetzen wir φ durch $\varphi \pm \frac{1}{2}\pi$, so erkennen wir hieraus sofort:

Satz 32: Die Summe der Krümmungen zweier zueinander senkrechter Normalschnitte ist gleich der Summe der Hauptkrümmungen der betreffenden Stelle.

Da die Formel (7) nur die Quadrate des Sinus und Kosinus von φ enthält, kommt es dabei auf den Sinn der Messung des Winkels φ gar nicht an.

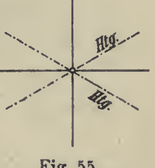


Fig. 55.

Die Haupttangenten sind durch die Eigenschaft $1 : R = 0$ charakterisiert (nach S. 148), so daß ihre Winkel α mit der ersten Hauptkrümmungsrichtung nach (7) durch:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2} = 0$$

oder:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{-\frac{R_2}{R_1}} \tag{8}$$

bestimmt werden. Also (siehe Fig. 55):

Satz 33: Die Hauptkrümmungsrichtungen eines Flächenpunktes halbieren die Winkel seiner Haupttangenten.

Ferner:

Satz 34: Die Größe des Winkels der Haupttangenten eines Flächenpunktes hängt nur vom Verhältnisse der Hauptkrümmungen des Punktes ab.

Beschränken wir uns auf reelle Normalschnitte eines reellen Flächenpunktes und sind R_1 und R_2 beide positiv, so gilt dasselbe nach (7) von jedem Krümmungsradius R des Punktes P, der dann konvex-konvex ist (nach S. 149). Tragen wir auf der Tangente von P, die mit der $\mathfrak{x}$-Achse den Winkel φ bildet, von P aus nach beiden Seiten den Wert der Quadratwurzel des zugehörigen Krüm-

[1] Dieser Satz heißt der Eulersche Satz. Siehe die Anmerkung auf S. 135.

mungsradius R als Strecke auf, so bilden die Endpunkte, die sich so für beliebige Werte von φ ergeben, eine **Ellipse**, denn sie haben die Koordinaten:

$$\mathfrak{x} = \pm \sqrt{R} \cos \varphi, \quad \mathfrak{y} = \pm \sqrt{R} \sin \varphi,$$

die nach (7) die Gleichung erfüllen:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} = 1.$$

$\sqrt{R_1}$ und $\sqrt{R_2}$ sind die auf der $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Achse gelegenen Halbachsen der Ellipse. (Siehe Fig. 56.)

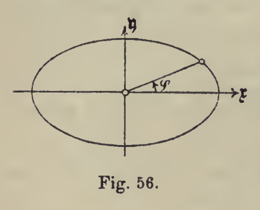


Fig. 56.

Sind R_1 und R_2 beide negativ, so gilt dasselbe nach (7) von jedem Krümmungsradius R des Punktes P. Die Stelle ist wieder konvex-konvex. Wir tragen auf allen Tangenten von P aus nunmehr $\sqrt{-R}$ ab und erhalten die Ellipse:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{-R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{-R_2} = 1.$$

In beiden betrachteten Fällen hat P nach (8) imaginäre Haupttangenten, und zwar sind die Haupttangenten offenbar die imaginären Asymptoten der betreffenden Ellipse. Die konvex-konvexen Flächenpunkte heißen wegen des Auftretens der Ellipse auch **elliptische Flächenpunkte**.

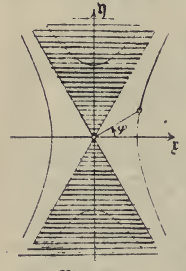


Fig. 57.

Ist R_1 positiv und R_2 negativ, so sind die Haupttangenten nach (8) reell. Es sei α der positive spitze Winkel, für den dann

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = -\frac{R_2}{R_1}$$

ist. Nun ist nach (7) der Wert R positiv, solange φ zwischen $+\alpha$ und $-\alpha$ liegt, sonst negativ. (Vgl. S. 150.) Die Fläche ist an der Stelle P konvex-konkav. Tragen wir wieder auf allen Tangenten den zugehörigen Wert der Quadratwurzel von R bzw. $-R$ ab, je nachdem R positiv oder negativ ist, so erfüllen die Koordinaten der Endpunkte entweder die Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} - \frac{\mathfrak{y}^2}{-R_2} = 1 \quad (\text{für } R > 0)$$

oder die Gleichung

$$-\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{-R_2} = 1 \quad (\text{für } R < 0)$$

Dies sind die Gleichungen zweier konjugierter Hyperbeln, die die beiden Haupttangenten zu Asymptoten haben. (Siehe Fig. 57.)

Ist R_1 negativ und R_2 positiv, so werden die Haupttangenten ebenso konstruiert. Im übrigen gilt über das Vorzeichen von R gerade das Entgegengesetzte wie vorher. Wir kommen jetzt zu den beiden konjugierten Hyperbeln:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{-R_1} - \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} = 1 \quad (\text{für } R < 0)$$

und:

$$-\frac{\mathfrak{x}^2}{-R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} = 1 \quad (\text{für } R > 0),$$

die wieder die Haupttangenten zu Asymptoten haben.

Die konvex-konkaven Flächenpunkte heißen wegen des Auftretens der Hyperbelpaare auch hyperbolische Flächenpunkte.

Wird einer der beiden Hauptkrümmungsradien unendlich groß, so erhalten wir durch eine entsprechende Konstruktion statt der Ellipse oder des Hyperbelpaares ein Paar paralleler Geraden. Wird nämlich etwa $R_1 = \infty$ und R_2 positiv, so kommt als Gleichung (7):

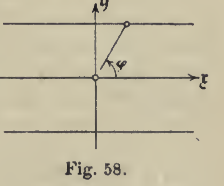


Fig. 58.

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin^2 \varphi}{R_2},$$

so daß R beständig positiv ist. Wird nun $\sqrt{R}$ auf der zugehörigen Tangente aufgetragen, so liegt der Endpunkt auf einer der beiden Geraden (siehe Fig. 58):

$$\mathfrak{y} = \pm \sqrt{R_2}.$$

Wird dagegen $R_1 = \infty$ und R_2 negativ, so ist R beständig negativ und das Abtragen von $\sqrt{-R}$ auf den Tangenten liefert das Geradenpaar $\mathfrak{y} = \pm \sqrt{-R_2}$. Ebenso ergibt sich, wenn R_1 positiv und $R_2 = \infty$ wird, das Geradenpaar $\mathfrak{x} = \pm \sqrt{R_1}$ und, wenn schließlich R_1 negativ und $R_2 = \infty$ wird, das Geradenpaar $\mathfrak{x} = \pm \sqrt{-R_1}$. Jedesmal ist die in diesen Fällen einzige Haupttangente des betreffenden Flächenpunktes dem Geradenpaar parallel.

Wandert ein Punkt auf der Fläche auf einem stetigen reellen und nur gewöhnliche Punkte enthaltenden Wege von einer elliptischen zu einer hyperbolischen Stelle, so muß eine der beiden Hauptkrümmungen während des Weges wenigstens einmal das Vorzeichen wechseln und also durch den Wert Null gehen, da sie nach S. 133

nie unendlich groß werden. Diejenigen Punkte also, für die eine der beiden Hauptkrümmungen gleich Null ist, stellen den Übergang von den elliptischen zu den hyperbolischen Punkten dar und heißen deshalb parabolische Punkte der Fläche. Aber es gibt reelle Flächen, die gar keine parabolischen Punkte haben; z. B. hat die Kugel nur elliptische und das einschalige Hyperboloid nur hyperbolische Punkte.

Wie bemerkt wurde, sind die Haupttangenten in einem hyperbolischen Punkte die reellen Asymptoten der auftretenden Hyperbeln und in einem elliptischen Punkte die imaginären Asymptoten der auftretenden Ellipse. Man nennt die Haupttangenten eines Flächenpunktes deshalb auch seine Asymptoten.

Die Ergebnisse formulieren wir in dem

Satz 35: Trägt man auf allen Tangenten eines reellen gewöhnlichen Punktes P einer reellen Fläche von P aus jeweils die Quadratwurzel aus dem absoluten Betrage des Krümmungsradius R des zu der Tangente gehörigen Normalschnittes auf, so ist der Ort der Endpunkte im Falle eines konvex-konvexen Punktes P eine Ellipse, im Falle eines konvex-konkaven Punktes P ein Paar von konjugierten Hyperbeln und in dem Falle, wo eine Hauptkrümmung gleich Null wird, ein Paar von parallelen Geraden. Die Achsen der Kegelschnitte fallen dabei in die beiden Hauptkrümmungsrichtungen des Flächenpunktes P, und die imaginären Asymptoten der Ellipse bzw. reellen Asymptoten des Hyperbelpaares sind die Haupttangenten von P. Im Falle des Geradenpaares liegt P auf der Mittellinie des Paares, und die Geraden sind parallel demjenigen Normalschnitte von P, dessen Krümmung gleich Null wird und in dem die einzige Haupttangente liegt.

Die Ellipse, das Hyperbelpaar und das Geradenpaar, die hier auftreten, heißen jeweils die Indikatrix des Flächenpunktes.[1]

Zu Kurven, die zur Indikatrix ähnlich und ähnlich gelegen, aber unendlich klein sind, führt uns nun auch eine Grenzbetrachtung. Außer einem gewöhnlichen Flächenpunkte P oder (u, v) betrachten wir einen benachbarten Flächenpunkt Q oder $(u + \Delta u,$

---

[1] Diese Bezeichnung rührt von Dupin her, vgl. die 3. Anm. zu S. 143. Allerdings ist dabei zu sagen, daß wir hier den Begriff der Indikatrix enger fassen, als es Dupin getan hat. Wir kommen hierauf in der Anm. zu S. 178 zurück.

$v + \Delta v$). Das Lot von Q auf die Normale von P habe den Fußpunkt M, und die Tangentenebene von Q treffe die Normale von P in S, siehe Fig. 59, deren Ebene diejenige Ebene durch die Normale von P ist, die Q enthält. Die rechtwinkligen Koordinaten von P seien x, y, z, und die von Q seien $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$. Wir wollen untersuchen, in welcher Art die drei Strecken PM, PS, MQ nach Null streben, wenn Q auf der Fläche nach P strebt.

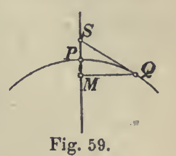


Fig. 59.

Wie immer bezeichnen wir mit X, Y, Z die Richtungskosinus der Normale von P und entsprechend mit $X + \Delta X$, $Y + \Delta Y$, $Z + \Delta Z$ die der Normale von Q. Die Ebene durch Q senkrecht zur Normale von P hat in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Gleichung:

$$(9) \qquad \mathbf{S}\, X(\mathfrak{x} - x - \Delta x) = 0,$$

dagegen die Tangentenebene von Q die Gleichung:

$$(10) \qquad \mathbf{S}(X + \Delta X)(\mathfrak{x} - x - \Delta x) = 0.$$

Sie treffen die Normale von P in den Punkten M und S. Nun aber hat irgend ein Punkt dieser Normale die Koordinaten $x + Xt$, $y + Yt$, $z + Zt$, wenn t seine Entfernung von P, gemessen entsprechend der Orientierung der Normale, bedeutet. In dieser Art messen wir die Strecken PM und PS. Demnach sind

$$x + X.PM, \quad y + Y.PM, \quad z + Z.PM$$

die Koordinaten von M und

$$x + X.PS, \quad y + Y.PS, \quad z + Z.PS$$

die von S. Die einen müssen die Gleichung (9), die anderen die Gleichung (10) für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ befriedigen. Daher ergibt sich

$$\mathbf{S}\, X(X.PM - \Delta x) = 0, \quad \mathbf{S}(X + \Delta X)(X.PS - \Delta x) = 0$$

oder wegen $SX^2 = 1$:

$$(11) \qquad PM = \mathbf{S}\, X \Delta x, \quad PS = \frac{\mathbf{S}(X + \Delta X)\Delta x}{1 + \mathbf{S}\, X \Delta X}$$

Schließlich ist noch

$$MQ^2 = \mathbf{S}(x + \Delta x - x - X.PM)^2 = \mathbf{S}(\Delta x - X.PM)^2$$
$$= \mathbf{S}\,\Delta x^2 - 2\mathbf{S}\, X \Delta x . PM + PM^2,$$

oder, wenn wir den für PM gewonnenen Wert (11) einsetzen:

$$(12) \qquad MQ^2 = \mathbf{S}\,\Delta x^2 - (\mathbf{S}\, X \Delta x)^2.$$

Demnach haben wir:

$$(13) \qquad \frac{MQ^2}{PM} = \frac{\mathbf{S}\,\Delta x^2 - (\mathbf{S}\, X \Delta x)^2}{\mathbf{S}\, X \Delta x}, \qquad \frac{PS}{PM} = \frac{\mathbf{S}(X + \Delta X)\Delta x}{\mathbf{S}\, X \Delta x(1 + \mathbf{S}\, X \Delta X)}.$$

Bei der Frage, wonach diese Werte streben, wenn der Punkt Q auf der Fläche nach P strebt, hat man wohl zu beachten, daß z. B. in $\mathbf{S}\, X\Delta x$ beim Grenzübergange die Glieder erster Dimension in Δu und Δv verschwinden, also die zweiter Dimension in Betracht kommen. Es ist nämlich

$$\Delta x = x_u\,\Delta u + x_v\,\Delta v + \tfrac{1}{2}(x_{uu}\,\Delta u^2 + 2x_{uv}\,\Delta u\,\Delta v + x_{vv}\,\Delta v^2) + \ldots$$

zu setzen, und entsprechende Entwicklungen gelten für Δy und Δz, sowie für ΔX, ΔY und ΔZ. Daher wird zunächst:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\, X\Delta x &= \mathbf{S}\, Xx_u \cdot \Delta u + \mathbf{S}\, Xv_v \cdot \Delta v \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\mathbf{S}\, Xx_{uu}\cdot \Delta u^2 + 2\mathbf{S}\, Xx_{uv}\cdot \Delta u\,\Delta v + \mathbf{S}\, Xx_{vv}\cdot \Delta v^2) + \ldots\end{aligned}$$

Da nun $\mathbf{S}\, Xx_u$ und $\mathbf{S}\, Xx_v$ nach XI (I) verschwinden und Δu^2, $2\,\Delta u\,\Delta v$ und Δv^2 in der Klammer Koeffizienten haben, die nach (8), S. 122, gleich L, M, N sind, ist beim Grenzübergange zu setzen:

$$\mathbf{S}\, X dx = \tfrac{1}{2}(L\,du^2 + 2M du\,dv + N dv^2). \tag{14}$$

Ferner ist, wie bekannt:

$$\mathbf{S}\, dx^2 = E\,du^2 + 2F du\,dv + G\,dv^2,$$

außerdem nach (13), S. 124:

$$\mathbf{S}\, dX dx = -(L\,du^2 + 2M du\,dv + N dv^2).$$

Weiterhin ist:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\, X\Delta X &= \mathbf{S}\, XX_u \cdot \Delta u + \mathbf{S}\, XX_v \cdot \Delta v \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\mathbf{S}\, XX_{uu}\cdot \Delta u^2 + 2\mathbf{S}\, XX_{uv}\cdot \Delta u\,\Delta v + \mathbf{S}\, XX_{vv}\cdot \Delta v^2) + \ldots\end{aligned}$$

Nach XI (H) sind hier die Koeffizienten von Δu und Δv gleich Null. Folglich wird $\mathbf{S}\, Xd X$ von der mindestens zweiten Dimension in du und dv. Mithin liefern die Formeln (13), wenn Q unendlich nahe bei P liegt:

$$\lim \frac{MQ^2}{PM} = 2\frac{E\,du^2 + 2F du\,dv + G\,dv^2}{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}, \qquad \lim \frac{PS}{PM} = -1, \tag{15}$$

vorausgesetzt, daß der Bruch

$$\frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}$$

für die Fortschreitungsrichtung $(dv:du)$ von P nach Q nicht verschwindet. Da übrigens nach (11) und (14)

$$\lim PM = \tfrac{1}{2}(L\,du^2 + 2M du\,dv + N\,dv^2) \tag{16}$$

wird, während $E du^2 + 2F du\,dv + G\,dv^2$ gleich dem Bogenelement-Quadrat ds^2 von P nach Q ist, kann die Voraussetzung so aus-

gesprochen werden: Vorausgesetzt wird, daß die Strecke PM in derselben Ordnung unendlich klein wird, wie das Quadrat des Bogenelements PQ.

Nach (9), S. 122, läßt sich die erste Formel (15) kürzer schreiben, wenn man mit $1:R$ die Krümmung des zur Fortschreitungsrichtung $(dv:du)$ gehörigen Normalschnittes von P bezeichnet. Danach kommt:

$$\lim \frac{MQ^2}{PM} = 2R, \quad \lim \frac{PS}{PM} = -1$$

oder auch

(17) $$\lim MQ^2 = R \, . \, 2 \lim PM, \quad \lim PS = -\lim PM.$$

Nunmehr wollen wir uns auf die Betrachtung einer reellen Fläche und reeller Fortschreitungsrichtungen $(dv:du)$ von einem reellen Flächenpunkte P aus beschränken. Anstatt Q unendlich nahe bei P zu wählen, nehmen wir zuerst auf der Flächennormale von P einen Punkt M unendlich nahe bei P an, siehe wieder Fig. 59, S. 165. Durch M legen wir die Ebene senkrecht zur Normale, also parallel zur Tangentenebene von P. Wenn diese Ebene die Fläche in einer reellen Kurve schneidet, fassen wir nur solche Punkte Q dieser Schnittkurve ins Auge, die unendlich nahe bei P und zwar so liegen, daß das Quadrat des Bogenelements PQ von derselben Ordnung wie die Strecke PM ist. Für alle diese Punkte Q der Schnittebene hat PM einerlei Länge, und aus der ersten Formel (17) folgt, daß die Quadrate der Radienvektoren MQ von M nach den Punkten Q der Schnittkurve proportional zu den Krümmungsradien R der Normalschnitte von P sind, die zu den Fortschreitungsrichtungen PQ gehören, also der Normalschnitte, die durch die Ebenen PMQ bestimmt werden. Erinnern wir uns jetzt daran, daß sich die Indikatrix-Kegelschnitte nach Satz 35 dadurch ergaben, daß auf den Tangenten von P die Quadratwurzeln aus den Krümmungsradien R der zugehörigen Normalschnitte oder aus den mit -1 multiplizierten Krümmungsradien als Strecken aufgetragen wurden, so erhellt: Die Schnittkurve ist, soweit sie nach der vorhin gemachten Voraussetzung überhaupt in Betracht kommt, ähnlich und ähnlich gelegen zu einem Indikatrix-Kegelschnitte.

Im einzelnen ist noch zu bemerken: Wenn P ein elliptischer Punkt ist, also die Krümmungsradien R der Normalschnitte von P entweder sämtlich positiv oder sämtlich negativ sind, folgt aus der ersten Formel (17), daß man PM auch entweder positiv oder negativ zu wählen hat, wenn man zu einer reellen Schnittkurve der Fläche mit der Ebene durch M parallel der Tangentenebene von P gelangen

will. Ist P dagegen ein hyperbolischer Punkt, so besteht keine solche Beschränkung; je nach der Wahl des Vorzeichens von PM erhält man eine zur einen oder anderen Indikatrix-Hyperbel ähnliche und ähnlich gelegene unendlich kleine Hyperbel als Schnittkurve. Man übersieht auch leicht, wie sich die Verhältnisse für einen parabolischen Punkt P gestalten. Hier sind ja die Krümmungsradien R aller Normalschnitte wie in einem elliptischen Punkte von einerlei Vorzeichen, nur einer wird unendlich groß.

Somit gilt der

Satz 36: Schneidet man eine reelle Fläche mit einer Ebene, die der Tangentenebene eines reellen gewöhnlichen Punktes P parallel und unendlich nahe ist und die Normale von P etwa in dem Punkte M trifft, so ist die Schnittkurve, soweit ihre Punkte Q so nahe bei P liegen, daß PM von derselben Ordnung unendlich klein wie die Quadrate der Bogenelemente PQ wird, eine unendlich nahe bei M gelegene Kurve, die zu einem Indikatrix-Kegelschnitte von P ähnlich und ähnlich gelegen ist, indem sie M als Mittelpunkt hat. Dabei hat man M im Falle eines elliptischen oder parabolischen Punktes auf der positiven oder negativen Normale von P zu wählen, je nachdem die Normalschnitte von P sämtlich positive oder negative Krümmungen haben, indem sich sonst keine reelle Schnittkurve ergibt. Im Falle eines hyperbolischen Punktes P dagegen wird die Schnittkurve der einen oder der anderen der beiden konjugierten Hyperbeln ähnlich, aus denen die Indikatrix besteht, je nachdem man PM positiv oder negativ wählt.

Fig. 60 soll den Fall eines elliptischen Punktes veranschaulichen. Die Figuren 61 und 62 beziehen sich beide auf einen und denselben hyperbolischen Punkt; einmal liegt die Schnittebene auf der einen und das andere Mal auf der anderen Seite der Tangentenebene von P. Figur 63 endlich stellt den Fall eines parabolischen Punktes dar. Natürlich hat man sich die Schnittkurve in den Figuren überall unendlich klein zu denken.

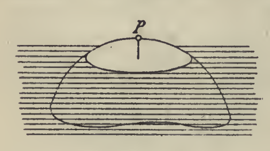


Fig. 60.

Die zweite Formel (17) lehrt weiterhin, da S darin den Schnittpunkt der Flächennormale von P mit der Tangentenebene eines der Punkte Q bedeutet:

Satz 37: Die Tangentenebenen der Punkte Q der in Satz 36 betrachteten Schnittkurven treffen sämtlich die Flächennormale P in ein und demselben Punkte S, der so liegt, daß P die Strecke MS halbiert.

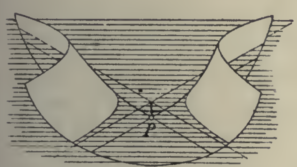


Fig. 61.

Fig. 62.

Diese Tangentenebenen umhüllen einen Kegel, nämlich den von S ausgehenden Tangentenkegel der Fläche, der aber hier nur so weit in Betracht kommt, als die Berührungspunkte Q so nahe bei P liegen, daß die Strecke PS von derselben Ordnung unendlich klein wird wie die Bogenelement-Quadrate PQ.

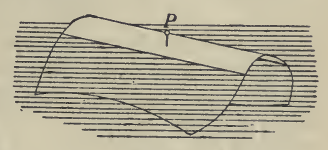


Fig. 63.

Nach (16) kann man die unendlich nahe beim Flächenpunkte P oder (v, v) verlaufende Kurve der Punkte Q oder $(u + du,\ v + dv)$ der Fläche, die durch eine zur Tangentenebene von P parallele Ebene in einem unendlich kleinen Abstande $PM = \varepsilon$ aus der Fläche ausgeschnitten wird, analytisch durch die Gleichung

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 2\varepsilon$$

darstellen.

Diese Kurve wollen wir jetzt noch in demjenigen Achsenkreuze $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ zum Ausdrucke bringen, das auf S. 159 als das begleitende Achsenkreuz des Flächenpunktes P bezeichnet wurde. Hier ist P selbst der Anfangspunkt und die Tangentenebene von P die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene, also die ihr unendlich nahe und parallele Schnittebene eine Ebene mit einer unendlich kleinen $\mathfrak{z}$-Koordinate. Die Fläche hat man sich in der Form $\mathfrak{z} = f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ dargestellt zu denken, und $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind ihre Parameter u und v. Für hinreichend kleine absolute Beträge von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gilt die Entwicklung:

$$\mathfrak{z} = \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}}\right)_0 \mathfrak{x} + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}}\right)_0 \mathfrak{y}$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}^2}\right)_0 \mathfrak{x}^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}\,\partial \mathfrak{y}}\right)_0 \mathfrak{x}\mathfrak{y} + \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}^2}\right)_0 \mathfrak{y}^2\right] + \cdots,$$

die nach (1), (4) und (6) die Gestalt annimmt:

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2}\right) + \cdots \tag{18}$$

Hat man $\mathfrak{z}$ unendlich klein gewählt und beschränkt man sich auf Punkte Q oder $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der Schnittebene, die so liegen, daß $\mathfrak{z}$ von derselben Ordnung unendlich klein wird wie die Quadrate der Bogenelemente PQ, so ergibt sich also

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} = 2\,\mathfrak{z} \tag{19}$$

als die Gleichung der Schnittkurve in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Sie stellt in der Tat einen Kegelschnitt mit der Mitte M auf der $\mathfrak{z}$-Achse dar und zwar ist dieser Kegelschnitt zu der in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene gelegenen Indikatrix

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} = \pm 1$$

ähnlich und ähnlich gelegen.

Nochmals sei hervorvorgehoben, daß wir uns immer auf Punkte Q der Schnittkurve beschränkt haben, die so liegen, daß PM von derselben Ordnung unendlich klein wird wie die Quadrate der Bogenelemente PQ. In der Tat wird sich die Schnittkurve der zur Tangentenebene von P unendlich benachbarten und parallelen Ebene durch M mit der Fläche sehr wohl weiterhin erstrecken können, und dann braucht sie nicht mehr der Indikatrix ähnlich zu sein. Läßt man die Beschränkung fallen, so ist der Schluß von (18) auf (19) bei der Annahme eines parabolischen Punktes P sogar schon dann nicht mehr richtig, wenn man bloß unendlich nahe bei P gelegene Punkte Q der Schnittkurve ins Auge faßt. Denn wenn z. B. $1 : R_1 = 0$ ist, muß man bedenken, daß die Entwicklung (18) weitergehend so lautet:

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{y}^2}{R_2}$$
$$+ \frac{1}{3!}\left[\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}^3}\right)_0 \mathfrak{x}^3 + 3\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}^2\,\partial \mathfrak{y}}\right)_0 \mathfrak{x}^2\mathfrak{y} + 3\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}\,\partial \mathfrak{y}^2}\right)_0 \mathfrak{x}\mathfrak{y}^2 + \left(\frac{\partial^3 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}^3}\right)_0 \mathfrak{y}^3\right] + \cdots$$

Wird $\mathfrak{y}$ unendlich klein, so sind nun allerdings die Glieder mit $\mathfrak{x}\mathfrak{y}^2$ und $\mathfrak{y}^3$ unendlich klein von noch höherer Ordnung, aber $\mathfrak{x}^3$ könnte von derselben Ordnung wie $\mathfrak{y}^2$ unendlich klein sein. Ist also

$$\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}^3}\right)_0 \neq 0,$$

so wird man $\mathfrak{y}^2$ und $\mathfrak{x}^3$ von derselben Ordnung unendlich klein annehmen; dann aber ist $\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}$ von höherer Ordnung unendlich klein, weil

$$(\mathfrak{x}^2\mathfrak{y})^2 = \mathfrak{y}^2 . \mathfrak{x}^3 . \mathfrak{x}$$

von höherer Ordnung als das Produkt $\mathfrak{y}^2 . \mathfrak{x}^3$ wird. Folglich hat man jetzt von der Entwicklung die folgenden Glieder zu berücksichtigen:

(20) $$\mathfrak{z} = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}^3}\right)_0 \mathfrak{x}^3,$$

und diese Gleichung stellt in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ nicht mehr einen Kegelschnitt dar.

Wohl aber besteht der Satz 36, wenn man an der Bedingung festhält, daß $\mathfrak{z} = PM$ von derselben Ordnung wie die Quadrate der Bogenelemente unendlich klein sein soll. Wir erläutern dies am besten durch ein

Beispiel: Die Flächengleichung[1])

(21) $$\mathfrak{z} = \frac{1}{4}\mathfrak{y}^2 - \frac{1}{20}\mathfrak{x}^3$$

ordnet sich der soeben betrachteten allgemeinen Gleichung $\mathfrak{z} = f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ unter, indem hier $1 : R_1 = 0$, $R_2 = 2$ und

$$\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}^3}\right)_0 = -\frac{3}{10}$$

ist. Die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene ist die Tangentenebene des Anfangspunktes O, der der Fläche angehört. Diese Ebene hat mit der Fläche eine algebraische Kurve dritter Ordnung gemein, die in O einen Rückkehrpunkt hat, in dem sie die positive $\mathfrak{x}$-Achse berührt (vgl. Fig. 36 in I S. 108). Die zur $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene parallelen Ebenen dagegen schneiden die Fläche in Kurven, die wesentlich anders verlaufen. Die zu $\mathfrak{z} = 0, \pm 0{,}1$ und $\pm 0{,}2$ gehörigen Kurven sind in Fig. 64 in der senkrechten Projektion auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene wiedergegeben. Da der Punkt O parabolisch ist und die Krümmungsradien seiner Normalschnitte positiv sind, kommt hier nur der Schnitt mit einer zur $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene parallelen Ebene in einem

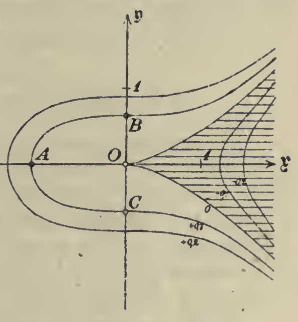


Fig. 64.

[1] Nachdem in der ersten Auflage dieses Buches (1902) auf den hier betrachteten Fall aufmerksam gemacht und insbesondere die Gleichung (20) aufgestellt worden war, veranlaßte Stäckel die Herstellung eines Gipsmodelles der Fläche (21) in dem Modellverlage von Schilling in Leipzig. Es erscheint uns daher zweckmäßig, hier genau dieselben Zahlenwerte der Koeffizienten zu wählen wie bei dem Modell.

unendlich kleinen **positiven** Abstande $\mathfrak{z}$ in Betracht. Nun hat die Kurve, die (21) in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ für ein bestimmtes positives $\mathfrak{z}$ darstellt, in ihrem Schnittpunkte mit der $\mathfrak{x}$-Achse einen Scheitel (vgl. I S. 42) mit der Abszisse $\mathfrak{x} = -\sqrt[3]{20\mathfrak{z}}$, dagegen in ihren Schnittpunkten mit der $\mathfrak{y}$-Achse Wendepunkte (vgl. I S. 20) mit den Ordinaten $\mathfrak{y} = \pm\, 2\sqrt{\mathfrak{z}}$. Die Wendetangenten sind der $\mathfrak{x}$-Achse parallel. Der Scheitel liegt z. B. bei der Kurve, die zu $\mathfrak{z} = 0{,}1$ gehört, an der mit A bezeichneten Stelle, während B und C die Wendepunkte dieser Kurve sind. Wird $\mathfrak{z}$ positiv sehr klein, so rücken allen diese Stellen allerdings unendlich nahe an O heran, aber es ist

$$\frac{\mathfrak{z}}{OA^2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{z}}{50}}, \qquad \frac{\mathfrak{z}}{OB^2} = \frac{\mathfrak{z}}{OC^2} = \frac{1}{4}.$$

Man sieht also, daß $\mathfrak{z}$ zwar in derselben Ordnung wie OB^2 und OC^2, aber nicht in derselben Ordnung wie OA^2 unendlich klein wird. Daher kommt nach der Vorschrift des Satzes 36 der Scheitel A hier **nicht** in Betracht. Je kleiner $\mathfrak{z}$ wird, um so näher rücken dagegen die Punkte B und C mit ihren Wendetangenten nach O, und diese beiden Wendetangenten stellen schließlich das zur Indikatrix des parabolischen Punktes O ähnliche und ähnlich gelegene Geradenpaar dar.

Die Unterscheidung der **elliptischen und hyperbolischen Punkte** hat natürlich nur für reelle Flächen einen Sinn. Dagegen sind die **parabolischen Punkte** auch sonst wohldefiniert, nämlich als diejenigen gewöhnlichen Flächenpunkte, in denen eine der beiden Hauptkrümmungen gleich Null wird.

§ 7. Oskulierende Flächen zweiter Ordnung.

Die Krümmungsverhältnisse in einem Flächenpunkte kann man auch dadurch zu veranschaulichen versuchen, daß man besonders einfache Flächen konstruiert, die die vorgelegte Fläche in dem zu betrachtenden Punkte so innig berühren, daß sie dort dieselben Krümmungen wie die vorgelegte Fläche aufweisen. Dazu wird man sich insbesondere der in gewissem Sinne einfachsten krummen Flächen, nämlich der Flächen zweiter Ordnung bedienen.

Um diesen Weg einschlagen zu können, sind wir aber genötigt, zunächst **in aller Kürze** über die **Berührung höherer Ordnung zwischen zwei Flächen** überhaupt zu sprechen.

Wir nehmen an, daß zwei Flächen einen Punkt P gemein haben, der nicht Minimalpunkt für eine von ihnen ist. Dann setzen wir entsprechend der Definition der Berührung zwischen Kurven und Flächen in I S. 306 fest: **Die beiden Flächen berühren einander in dem gemeinsamen Punkte P in mindestens n^{ter} Ordnung, wenn es zu jeder durch P gehenden Kurve der einen Fläche eine durch P gehende Kurve der anderen**

derart gibt, daß beide Kurven einander in mindestens n^{ter} Ordnung berühren. Man kann diese Definition mit Rücksicht auf I S. 27, 28 (und I S. 214) auch so aussprechen: Die Flächen berühren einander in P in mindestens n^{ter} Ordnung, wenn es zu jedem auf der einen Fläche unendlich nahe bei P gelegenen Punkte A einen Punkt $\mathfrak{A}$ auf der anderen Fläche unendlich nahe bei P derart gibt, daß die Strecke $A\mathfrak{A}$ unendlich klein von $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung wird, sobald die Strecken PA und $P\mathfrak{A}$ in erster Ordnung nach Null streben. Dabei ist es wie in I S. 28, 215 und 307 eine selbstverständliche Voraussetzung, daß weder die Richtung von P nach A noch die von P nach $\mathfrak{A}$ eine Minimalrichtung sei, weil ja PA nach $P\mathfrak{A}$ sonst die Länge Null haben.

Hieraus folgt leicht entsprechend dem Satze 9, I S. 30, und Satze 4, I S. 215, ein analytisches Merkmal. Der Unterschied gegenüber jenen Sätzen besteht erstens darin, daß jetzt statt der Reihen nach Potenzen von Δt und $\Delta \mathfrak{t}$ Reihen nach Potenzen von Δu und Δv sowie $\Delta \mathfrak{u}$ und $\Delta \mathfrak{v}$ treten, wenn u, v bzw. $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ die Parameter auf der einen bzw. anderen Fläche sind, und zweitens infolge hiervon darin, daß an die Stelle der einen Entwicklung von $\Delta \mathfrak{t}$ nach Potenzen von Δt zwei Entwicklungen, nämlich solche von $\Delta \mathfrak{u}$ und $\Delta \mathfrak{v}$ nach Potenzen von Δu und Δv, treten. Es ergibt sich der

Satz 38: Haben zwei Flächen

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

und

$$\mathfrak{x} = \Phi(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}), \qquad \mathfrak{y} = X(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}), \qquad \mathfrak{z} = \Psi(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$$

mit den Parametern u, v bzw. $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ einen Punkt gemein[1], so berühren sie einander dort in mindestens n^{ter} Ordnung, wenn es eine Substitution

$$\Delta \mathfrak{u} = \lambda_{10} \Delta u + \lambda_{01} \Delta v + \frac{1}{2!} (\lambda_{20} \Delta u^2 + 2 \lambda_{11} \Delta u \Delta v + \lambda_{02} \Delta v^2)$$
$$+ \cdots + \frac{1}{(n+1)!} (\lambda_{n+1,0} \Delta u^{n+1} + \cdots + \lambda_{0,n+1} \Delta v^{n+1}),$$
$$\Delta \mathfrak{v} = \mu_{10} \Delta u + \mu_{01} \Delta v + \frac{1}{2!} (\mu_{20} \Delta u^2 + 2 \mu_{11} \Delta u \Delta v + \mu_{02} \Delta v^2)$$
$$+ \cdots + \frac{1}{(n+1)!} (\mu_{n+1,0} \Delta u^{n+1} + \cdots + \mu_{0,n+1} \Delta v^{n+1}),$$

worin $\lambda_{10} \mu_{01} - \mu_{10} \lambda_{01}$ von Null verschieden ist, derart gibt, daß diejenigen Reihen nach Potenzen von Δu und Δv, die aus der Entwicklung

[1] Nach S. 22 ist der Fall von Minimalpunkten ausgeschlossen.

$$x - \mathfrak{x} = (x_u{}^0 \Delta u + x_v{}^0 \Delta v) - (\mathfrak{x}_{\mathfrak{u}}{}^0 \Delta \mathfrak{u} + \mathfrak{x}_{\mathfrak{v}}{}^0 \Delta \mathfrak{v})$$
$$+ \frac{1}{2!} [(x_{uu}{}^0 \Delta u^2 + 2 x_{uv}{}^0 \Delta u \Delta v + x_{vv}{}^0 \Delta v^2)$$
$$- (\mathfrak{x}_{\mathfrak{u}\mathfrak{u}}{}^0 \Delta \mathfrak{u}^2 + 2 \mathfrak{x}_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}{}^0 \Delta \mathfrak{u} \Delta \mathfrak{v} + \mathfrak{x}_{\mathfrak{v}\mathfrak{v}}{}^0 \Delta \mathfrak{v}^2)] + \ldots$$

sowie aus den entsprechenden Entwicklungen für $y - \mathfrak{y}$ und $z - \mathfrak{z}$ durch jene Substitution hervorgehen, frei von den Gliedern erster bis n^{ter} Dimension in Δu und Δv werden. Dabei deutet der Index Null überall an, daß die Ableitungen x_u, x_v, $\mathfrak{x}_{\mathfrak{u}}$, $\mathfrak{x}_{\mathfrak{v}}$ usw. der Koordinaten x, y, z bzw. $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ nach den Parametern u und v bzw. $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ für den gemeinsamen Punkt beider Flächen zu bilden sind.

Außerdem gilt der

Satz 39: Wenn zwei Flächen einander in einem Punkte in gerade n^{ter} Ordnung berühren, so berührt jede Kurve der einen Fläche, die durch den gemeinsamen Punkt geht und dort weder eine singuläre Stelle noch einen Minimalpunkt hat, die andere Fläche ebenda in mindestens n^{ter} Ordnung.

Der Beweis ergibt sich sofort, wenn man von der Definition der Berührung n^{ter} Ordnung in der oben erwähnten Form Gebrauch macht, wonach

$$\lim \frac{P\mathfrak{A}}{PA} \quad \text{und} \quad \lim \frac{A\mathfrak{A}}{PA^{n+1}}$$

endlich und von Null verschieden sein sollen. Ebenso ergibt sich, wie man ohne weiteres erkennt, der Beweis für den

Satz 40: Zwei Flächen berühren einander in einem gemeinsamen Punkte in gerade n^{ter} Ordnung, wenn es auf der ersten Fläche eine Schar von solchen Kurven gibt, die nach allen verschiedenen Richtungen der Fläche durch den gemeinsamen Punkt gehen, jedoch dort weder singuläre noch Minimalstellen haben und überdies ebenda die zweite Fläche in mindestens n^{ter} Ordnung berühren, während nicht alle diese Kurven dort die zweite Fläche in höherer als n^{ter} Ordnung berühren.

Hierbei ist Gewicht darauf zu legen, daß die Kurven der Schar auf der ersten Fläche nach allen verschiedenen Richtungen durch den betrachteten Punkt O gehen — natürlich immer abgesehen von den Minimaltangenten —, denn nur dann liegt jeder zu P benachbarte Punkt A der Fläche auf wenigstens einer dieser Kurven.

Als einfache Anwendung sei erwähnt, daß hieraus und aus Satz 4, S. 21, und Satz 22, S. 146, folgt:

Satz 41: Die Tangentenebene eines Flächenpunktes berührt die Fläche an dieser Stelle in gerade erster Ordnung, wenn die Stelle kein Flachpunkt der Fläche ist.

Sind zwei Flächen insbesondere in der Form

$$(1) \qquad z = f(x, y), \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),$$

bezogen auf dasselbe rechtwinklige Achsenkreuz, gegeben, so bedeuten x, y und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ nach S. 5 die Parameter u, v und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$. Die Reihen für $x - \mathfrak{x}$ und $y - \mathfrak{y}$, die in Satz 38 auftreten, haben dann die einfacheren Formen:

$$x - \mathfrak{x} = \Delta x - \Delta \mathfrak{x}, \quad y - \mathfrak{y} = \Delta y - \Delta \mathfrak{y}.$$

Wendet man nun den Satz 38 für einen gemeinsamen Punkt beider Flächen an, so ergibt sich, daß alle Koeffizienten λ, μ der Substitution bis zu den Gliedern n^{ter} Dimension gleich Null sein müssen, abgesehen von $\lambda_{10} = 1$ und $\mu_{01} = 1$. Einsetzen der Substitution in die Reihe für $z - \mathfrak{z}$ zeigt alsdann, daß alle Ableitungen von z nach x und y bis zu denen von der n^{ten} Ordnung in dem gemeinsamen Punkte dieselben Werte wie die entsprechenden Ableitungen von $\mathfrak{z}$ nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ haben müssen. So geht entsprechend dem Satze 11, I S. 34, der folgende hervor:

Satz 42: Wenn zwei auf dasselbe rechtwinklige Achsenkreuz bezogene Flächen $z = f(x, y)$ und $\mathfrak{z} = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ einen Punkt gemein haben, so berühren sie einander dort in gerade n^{ter} Ordnung, wenn die Werte der Ableitungen von z nach x und y mit denen der entsprechenden Ableitungen von $\mathfrak{z}$ nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ für den gemeinsamen Punkt miteinander bis zu denen von der n^{ten} Ordnung einschließlich vollständig übereinstimmen, dagegen nicht mehr vollständig bis zu denen von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung.[1]

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu derjenigen Anwendung, die am Anfange dieses Paragraphen angedeutet wurde. Wir betrachten einen gewöhnlichen Punkt P einer Fläche und benutzen sein begleitendes Achsenkreuz, vgl. S. 159, indem $z = f(x, y)$

[1] In den Sätzen 39 bis 42 ist ebenso wie in Satz 38 stillschweigend vorausgesetzt, daß der gemeinsame Punkt auf keiner der beiden Flächen ein Minimalpunkt sei, vgl. S. 22. Natürlich soll er auch nicht singulär sein, vgl. S. 7.

die Gleichung der Fläche sei. Für den Punkt P selbst, den Anfangspunkt, haben dann die Ableitungen erster und zweiter Ordnung von z nach x und y nach (1), (4) und (6), S. 160, die Werte:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = 0, \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{R_1}, \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{R_2}, \tag{3}$$

wenn $1:R_1$ und $1:R_2$ die Krümmungen der beiden Hauptschnitte von P sind, die in die xz-Ebene und yz-Ebene fallen.

Außer der Fläche $z = f(x, y)$ betrachten wir nun irgend eine Fläche zweiter Ordnung, die ebenfalls durch den Anfangspunkt P geht. Sie wird bekanntlich durch eine gleich Null gesetzte ganze Funktion zweiter Ordnung der drei Koordinaten dargestellt, wobei das konstante Glied fehlt. Demnach lautet ihre Gleichung in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ so:

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}\mathfrak{x}^2 + 2a_{12}\mathfrak{x}\mathfrak{y} + a_{22}\mathfrak{y}^2 + 2a_{13}\mathfrak{x}\mathfrak{z} + 2a_{23}\mathfrak{y}\mathfrak{z} + a_{33}\mathfrak{z}^2 \\ + 2a_{14}\mathfrak{x} + 2a_{24}\mathfrak{y} + 2a_{34}\mathfrak{z} = 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Zur späteren Vermeidung von lästigen Faktoren ist dabei in einigen Gliedern der Faktor Zwei angebracht worden.

Hierbei ist vorauszusetzen, daß a_{14}, a_{24} und a_{34} nicht sämtlich gleich Null seien, weil die Fläche (4) sonst ein Kegel mit der Spitze P, also in dem zu betrachtenden Punkte singulär wäre.

Nach Satz 42 berührt die Fläche (4) in P die Fläche $z = f(x, y)$ in mindestens zweiter Ordnung, wenn die Werte der Ableitungen erster und zweiter Ordnung von $\mathfrak{z}$ nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, die aus (4) durch partielle Differentiation hervorgehen, für $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 0$ mit den entsprechenden Werten (3) übereinstimmen. Ein- und zweimalige partielle Differentiation von (4) nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gibt aber:

$$a_{11}\mathfrak{x} + a_{12}\mathfrak{y} + a_{13}\mathfrak{z} + a_{14} + (a_{13}\mathfrak{x} + a_{23}\mathfrak{y} + a_{33}\mathfrak{z} + a_{34})\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}} = 0,$$

$$a_{12}\mathfrak{x} + a_{22}\mathfrak{y} + a_{23}\mathfrak{z} + a_{24} + (a_{13}\mathfrak{x} + a_{23}\mathfrak{y} + a_{33}\mathfrak{z} + a_{34})\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}} = 0,$$

$$a_{11} + 2a_{13}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}} + a_{33}\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}}\right)^2 + (a_{13}\mathfrak{x} + a_{23}\mathfrak{y} + a_{33}\mathfrak{z} + a_{34})\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} a_{12} + a_{13}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}} + a_{23}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}} + a_{33}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}} \\ + (a_{13}\mathfrak{x} + a_{23}\mathfrak{y} + a_{33}\mathfrak{z} + a_{34})\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}\,\partial \mathfrak{y}} = 0, \end{aligned}$$

$$a_{22} + 2a_{23}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}} + a_{33}\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}}\right)^2 + (a_{13}\mathfrak{x} + a_{23}\mathfrak{y} + a_{33}\mathfrak{z} + a_{34})\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}^2} = 0.$$

Setzen wir hierin $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 0$ und für die Ableitungen die Werte (2) und (3), so ergeben sich die folgenden Bedingungen für eine Berührung in mindestens zweiter Ordnung:

$$a_{14} = 0, \quad a_{24} = 0,$$

$$a_{11} + \frac{a_{34}}{R_1} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} + \frac{a_{34}}{R_2} = 0.$$

Da demnach a_{34} von Null verschieden angenommen werden muß und in (4) nur die Verhältnisse der Koeffizienten von Wert sind, dürfen wir $a_{34} = 1$ setzen, so daß a_{11} gleich $-1:R_1$ und a_{12} gleich $-1:R_2$ wird. Somit nimmt die Gleichung der gesuchten Fläche zweiter Ordnung, wenn man die drei Konstanten a_{13}, a_{23} und a_{33} etwas bequemer mit $-a$, $-b$ und $-c$ bezeichnet, die Form an:

$$(5) \qquad \frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} + 2axz + 2byz + cz^2 - 2z = 0.$$

Man kann nun untersuchen, ob diese Fläche die vorgelegte Fläche $z = f(x, y)$ im Anfangspunkte etwa auch in dritter Ordnung berührt. Zu diesem Zwecke muß man nach Satz 42 auch die partiellen Ableitungen dritter Ordnung berechnen. Da alsdann bloß ein negatives Ergebnis hervorgeht, unterdrücken wir die einfachen Ausrechnungen und bemerken nur, daß sich Bedingungen für die noch verfügbaren Konstanten a, b, c ergeben würden, die nur unter besonderen Annahmen bei der Fläche $z = f(x, y)$ an der betrachteten Stelle P erfüllbar wären.

Weil a, b, c nach Belieben gewählt werden können, stellt (5) eine dreifach unendliche Schar von Flächen zweiter Ordnung dar. Das Ergebnis ist also der

Satz 43: Es gibt eine dreifach unendliche Schar von Flächen zweiter Ordnung, die eine vorgelegte Fläche in einem bestimmten gewöhnlichen Punkte in zweiter Ordnung berühren. Die Berührung ist für keine dieser Flächen von noch höherer Ordnung, es sei denn, daß über die Beschaffenheit des Punktes der vorgelegten Fläche noch besondere Annahmen gemacht werden.

Die gefundenen Flächen (5) nennt man daher die im Punkte P der vorgelegten Fläche oskulierenden Flächen zweiter Ordnung (vgl. I S. 45).

Wir schneiden nun eine beliebige unter den Flächen (5) mit einer Ebene, die zur Tangentenebene von P, also zur xy-Ebene, parallel ist, d. h. wir setzen in (5) für z irgend eine Konstante. Alsdann ergibt sich als Schnittkurve ein Kegelschnitt:

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} + \alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

wobei α, β, γ irgendwelche Konstanten bedeuten. Dieser Kegelschnitt ist ähnlich und ähnlich gelegen mit den Kegelschnitten

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = \pm 1$$

in der xy-Ebene, d. h. mit der Indikatrix des Flächenpunktes O, vgl. S. 162 und S. 164.[1]

Somit gilt der

Satz 44: Alle in einem gewöhnlichen Flächenpunkte oskulierenden Flächen zweiter Ordnung werden durch die Ebenen parallel zur Tangentenebene des Punktes in Kegelschnitten getroffen, die zu den Indikatrix-Kegelschnitten des Flächenpunktes ähnlich und ähnlich gelegen sind.

Da alle Flächen (5) mit der vorgelegten Fläche $z = f(x, y)$ im Punkte P eine Berührung von gerade zweiter Ordnung eingehen, ist in dieser Hinsicht keine von ihnen ausgezeichnet. Aber man kann nach besonderen Arten unter diesen Flächen zweiter Ordnung fragen. Zunächst sieht man, indem man die Regeln der analytischen Geometrie anwendet, daß unter ihnen kein oskulierender Zylinder zweiter Ordnung enthalten ist, es sei denn, daß der Punkt P der Fläche $z = f(x, y)$ parabolisch ist. Im Falle eines parabolischen Punktes P wird etwa $1 : R_1 = 0$, aber $1 : R_2 \neq 0$ sein, und die Fläche (5) stellt nunmehr nur dann einen Zylinder dar, wenn $a = 0$ gewählt wird. Fragen wir nach den oskulierenden Kegeln zweiter Ordnung, so ergibt sich, daß keine vorhanden sind, die ihre Spitze im Endlichen haben auch nicht im Falle eines parabolischen Punktes P. Weiterhin kann man alle oskulierenden Paraboloide suchen. Da der etwa vorhandene Mittelpunkt der Fläche zweiter Ordnung (5) Koordinaten haben muß, die den Gleichungen

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{R_1} + a z = 0, \quad \dfrac{y}{R_2} + b z = 0, \\ a x + b y + c z = 1 \end{cases}$$

[1] Die in P oskulierenden Flächen zweiter Ordnung wurden zuerst von Dupin betrachtet, vgl. die 3. Anm. zu S. 143. Insbesondere bestimmte er den Kegelschnitt, in dem eine derartige Fläche durch diejenige Ebene geschnitten wird, die durch ihren Mittelpunkt M geht und zur Tangentenebene des betrachteten Punktes P parallel ist. Indem er diesen Kegelschnitt in der Richtung MP auf die Tangentenebene von P projizierte, bekam er denjenigen Kegelschnitt, den er insbesondere die Indikatrix von P nannte. Vgl. die Anm. zu S. 164.

genügen, und sich nur dann ein oskulierendes Paraboloid ergeben kann, wenn der Mittelpunkt ins Unendlichferne rückt, müßte also die Determinante dieser drei in x, y, z linearen Gleichungen verschwinden. Daraus folgt: Die Flächen (5) sind oskulierende Paraboloide, wenn

$$\frac{a^2}{R_2} + \frac{b^2}{R_1} = \frac{c}{R_1 R_2} \tag{7}$$

ist. Im Falle eines parabolischen Punktes P, wo also $1 : R_1$ oder $1 : R_2$ gleich Null ist, arten diese Paraboloide in Zylinder zweiter Ordnung aus. Wenn dagegen der Punkt P nicht parabolisch ist, geht infolge der Bedingung (7) eine zweifach unendliche Schar von oskulierenden Paraboloiden hervor. Unter diesen Paraboloiden gibt es eines und nur eines, dessen Achsenrichtung mit der Richtung der Normale des Flächenpunktes P, also mit der Richtung der z-Achse, zusammenfällt. Denn unter der Bedingung (7) kann man aus (6) leicht folgern, daß die Achse des Paraboloids Richtungskosinus proportional zu $a R_1$, $b R_2$ und -1 hat, also die Richtung der z-Achse haben wird, sobald $a = b = 0$ ist. Dann aber gibt (7) auch $c = 0$.

Mithin gilt der

Satz 45: Unter den zweifach unendlich vielen Paraboloiden, die eine vorgelegte Fläche in einem gewöhnlichen und nicht parabolischen Punkte oskulieren, gibt es gerade eines, dessen Achse die Richtung der Flächennormale dieses Punktes hat.

Dies Paraboloid stellt sich nach (5) in dem begleitenden Achsenkreuze durch die Gleichung dar:

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = 2z. \tag{8}$$

Es ist ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid, je nachdem R_1 und R_2 dasselbe Vorzeichen haben oder nicht, d. h. je nachdem der Flächenpunkt P selbst elliptisch oder hyperbolisch ist.

Dies oskulierende Paraboloid wird man als die einfachste Fläche bezeichnen können, die im Punkte P dieselben Krümmungsverhältnisse wie die vorgelegte Fläche $z = f(x, y)$ aufweist. Der Punkt P selbst ist der Scheitel des Paraboloids. Wir fassen die Ergebnisse so zusammen:

Satz 46: Hinsichtlich der Krümmungsverhältnisse hat der Scheitel des Paraboloids

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = 2z$$

den Charakter eines gewöhnlichen Flächenpunktes mit den beiden Hauptkrümmungen $1:R_1$ und $1:R_2$. Es artet in einen parabolischen Zylinder aus, wenn der Flächenpunkt parabolisch, also $1:R_1$ oder $1:R_2$ gleich Null ist.

Unter den dreifach unendlich vielen oskulierenden Flächen zweiter Ordnung (5) ist im allgemeinen keine Kugel vorhanden. Nur wenn $1:R_1$ denselben Wert wie $1:R_2$ hat, also P ein Nabelpunkt ist (vgl. S. 136 unten), ergibt sich bei den Annahmen $a = b = 0$ und $c = 1:R_1$ eine oskulierende Kugel.

§ 8. Fläche der Krümmungskreise der Normalschnitte eines Punktes.

Die letzten beiden Paragraphen waren im wesentlichen der Veranschaulichung der Krümmungsverhältnisse in einem gewöhnlichen Flächenpunkte gewidmet. Insbesondere wurden zuletzt Flächen zweiter Ordnung betrachtet, die mit einer vorgelegten Fläche in einem Punkte eine Berührung zweiter Ordnung eingehen und deshalb dort dieselben Krümmungen aufweisen, wie die vorgelegte Fläche selbst.

Eine andere Art der Veranschaulichung besteht darin, daß man die von den Krümmungskreisen der Normalschnitte eines gewöhnlichen Flächenpunktes P gebildete Fläche konstruiert. Ihre Gleichungen sind leicht aufzustellen, denn in der Normalschnittebene, die mit der ersten Hauptkrümmungstangente den Winkel φ bildet, liegt der Krümmungskreis mit dem Radius R, der nach (7), S. 160, durch

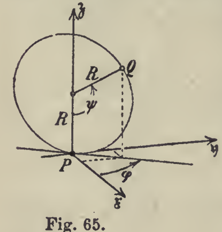


Fig. 65.

$$(1) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$$

bestimmt wird. (Siehe Fig. 65.) Ist ψ der Winkel, den der Radius eines Punktes Q dieses Kreises mit dem Radius des Punktes P bildet, so hat Q in dem begleitenden Achsenkreuze des Flächenpunktes P (vgl. S. 159) die Koordinaten:

$$\mathfrak{x} = R\sin\psi\cos\varphi, \qquad \mathfrak{y} = R\sin\psi\sin\varphi, \qquad \mathfrak{z} = R(1-\cos\psi).$$

Hierin ist nach (1) der Wert

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi}$$

einzusetzen. Also sind, geschrieben mittels der beiden Parameter φ und ψ:

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \dfrac{R_1 R_2 \sin\psi \cos\varphi}{R_1 \sin^2\varphi + R_2 \cos^2\varphi}, \\ \mathfrak{y} = \dfrac{R_1 R_2 \sin\psi \sin\varphi}{R_1 \sin^2\varphi + R_2 \cos^2\varphi}, \\ \mathfrak{z} = \dfrac{R_1 R_2 (1 - \cos\psi)}{R_1 \sin^2\varphi + R_2 \cos^2\varphi} \end{cases}$$

die Gleichungen der gesuchten Fläche. Sie ist in der Form $F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$ durch eine algebraische Gleichung ausdrückbar. Statt diese Gleichung durch Elimination von φ und ψ aus (2) abzuleiten, findet man sie bequemer so: Der Kreis mit dem Radius R liegt in der Ebene

$$\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} = \operatorname{tg}\varphi$$

und auf der Kugel

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = 2R\mathfrak{z}.$$

Aus der ersten Gleichung und aus (1) folgt aber:

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2}\right)\frac{1}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2},$$

so daß die Substitution dieses Wertes in die Gleichung der Kugel gibt:

$$(3)\qquad (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)\left(\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2}\right) = 2\mathfrak{z}(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2).$$

Die Krümmungskreise der Normalschnitte eines gewöhnlichen Flächenpunktes bilden somit eine Fläche vierter Ordnung. Je nachdem der Punkt elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist, hat diese Fläche wesentlich verschiedenes Aussehen. Gänzlich im Endlichen liegt sie nur im Falle eines elliptischen Punktes. Für diesen Fall ist sie unter der Annahme $R_2 = 2R_1$ in den Figuren 66 und 67 (S. 182) in zwei verschiedenen Stellungen dargestellt. Längs eines Teiles der Flächennormale durchschneidet sie sich selbst.

Die Frage, in welcher Ordnung die Fläche (3) aller Normal-Krümmungskreise eines gewöhnlichen Flächenpunktes P eine Berührung mit der vorgelegt gedachten Fläche eingeht, läßt sich nicht mit Hilfe des Satzes 42, S. 175, beantworten. Denn die Berechnung der Ableitungen von $\mathfrak{z}$ nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ aus (3) stößt von vornherein auf ein Hindernis. Einmalige partielle Differentiation nach $\mathfrak{x}$ gibt nämlich

$$\left(\mathfrak{x} + \mathfrak{z}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}}\right)\left(\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2}\right) + (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)\frac{\mathfrak{x}}{R_1} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}}(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2) + 2\mathfrak{z}\mathfrak{x},$$

und hieraus berechnet man:

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}} = \frac{2\mathfrak{x}\mathfrak{z} - \mathfrak{x}\left(\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2}\right) - (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)\frac{\mathfrak{x}}{R_1}}{\mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2}\right) - (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2)}.$$

Für den Punkt P ist nun $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 0$ zu setzen. Dann aber nimmt dieser Wert die unbestimmte Form $0:0$ an.

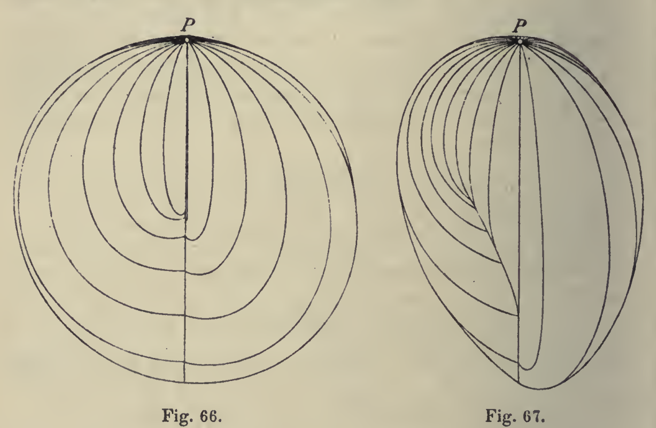


Fig. 66. Fig. 67.

Der Grund für diese Erscheinung liegt darin, daß P ein singulärer Punkt der Fläche (3) ist. Es ist allerdings bewiesen worden, daß die Krümmungskreise aller Normalschnitte von P dieser Fläche (3) angehören, aber nicht umgekehrt, daß jeder Punkt dieser Fläche einem jener Krümmungskreise angehört. In der Tat wird die Gleichung (3) auch durch jeden Punkt der $\mathfrak{z}$-Achse befriedigt, die demnach völlig der Fläche angehört. Außerdem trifft, nebenbei bemerkt, die Ebene $\mathfrak{z} = 0$, die Tangentenebene von P, die Fläche (3) nicht nur in den beiden Haupttangenten von P, die ja durch

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} = 0$$

dargestellt werden, sondern auch in den beiden durch

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = 0$$

bestimmten Minimalgeraden. Der Punkt P, durch den alle diese Geraden gehen, ist singulär, weil nicht alle von P ausgehenden Fort-

schreitungsrichtungen der Fläche (3) in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene liegen, denn die $\mathfrak{z}$-Achse steht auf dieser Ebene senkrecht. (Vgl. S. 21.)

Obgleich P ein singulärer Punkt der Fläche (3) ist, kann man doch feststellen, daß diese Fläche mit der vorgelegt gedachten Fläche, deren Normal-Krümmungskreise von P sie ja enthält, an der Stelle P eine Berührung in gerade zweiter Ordnung eingeht. Denn jene Krümmungskreise berühren die vorgelegt gedachte Fläche in P in gerade zweiter Ordnung. Wird nun ein Punkt $\mathfrak{A}$ auf der Fläche (3) in der Nähe von P, aber nicht etwa auf der $\mathfrak{z}$-Achse, gewählt, so geht durch ihn einer der Krümmungskreise. Folglich gibt es auf der vorgelegt gedachten Fläche in der Nähe von P einen Punkt A so, daß die Strecke $A\mathfrak{A}$ in dritter Ordnung nach Null strebt, sobald die Strecken PA und $P\mathfrak{A}$ es in der ersten Ordnung tun. Betrachtet man also die Fläche (3) nur so weit, als sie wirklich aus Normal-Krümmungskreisen von P besteht, so berührt sie die vorgelegt gedachte Fläche in P in gerade n^{ter} Ordnung.

Die Fläche (3) geht in eine andere aus dem ersten Bande bekannte Fläche über, wenn man auf sie eine sogenannte Transformation durch reziproke Radien mit dem Pol P ausübt. Da diese Transformation bisher nicht benutzt wurde, seien ihre Eigenschaften hier kurz abgeleitet:

Das Verfahren besteht darin, daß man jeden Punkt Q des Raumes durch denjenigen Punkt $\bar{Q}$ ersetzt, der auf dem Strahle PQ liegt und dessen Radiusvektor $P\bar{Q}$ gleich dem reziproken Werte von PQ ist. Hat Q die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z und $\bar{Q}$ die rechtwinkligen Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ in einem Achsenkreuze mit dem Pol P als Anfangspunkt, so folgt hieraus leicht, daß

$$(4)\qquad \bar{x} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \bar{y} = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \bar{z} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

und umgekehrt auch

$$(5)\qquad x = \frac{\bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}, \qquad y = \frac{\bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}, \qquad z = \frac{\bar{z}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}$$

ist. Auch besteht offenbar die Beziehung:

$$(6)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}.$$

Eine Haupteigenschaft der Transformation durch reziproke Radien besteht nun darin, daß sie eine allgemein gewählte Kugel

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(ax + by + cz) + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0$$

wieder in eine Kugel verwandelt, denn Einsetzen der Werte (5) und (6) in die letzte Gleichung gibt ja

$$(a^2 + b^2 + c^2 - r^2)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2) - 2(a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z}) + 1 = 0,$$

also wieder die Gleichung einer Kugel. Man erkennt leicht: eine Kugel, die durch den Pol P geht, verwandelt sich in eine Ebene, und umgekehrt: eine Ebene verwandelt sich in eine Kugel durch P; nur wenn die Ebene selbst durch P geht, geht sie bei der Transformation in sich selbst über. Die Kreise des Raumes sind als Schnitte von Kugeln zu betrachten, und deshalb erkennt man weiterhin leicht: Jeder Kreis geht in einen Kreis über, insbesondere jeder Kreis durch P in eine Gerade seiner Ebene, die so liegt, daß sie die Gerade von P nach dem Kreismittelpunkte senkrecht schneidet. Ferner geht umgekehrt jede Gerade in einen Kreis durch P über; nur die Geraden durch P werden in sich selbst verwandelt.

Da nun die Fläche (3) eine einfach unendliche Schar von Kreisen durch P enthält, die in den Ebenen durch die $\mathfrak{z}$-Achse gelegen sind und deren Mittelpunkte sich auf der $\mathfrak{z}$-Achse befinden, geht sie vermöge der Transformation durch reziproke Radien in eine Fläche über, die eine einfach unendliche Schar von Geraden enthält, die sämtlich die $\mathfrak{z}$-Achse senkrecht treffen. Schon in I S. 258 bis 261 wurde eine geradlinige Fläche von dieser Art, das Zylindroid, betrachtet, und es wird sich zeigen, daß die Fläche, die aus (3) durch die Transformation durch reziproke Radien mit dem Pol P hervorgeht, in der Tat ein Zylindroid ist. Zu diesem Zwecke muß gezeigt werden, daß die Schnittkure der hervorgehenden Fläche mit einem gewissen geraden Kreiszylinder, dessen Achse die $\mathfrak{z}$-Achse ist, bei der Abwicklung des Zylinders auf eine Ebene zwei Perioden einer Sinuskurve liefert, vgl. I S. 259.

Dies ist leicht festzustellen: Die Fläche (3) geht nach (5), worin jetzt x, y, z mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ zu bezeichnen sind, vermöge der Transformation über in die Fläche dritter Ordnung:

$$\frac{\bar{x}^2}{R_1} + \frac{\bar{y}^2}{R_2} = 2\bar{z}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2). \tag{7}$$

Setzt man nun

$$\bar{x} = \mathfrak{r}\cos\varphi, \qquad \bar{y} = \mathfrak{r}\sin\varphi,$$

so gibt (7):

$$\bar{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}\right). \tag{8}$$

Die Fläche (7) läßt sich demnach mittels zweier Parameter $\mathfrak{r}$ und φ, deren geometrische Bedeutung einleuchtet, durch diese drei Gleichungen darstellen, und da die letzte von $\mathfrak{r}$ frei ist, wird bestätigt,

daß die Fläche (7) lauter Geraden ($\varphi =$ konst.) enthält, die die z-Achse senkrecht treffen. Wählt man $\mathfrak{r}$ bestimmt, so geben die drei letzten Gleichungen die Schnittkurve der Fläche (7) mit dem geraden Zylinder, dessen Achse die z-Achse ist und dessen Radius den Wert $\mathfrak{r}$ hat. Wickelt man den Zylinder auf eine xy-Ebene ab, so geht aus dieser Schnittkurve die Kurve

$$x = \mathfrak{r}\varphi, \qquad y = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}\right)$$

hervor, dargestellt mittels eines Parameters φ, der dabei von 0 bis 2π geht. Führt man $\psi = 2\varphi + \frac{1}{2}\pi$ als Parameter ein, so kommt

$$x = \tfrac{1}{2}\mathfrak{r}\,\psi - \tfrac{1}{4}\pi\,\mathfrak{r},$$
$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin\psi + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Wählt man nun den Zylinderradius

(9) $$\mathfrak{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

so ist diese Kurve der Sinuskurve

$$x = \psi, \qquad y = \sin\psi$$

ähnlich. Da φ von 0 bis 2π ging, erstreckt sich ψ von $\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{9}{2}\pi$, also über ein Intervall von der Länge 4π, das doppelt so groß ist wie die Periode 2π der Sinuskurve.

Wenn man also den Zylinderradius $\mathfrak{r}$ gleich dem Werte (9) wählt, schneidet der Zylinder auf der Fläche (7) eine Kurve aus, die bei der Abwicklung des Zylinders auf die Ebene ein Stück einer Sinuslinie gibt, das aus zwei Perioden der Kurve besteht. Somit ist die Fläche (7) nach I S. 259 in der Tat ein Zylindroid. Der Mittelpunkt des Zylindroids (vgl. I S. 261) ist die Mitte zwischen den zu $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ gehörigen Stellen auf der z-Achse, also nach (8) die Stelle mit der z-Koordinate

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Die Tangentenebene des Punktes P der vorgelegten Fläche schneidet das Zylindroid (7) in den beiden durch

$$\frac{\bar{x}^2}{R_1} + \frac{\bar{y}^2}{R_2} = 0$$

dargestellten Geraden, also in den Asymptoten der Indikatrix von P (vgl. S. 162 u. f.), d. h. in den Haupttangenten von P.

Es hat sich ergeben:

Satz 47[1]: Die Fläche der Krümmungskreise aller Normalschnitte eines gewöhnlichen Flächenpunktes P geht vermöge Transformation durch reziproke Radien mit dem Pol P in ein Zylindroid über, dessen Geraden sämtlich die Flächennormale von P senkrecht schneiden. Zu diesen Geraden gehören auch die Haupttangenten von P.

Im reellen Falle schneidet das Zylindroid die Tangentenebene nicht, falls P ein elliptischer Punkt ist (siehe Fig. 68), wohl aber,

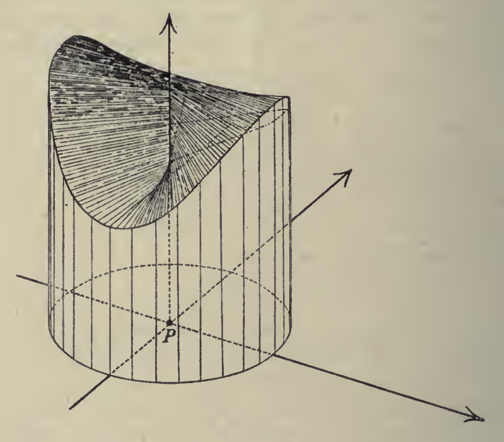


Fig. 68.

und zwar in den Haupttangenten, falls P ein hyperbolischer Punkt ist. Das Zylindroid eines parabolischen Punktes dagegen berührt die Tangentenebene von P.

Wir betrachteten oben die Fläche (3) der Krümmungskreise aller Normalschnitte eines gewöhnlichen Punktes P einer vorgelegten Fläche. Sie steht in enger Beziehung zu einer anderen Fläche: Wir betrachten beliebige durch P gehende Flächenkurven. Jede von ihnen hat in P einen Krümmungskreis und also einen zugehörigen Krümmungsmittelpunkt M. Der Ort dieser Krümmungsmittelpunkte aller durch P gehenden Flächenkurven soll ermittelt werden.

Da wir das begleitende Achsenkreuz benutzen, sind die Para-

[1] Siehe Salmon-Fiedler, „Analytische Geometrie des Raumes, Zweiter Teil", 3. Aufl., Leipzig 1880, S. 560.

meter u und v jetzt x und y selbst. Nach (2), (3) und (5) auf S. 160 haben die Fundamentalgrößen an der Stelle P die Werte

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad L = \frac{1}{R_1}, \quad M = 0, \quad N = \frac{1}{R_2}.$$

Wir betrachten eine Flächenkurve, die in P diejenige Flächentangente berührt, die mit der ersten Hauptkrümmungsrichtung von P den Winkel φ bildet, d. h. wir wählen die Fortschreitungsrichtung, für die $dy : dx = \sin\varphi : \cos\varphi$ ist. Ferner möge die Hauptnormale der Flächenkurve in P mit der Flächennormale, also mit der z-Achse, den Winkel ω bilden. Ist schließlich r der zu P gehörige Krümmungsradius der Flächenkurve, so besteht für ihn die Formel (4), S. 117, worin jetzt $\mathsf{S}\, Xx_{uu}$, $\mathsf{S}\, Xx_{uv}$, $\mathsf{S}\, Xx_{vv}$ oder also L, M, N (vgl. (8), S. 122) und E, F, G die oben angegebenen Werte haben und dx und dy durch die zu ihnen proportionalen Größen $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ zu ersetzen sind, so daß kommt:

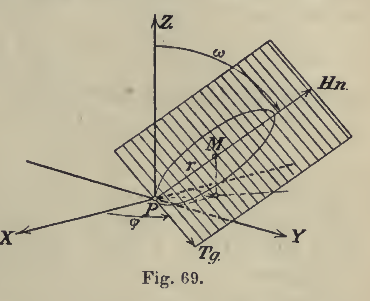


Fig. 69.

$$\frac{\cos\omega}{r} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}. \tag{10}$$

Der zugehörige Krümmungsmittelpunkt M liegt auf der Hauptnormale und zwar im Abstande r von P, siehe Fig. 69. Die Hauptnormale ist zur gewählten Fortschreitungsrichtung (φ) von P aus, also zur Tangente senkrecht. Daher bildet ihre senkrechte Projektion auf die xy-Ebene mit der x-Achse den Winkel $\varphi + \frac{1}{2}\pi$. Mithin hat M die Koordinaten:

$$x = r\sin\omega\cos(\varphi + \tfrac{1}{2}\pi), \quad y = r\sin\omega\sin(\varphi + \tfrac{1}{2}\pi), \quad z = r\cos\omega$$

oder

$$x = -r\sin\omega\sin\varphi, \quad y = r\sin\omega\cos\varphi, \quad z = r\cos\omega. \tag{11}$$

Versteht man hierin unter r die durch (10) definierte Funktion von ω und φ, so stellt (11) den Ort aller zu P gehörigen Krümmungsmittelpunkte M aller durch P gehenden Flächenkurven dar, ausgedrückt mittels der beiden Parameter ω und φ. Dieser Ort ist nach S. 6 eine Fläche.

Durch Elimination der Parameter ω und φ erhält man die Gleichung der Fläche in x, y, z allein. Nach (11) ist nämlich

$$\cos\varphi = \frac{y}{r\sin\omega}, \qquad \sin\varphi = -\frac{x}{r\sin\omega}, \qquad \cos\omega = \frac{z}{r}.$$

Einsetzen dieser Werte in (10) gibt:

$$\frac{y^2}{R_1} + \frac{x^2}{R_2} = z\sin^2\omega.$$

Andererseits ist nach (11)

$$\sin^2\omega = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Demnach ist die gesuchte Gleichung:

$$(12) \qquad (x^2+y^2+z^2)\left(\frac{y^2}{R_1} + \frac{x^2}{R_2}\right) = z(x^2+y^2).$$

Diese Fläche aber geht aus der Fläche (3) durch Vertauschen von x mit y und durch Verkleinern der Fläche auf den halben Maßstab von P aus hervor. Folglich besteht der

Satz 48: Die zu einem gewöhnlichen Flächenpunkte P gehörigen Krümmungsmittelpunkte aller durch P gehenden Flächenkurven liegen sämtlich auf derjenigen Fläche vierter Ordnung, die aus der von allen Normalkrümmungskreisen von P gebildeten Fläche durch Drehung um die Flächennormale um einen rechten Winkel und durch Verkleinern von P aus auf den halben Maßstab entsteht.

Übt man auf die Fläche (12) die Transformation durch reziproke Radien mit dem Pol P aus, so geht folglich eine Fläche hervor, die aus dem Zylindroid (7) entsteht, wenn man dieses um die z-Achse um einen rechten Winkel dreht und von P auf das Doppelte ähnlich vergrößert. Dadurch ergibt sich natürlich wieder ein Zylindroid. Seine Gleichung lautet, wie man auch durch Einsetzen der Werte (5) in (12) mit Rücksicht auf (6) findet, so:

$$(13) \qquad \frac{\bar{y}^2}{R_1} + \frac{\bar{x}^2}{R_2} = \bar{z}(\bar{x}^2+\bar{y}^2).$$

Die Ausübung der Transformation durch reziproke Radien bedeutet, daß wir auf den von P ausgehenden Hauptnormalen aller Flächenkurven durch P nicht ihre Krümmungsradien r bis zu den Krümmungsmittelpunkten M, sondern die reziproken Werte, also die Krümmungen $1:r$ selbst, auftragen. Vgl. S. 118, insbes. Satz 1. Demnach beschließen wir diesen Paragraphen mit dem

Satz 49: Wenn man durch einen gewöhnlichen Flächenpunkt P beliebige Flächenkurven zieht und auf den zu P gehörigen Hauptnormalen der Kurven ihre zugehörigen Krümmungen aufträgt, erhält man als Ort der Endpunkte ein Zylindroid, dessen Geraden sämtlich die Flächennormale von P senkrecht schneiden.

§ 9. Konjugierte Richtungen.

Während wir bisher die einem Flächenpunkte benachbarten Flächenpunkte ins Auge faßten, wenden wir uns jetzt zur Betrachtung der Tangentenebenen, die der Tangentenebene eines Flächenpunktes benachbart sind. Auch auf diesem Wege gelangen wir zu Ergebnissen über die Natur der Umgebung einer Stelle der Fläche.

Es sei P ein Flächenpunkt und $\mathfrak{P}$ seine Tangentenebene. Eine benachbarte Tangentenebene $\mathfrak{Q}$ soll die Fläche in einem Punkte Q berühren, der dem Punkte P benachbart ist. Fragen wir uns nun, wie diese beiden Tangentenebenen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gegeneinander liegen, so haben wir erstens ihre Schnittgerade und zweitens ihren Winkel zu bestimmen, und zwar soll dies untersucht werden für den Fall, daß Q unendlich nahe an P auf der Fläche heranrückt.

Was die Schnittgerade anbetrifft, so kann man bei flüchtiger Überlegung leicht zu einer ganz falschen Auffassung kommen: Da nämlich die Tangentenebene von P die zu P unendlich benachbarten Flächenpunkte, mithin auch den Punkt Q enthält, umgekehrt also auch die Tangentenebene von Q den Punkt P, schließt man, daß PQ die Schnittgerade sei. Aber dies ist falsch. Ein einfaches Beispiel zeigt es deutlich: Auf einem Rotationszylinder wählen wir zwei Punkte P und Q auf einem Kreise. Ihre Tangentenebenen sind parallel zur Achse des Zylinders und schneiden einander daher in einer Parallelen zur Achse, und dies gilt, wie nahe auch P und Q aneinander rücken mögen, während doch die Gerade PQ die Achse senkrecht kreuzt.

Der Fehler in der vorhergehenden Überlegung liegt darin, daß der Punkt Q tatsächlich nicht in der Ebene $\mathfrak{P}$ liegt, sondern von ihr einen Abstand hat, der von höherer Ordnung unendlich klein ist, wenn die Strecke PQ als unendlich klein von erster Ordnung aufgefaßt wird. Ebenso hat P von der Ebene $\mathfrak{Q}$ einen unendlich kleinen Abstand von höherer Ordnung, während die Tangentenebenen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ einen von erster Ordnung unendlich kleinen Winkel miteinander bilden. Vergrößern wir die Figur so weit, daß die

unendlich kleine Strecke PQ endlich wird, so bleibt der Winkel der Ebenen immer noch unendlich klein von erster Ordnung, während P von $\mathfrak{Q}$ und Q von $\mathfrak{P}$ ebenfalls je einen unendlich kleinen Abstand von erster Ordnung hat. Man erkennt aber: Da der Winkel unendlich klein ist, sind diese beiden Abstände unendlich klein, wo auch P in $\mathfrak{P}$ und Q in $\mathfrak{Q}$ liegen mag, und so erhellt aus der vergrößerten Fig. 70, daß die Gerade PQ durchaus nicht die Richtung der Schnittgeraden beider Ebenen zu haben braucht.

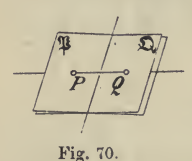


Fig. 70.

Nun soll die Schnittgerade zweier unendlich benachbarter Tangentenebenen analytisch bestimmt werden:

Ein Punkt P oder (u, v) oder (x, y, z) hat, wenn X, Y, Z die Richtungskosinus seiner Normale sind, die Tangentenebene in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$:

$$X(\mathfrak{x} - x) + Y(\mathfrak{y} - y) + Z(\mathfrak{z} - z) = 0. \tag{1}$$

Ziehen wir irgend eine Kurve auf der Fläche, d. h. nehmen wir u und v als Funktionen eines Parameters t an, nach S. 12, so können wir längs der Kurve in jedem Punkte (u, v) die Tangentenebene konstruieren, und in den Koeffizienten ihrer Gleichung (1) tritt dann nur der eine Parameter t auf. Nach Satz 12, I S. 380, umhüllen alle diese Ebenen eine Tangentenfläche. Auf ihr ist die durch den Punkt $(u. v)$ gehende Erzeugende die Schnittgerade der Tangentenebene dieses Punktes mit der Tangentenebene eines unendlich benachbarten Kurvenpunktes $(u + du,\ v + dv)$. Sie wird nach Satz 11, I S. 380, durch die Gleichung (1) und die aus (1) durch Differentiation nach t hervorgehende Gleichung dargestellt. Dadurch ergibt sich aber die Gleichung:

$$\mathsf{S}\left(X_u + X_v \frac{dv}{du}\right)(\mathfrak{x} - x) - \mathsf{S}X\left(x_u + x_v \frac{dv}{du}\right) = 0$$

oder nach XI (I) einfacher

$$\mathsf{S}\left(X_u + X_v \frac{dv}{du}\right)(\mathfrak{x} - x) = 0. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) stellen also zusammen die Schnittgerade der Tangentenebene des Punktes (u, v) mit der des Punktes $(u + du,\ v + dv)$ dar. Diese Gerade geht durch den Punkt (u, v) oder (x, y, z) selbst (was nur scheinbar mit Fig. 70 im Widerspruche steht, da du und dv nach Null streben); sie ist demnach eine Tangente des Punktes (u, v). Die zu ihr gehörige Fortschreitungsrichtung

sei zur Unterscheidung von der Richtung $(dv:du)$ mit $(\delta v:\delta u)$ bezeichnet. Die Werte

$$\mathfrak{x} = x + x_u\,\delta u + x_v\,\delta v \text{ usw.}$$

müssen nun beide Gleichungen (1) und (2) erfüllen. Die erste wird wegen XI(I) identisch befriedigt, wie vorauszusehen war, während die zweite liefert:

$$\mathbf{S}\left(X_u + X_v\frac{dv}{du}\right)(x_u\,\delta u + x_v\,\delta v) = 0$$

oder, wenn man ausmultipliziert, dabei (12), S. 122, benutzt, und $dv:du$ und $\delta v:\delta u$ mit k_1 und k_2 bezeichnet:

(3) $$L + M(k_1 + k_2) + Nk_1 k_2 = 0\,.$$

Diese Gleichung ist nur dann eine Identität, wenn L, M und N den Wert Null haben, also für einen Flachpunkt (u, v), vgl. S. 146. Nur wenn P ein Flachpunkt ist, dürfen wir sagen, daß sich die Tangentenebene nicht ändert, sobald der Flächenpunkt von P nach einer unendlich benachbarten Stelle wandert. Sonst gilt der

Satz 50: Die Tangentenebene eines Flächenpunktes (u, v), der kein Flachpunkt ist, schneidet die Tangentenebene eines in einer Fortschreitungsrichtung (k_1) unendlich benachbart gelegenen Flächenpunktes in der Fortschreitungsrichtung (k_2), die durch die Gleichung

$$L + M(k_1 + k_2) + Nk_1 k_2 = 0$$

bestimmt wird.

Die Formel (3) ändert sich nicht, wenn man k_1 mit k_2 vertauscht. Die Beziehung zwischen den beiden Richtungen (k_1) und (k_2) ist demnach vollkommen umkehrbar: Geht man vom Flächenpunkte (u, v) in der Richtung (k_2) unendlich wenig weiter, so schneidet die Tangentenebene des Punktes (u, v) die des so erreichten unendlich benachbarten Punktes in der Tangente mit der Richtung (k_1).

Die Formel (3) gibt:

$$k_2 = -\frac{L + Mk_1}{M + Nk_1},$$

liefert also im allgemeinen für verschiedene Werte von k_1 auch verschiedene Werte von k_2. Dies ist nur dann nicht der Fall, wenn der rechts stehende Bruch k_1 nur scheinbar enthält, d. h. wenn $LN - M^2$ gleich Null, der Punkt (u, v) also ein parabolischer Punkt ist (vgl. S. 164). Die Flachpunkte, von denen vorhin die Rede war, gehören mit zu den parabolischen Punkten. Demnach können wir sagen:

Satz 51: Die Tangenten eines nicht-parabolischen Flächenpunktes P sind einander paarweise derart zugeordnet, daß, wenn ein Punkt auf der Fläche von P aus auf einer der beiden Tangenten unendlich wenig weiterwandert, sich seine Tangentenebene um die andere Tangente dreht.

Ist der Flächenpunkt P oder (u, v) parabolisch, so ergibt sich aus (3) $k_2 = -L:M$ oder $-M:N$. Diese Richtung (k_2) ist, wie man leicht aus den Formeln (3) und (5) auf S. 160 sieht, diejenige Hauptkrümmungsrichtung von P, zu der die Krümmung Null gehört. In einem Flachpunkte allerdings ergibt sich aus (3), weil dann L, M und N alle drei gleich Null sind, gar kein bestimmter Wert von k_2.

Man nennt nun in jedem Falle zwei Werte k_1 und k_2, die der Bedingung (3) genügen, zueinander konjugiert.[1] Dementsprechend redet man von konjugierten Fortschreitungsrichtungen oder Tangenten eines Flächenpunktes. Ist der Punkt nicht parabolisch, so zerfällt die Gesamtheit seiner Tangenten in lauter verschiedene konjugierte Paare. Ist der Punkt parabolisch, aber kein Flachpunkt, so ist zu allen Tangenten eine und dieselbe, nämlich diejenige konjugiert, die in der Hauptkrümmungsrichtung mit der Hauptkrümmung Null liegt. Ist der Punkt schließlich ein Flachpunkt, so darf man jedes Paar von Tangenten als konjugiert bezeichnen. Man darf nach dem Vorhergehenden stets sagen: Schreitet ein Flächenpunkt von einer Stelle P auf einer Tangente von P unendlich wenig, etwa bis Q, fort, so haben die Tangentenebenen von P und Q die konjugierte Tangente von P gemein.

Der Grund dafür, daß man von konjugierten Tangenten spricht, liegt in dem

Satz 52: Konjugierte Tangenten gewöhnlicher Flächenpunkte sind identisch mit konjugierten Durchmessern der Indikatrix-Kegelschnitte der Punkte.

In der Tat, benutzen wir das begleitende Achsenkreuz des Flächenpunktes P, vgl. S. 159, also die zugehörigen rechtwinkligen Koordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ an Stelle von u und v, so daß

$$(4) \qquad k_1 = d\mathfrak{y} : d\mathfrak{x}, \qquad k_2 = \delta\mathfrak{y} : \delta\mathfrak{x}$$

[1] Nach Dupin, siehe die 3. Anm. auf S. 143, wegen des weiter unten folgenden Satzes 52. Die später von Hachette in seinen „Eléments de géométrie à trois dimensions“, Paris 1817, eingeführte und weniger ausdrucksvolle Bezeichnung reziprok hat sich nicht eingebürgert.

zu setzen ist, so tritt an die Stelle von (3) die Formel:

$$k_1 k_2 = -\frac{R_2}{R_1}, \tag{5}$$

nach (3) und (5) auf S. 160. Andererseits bilden konjugierte Durchmesser der Indikatrix-Kegelschnitte

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} = \pm 1$$

nach einem Satze aus der Lehre von den Kegelschnitten mit der $\mathfrak{x}$-Achse Winkel α und β, für die

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = -\frac{R_2}{R_1} \tag{6}$$

ist. Nach (4) aber sind die trigonometrischen Tangenten der Winkel, die die $\mathfrak{x}$-Achse mit den Richtungen (k_1) und (k_2) bestimmt, gerade gleich k_1 und k_2. Die letzte Gleichung stimmt nun in der Tat mit (5) überein, wenn man $k_1 = \operatorname{tg}\alpha$ und $k_2 = \operatorname{tg}\beta$ setzt.

Dasselbe kann man auch durch eine geometrische Infinitesimalbetrachtung auf Grund der Sätze 36 und 37, S. 168 und 169, erkennen: In Fig. 71, die sich insbesondere auf einen elliptischen Flächenpunkt P bezieht, seien die Punkte S und M auf der Flächennormale von P unendlich nahe bei P und zwar so gewählt, daß P die Mitte von SM ist. Der Kegel der von S aus an die Fläche gelegten Tangenten berührt die Fläche in einer Kurve c, die mit der Schnittkurve der Fläche mit derjenigen Ebene übereinstimmt, die durch M zur Tangentenebene von P parallel gelegt werden kann. Jeder Punkt Q von c ist als ein zu P unendlich benachbarter Flächenpunkt zu betrachten. Ist R die Mitte von SQ, so leuchtet ein, daß die Tangentenebenen der beiden Flächenpunkte P und Q einander in der Geraden g durch R schneiden, die zur Tangente von c in Q parallel ist. Die Kurve c ist hier eine Ellipse, ähnlich und ähnlich gelegen zur Indikatrix-Ellipse. Der zu MQ konjugierte Halbmesser MT der Ellipse ist ebenfalls zur Tangente von Q parallel. Indem PM nach Satz 36, S. 168, in höherer Ordnung als die Entfernung PQ nach Null strebt, ist die Fortschreitungsrichtung auf der Fläche von P nach Q durch die von M nach Q ersetzbar. Hiernach liegt die Folgerung, die zu Satz 52 führt, auf

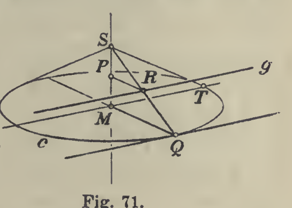


Fig. 71.

der Hand. Die Betrachtung ist für einen hyperbolischen Punkt P geradeso anzustellen.

Wenn alle Punkte P einer Fläche parabolisch sind, ist die Fläche nach Satz 28, S. 157, abwickelbar. Da sich nun zwei unendlich benachbarte Tangentenebenen einer abwickelbaren Fläche stets in einer Erzeugenden schneiden, ergibt sich der

Satz 53: Auf einer abwickelbaren Fläche ist zu allen Fortschreitungsrichtungen von einem Flächenpunkte aus eine und dieselbe Richtung konjugiert, nämlich die der Erzeugenden, die durch den Punkt geht.

Die Richtung dieser Erzeugenden ist die der Normalkrümmung Null, so daß das Ergebnis mit dem übereinstimmt, was oben über parabolische Punkte gesagt wurde.

Die Bedingung (3) für konjugierte Richtungen (k_1) und (k_2) trat gelegentlich schon früher auf, nämlich als zweite Gleichung (19), S. 133, bei der Bestimmung der Hauptkrümmungsrichtungen eines Flächenpunktes. Die erste Gleichung (19) konnten wir schon damals geometrisch deuten; sie besagte, daß die beiden Hauptkrümmungsrichtungen zueinander senkrecht sind. Die zweite besagt nun, daß sie zueinander konjugiert sind. Daher gilt der

Satz 54: Die Hauptkrümmungsrichtungen eines gewöhnlichen Flächenpunktes kann man als die gleichzeitig zueinander senkrechten und konjugierten Fortschreitungsrichtungen des Punktes definieren.

Nabelpunkte schließen wir durch diese Formulierung des Satzes aus. In der Tat ist ja für einen Nabelpunkt, der nicht zugleich ein Flachpunkt ist, $L:M:N$ gleich $E:F:G$, nach S. 126, d. h. dort sind zueinander senkrechte Tangenten stets auch zueinander konjugiert.

Nach (3) fallen konjugierte Richtungen (k_1) und (k_2) nur dann zusammen in eine Richtung (k), wenn

$$L + 2Mk + Nk^2 = 0$$

ist. Dies besagt nach (7), S. 146:

Satz 55: Die Haupttangenten eines Flächenpunktes kann man als diejenigen Tangenten definieren, von denen jede zu sich selbst konjugiert ist.

Dies folgt auch daraus, daß die Asymptoten eines Kegelschnittes zu sich selbst konjugierte Durchmesser sind, mit Rücksicht auf

Satz 52 sowie darauf, daß die Haupttangenten die Asymptoten der Indikatrizen sind, nach S. 164. Man kann auch so sagen:

Satz 56: Bewegt sich ein gewöhnlicher Punkt auf einer Fläche unendlich wenig, so dreht sich dabei seine Tangentenebene nur dann um die bei der Bewegung eingeschlagene Tangente, wenn diese eine Haupttangente ist.

Da konjugierte Durchmesser eines Kegelschnittes bekanntlich durch die Asymptoten harmonisch getrennt werden, folgt aus Satz 52 sofort der

Satz 57: Konjugierte Tangenten eines gewöhnlichen Flächenpunktes sind solche Tangenten, die von den Haupttangenten des Punktes harmonisch getrennt werden.

Es ist leicht, dies unabhängig von der Theorie der Kegelschnitte zu zeigen: Sind (λ_1) und (λ_2) die Richtungen der Haupttangenten, so ist nach (7), S. 146:

$$L + 2M\lambda + N\lambda^2 = 0$$

für $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$, woraus folgt:

$$L:M:N = \lambda_1 \lambda_2 : -\tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) : 1 .$$

Setzen wir daher die proportionalen Werte in die Bedingung (3) ein, so kommt:

$$\lambda_1 \lambda_2 - \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(k_1 + k_2) + k_1 k_2 = 0,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{k_1 - \lambda_1}{k_1 - \lambda_2} : \frac{k_2 - \lambda_1}{k_2 - \lambda_2} = -1 ,$$

was eben nach Satz 52, S. 105, und nach I S. 450 besagt, daß konjugierte Richtungen von den Richtungen der Haupttangenten harmonisch getrennt werden. —

Liegt eine nicht-abwickelbare Fläche vor und wird auf ihr eine beliebige Kurve c gezogen, so werden die Tangentenebenen der auf c gelegenen Flächenpunkte, da sie eine einfach unendliche Ebenenschar bilden, von einer abwickelbaren Fläche eingehüllt, nämlich von derjenigen, die die gegebene Fläche längs der Kurve c berührt.[1] Vgl. S. 190. Da beide Flächen längs c die Tangentenebenen gemein haben, folgt sofort der

[1] Dupin, dem wir die erste Theorie der konjugierten Tangenten verdanken, ging dabei in seinen „Développements de géométrie", Paris 1813, von diesen eine gegebene Fläche umhüllenden abwickelbaren Flächen aus.

Satz 58: Konstruiert man diejenige abwickelbare Fläche, die eine nicht-abwickelbare Fläche längs einer Kurve c berührt, so ist auf der zweiten Fläche in jedem Punkte von c die Tangente von c konjugiert zu der durch den Punkt gehenden Erzeugenden der abwickelbaren Fläche.

Insbesondere umhüllen alle diejenigen Tangentenebenen einer nicht-abwickelbaren Fläche, die durch einen gemeinsamen Punkt L des Raumes gehen, einen Tangentenkegel, der die Fläche längs einer Kurve c berührt. Wird L als Lichtquelle aufgefaßt, so sind die Erzeugenden des Kegels die Lichtstrahlen, die die Fläche berühren, so daß die Kurve c die Grenze des Eigenschattens auf der Fläche bedeutet. Nach dem letzten Satze sind die Tangenten der Grenze des Eigenschattens konjugiert zu den jeweils berührenden Lichtstrahlen. Auf einer abwickelbaren Fläche besteht die Grenze des Eigenschattens stets aus Erzeugenden der Fläche. (Es können aber noch Schlagschatten auf der Fläche vorkommen, indem einzelne Teile der Fläche andere in Schatten setzen.)

§ 10. Unendlich benachbarte Normalen.

Um die geometrische Natur einer Stelle auf einer Fläche noch weiter zu erforschen, betrachten wir jetzt die Lagerung der unendlich vielen Normalen der Fläche, die zu einer Normale unendlich benachbart sind.[1] Dabei brauchen wir die Änderungen der Richtungskosinus X, Y, Z der Normale eines Punktes (u, v) bei unendlich kleinen Änderungen der Parameter u, v.

Nach XI (H) ist:

$$\mathbf{S}\, X X_u = 0.$$

Nach (12), S. 122, ist außerdem:

$$\mathbf{S}\, x_u X_u = -L,$$

$$\mathbf{S}\, x_v X_u = -M.$$

Hier liegen drei in X_u, Y_u, Z_u lineare Gleichungen vor, deren Determinante nach XI (L) den Wert D hat. Mithin gibt ihre Auflösung mit Rücksicht auf XI (K):[2]

[1] Die Beziehungen zwischen den Winkeln unendlich benachbarter Flächennormalen wurden von Bertrand zuerst genauer untersucht: „Mémoire sur la theorie des surfaces“, Journ. de Mathém. pures et appl., 1. Serie, 9. Bd. (1844), auch Comptes Rendus 17. Bd. (1843).

[2] Diese Formeln finden sich bei Weingarten, „Über eine Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen“, Journ. f. d. reine u. angew. Math.

$$(1)\quad \begin{cases} X_u = \frac{1}{D^2}[(FM - GL)x_u + (FL - EM)x_v], \\ Y_u = \frac{1}{D^2}[(FM - GL)y_u + (FL - EM)y_v], \\ Z_u = \frac{1}{D^2}[(FM - GL)z_u + (FL - EM)z_v]. \end{cases}$$

Ebenso lassen sich X_v, Y_v, Z_v berechnen. Bequemer finden wir sie aber aus (1), wenn wir u mit v, E mit G und L mit N vertauschen:

$$(2)\quad \begin{cases} X_v = \frac{1}{D^2}[(FN - GM)x_u + (FM - EN)x_v], \\ Y_v = \frac{1}{D^2}[(FN - GM)y_u + (FM - EN)y_v], \\ Z_v = \frac{1}{D^2}[(FN - GM)z_u + (FM - EN)z_v]. \end{cases}$$

Wir leiten hieraus noch einige nachher nützliche Formeln ab. Aus (1) und XI (A) folgt:

$$\mathsf{S}\, X_u^2 = \frac{1}{D^4}[(FM - GL)^2 E + 2(FM - GL)(FL - EM)F + (FL - EM)^2 G].$$

Multiplizieren wir alles aus, so heben sich mehrere Glieder, so daß sich $EG - F^2$ oder D^2 absondern läßt. Es bleibt:

$$(3)\qquad \mathsf{S}\, X_u^2 = \frac{GL^2 - 2FLM + EM^2}{D^2}.$$

Entsprechend ergibt sich aus (2):

$$(4)\qquad \mathsf{S}\, X_v^2 = \frac{EN^2 - 2FMN + GM^2}{D^2},$$

und eine ähnliche Rechnung liefert nach (1) und (2):

$$(5)\qquad \mathsf{S}\, X_u X_v = \frac{GLM + EMN - FM^2 - FLN}{D^2}$$

Mit Rücksicht auf die Werte von H und K in Satz 14, S. 135, können wir kürzer schreiben:

$$(6)\quad \mathsf{S}\, X_u^2 = HL - KE, \quad \mathsf{S}\, X_u X_v = HM - KF, \quad \mathsf{S}\, X_v^2 = HN - KG.$$

Die Normale des Flächenpunktes P oder (x, y, z) oder (u, v) hat nun in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Gleichungen:

$$(7)\qquad \mathfrak{x} = x + Xt, \quad \mathfrak{y} = y + Yt, \quad \mathfrak{z} = z + Zt,$$

ausgedrückt mittels eines Parameters t, der die Strecke vom Flächenpunkte P bis zum Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ der Normale bedeutet, gemessen

59. Bd. (1861), allerdings aufgelöst nach x_u, x_v usw. statt nach X_u, X_v usw. Unter der Annahme besonderer Parameterkurven treten sie schon früher auf.

entsprechend der Orientierung der Normale. Ebenso bedeutet der Parameter τ in den Gleichungen

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = x + dx + (X + dX)\tau, \\ \mathfrak{y} = y + dy + (Y + dY)\tau, \\ \mathfrak{z} = z + dz + (Z + dZ)\tau \end{cases}$$

der Normale eines dem Punkte P oder (x, y, z) unendlich benachbarten Punktes Q oder $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ der Fläche die Strecke von diesem Punkte bis zu einem beliebigen Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ seiner Normale. Die zu Q gehörigen Werte der Flächenparameter seien $u + du,\ v + dv$.



Fig. 72.

Im allgemeinen werden die beiden Normalen (7) und (8) — wie überhaupt zwei unendlich benachbarte Geraden, vgl. I S. 367, — einander nicht schneiden, so daß es ein Problem ist, die Gerade AB zu bestimmen, die beide senkrecht schneidet. (Siehe Fig. 72.)

Es fragt sich, welchen Parameterwert t bzw. τ der durch (7) bzw. (8) dargestellte Punkt hat, wenn er einer der Schnittpunkte A bzw. B dieses gemeinsamen Lotes ist. Zunächst liegt er in der Ebene, die in dem Punkte A auf der ersten Normale senkrecht steht und deren Gleichung in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ daher so lautet:

$$X(\mathfrak{x} - x) + Y(\mathfrak{y} - y) + Z(\mathfrak{z} - z) = t\,.$$

Setzen wir hierin die Werte (8) ein, so ergibt sich für den Punkt B auf der zweiten Normale die Bedingung

$$\mathsf{S}\, X dx + \mathsf{S}\, X(X + dX)\tau = t\,.$$

Wegen XI (H) und XI (I) folgt hieraus $\tau = t$.

Die beiden Endpunkte A und B des gesuchten gemeinsamen Lotes gehören also zu einem und demselben, aber noch unbekannten Werte $t = \tau$. Dieser Wert muß so beschaffen sein, daß die Verbindende der beiden Punkte A und B oder (7) und (8) auch auf der zweiten Normale senkrecht steht. Da diese Normale die Richtungskosinus $X + dX,\ Y + dY,\ Z + dZ$ hat, dagegen die Richtungskosinus der Geraden AB zu den Differenzen entsprechender Koordinaten (7) und (8) für $t = \tau$, also zu $dx + t\,dX,\ dy + t\,dY$ und $dz + t\,dZ$ proportional sind, ist zu fordern:

$$\mathsf{S}\,(X + dX)(dx + t\,dX) = 0$$

Wegen XI (H) und (I) wird hieraus:

$$\mathsf{S}\, dX dx + t\, \mathsf{S}\, dX^2 = 0,$$

so daß sich ergibt:

(9) $$t = -\frac{\mathsf{S}\, dX dx}{\mathsf{S}\, dX^2}.$$

Ist $d\vartheta$ der unendlich kleine Winkel, den beide Normalen, die des Punktes (u, v) und des Punktes $(u + du, v + dv)$, miteinander bilden, so kommt nach (10), I S. 193:

(10) $$d\vartheta^2 = \mathsf{S}\, dX^2,$$

denn dX, dY, dZ sind die Differenzen zwischen den Richtungskosinus der zweiten und ersten Normale.

Bezeichnet $d\mathfrak{n}$ die Länge des gemeinsamen Lotes AB, so kommt, da (7) die Koordinaten von A und (8) die von B für $\tau = t$ gibt:

$$d\mathfrak{n}^2 = \mathsf{S}\,(dx + t\, dX)^2 = \mathsf{S}\, dx^2 + 2t\, \mathsf{S}\, dx\, dX + t^2\, \mathsf{S}\, dX^2$$

oder, wenn der Wert (9) von t eingesetzt wird:

(11) $$d\mathfrak{n}^2 = \frac{\mathsf{S}\, dx^2 . \mathsf{S}\, dX^2 - (\mathsf{S}\, dx\, dX)^2}{\mathsf{S}\, dX^2}$$

Die in (9), (10) und (11) auftretenden Summen sind leicht durch die Fundamentalgrößen auszudrücken. Zunächst ist ja

(12) $$\mathsf{S}\, dx^2 = ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2.$$

Ferner ist nach (13), S. 124:

(13) $$\mathsf{S}\, dx\, dX = -(L du^2 + 2M du\, dv + N dv^2).$$

Schließlich ist noch wegen

$$\mathsf{S}\, dX^2 = \mathsf{S}\,(X_u du + X_v dv)^2 = \mathsf{S}\, X_u^2 du^2 + 2\, \mathsf{S}\, X_u X_v du\, dv + \mathsf{S}\, X_v^2 dv^2$$

nach (6):

(14) $$\mathsf{S}\, dX^2 = H(L du^2 + 2M du\, dv + N dv^2) - K(E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2).$$

Wir sind demnach in der Lage t, $d\vartheta^2$ und $d\mathfrak{n}^2$ auf Grund der Formeln (9), (10) und (11) mittels der Fundamentalgrößen und der Differentiale du und dv darzustellen. Damit die Formeln nicht zu umfangreich werden, empfiehlt es sich dabei, ähnlich wie durch (12) eine ganze quadratische Funktion von du und dv, in der E, $2F$, G die Koeffizienten sind, als das Quadrat des Bogenelements in der einfachen Form ds^2 bezeichnet wird, auch die entsprechende Funktion, in der L, M und N an die Stelle von E, F, G treten, etwa mit $d\sigma^2$ zu bezeichnen. Wir setzen also zur Abkürzung:

(15) $$d\sigma^2 = L du^2 + 2M du\, dv + N dv^2$$

Alsdann ist nach (13) und (14):

(16) $$\mathsf{S}\,dx\,dX = -\,d\sigma^2, \quad \mathsf{S}\,dX^2 = H\,d\sigma^2 - K\,ds^2.$$

Nunmehr haben wir nach (9), (10) und (11):

(17) $$\begin{cases} t = \dfrac{d\sigma^2}{H\,d\sigma^2 - K\,ds^2}, \quad d\vartheta^2 = H\,d\sigma^2 - K\,ds^2, \\ d\mathfrak{n}^2 = ds^2 - \dfrac{d\sigma^4}{H\,d\sigma^2 - K\,ds^2}. \end{cases}$$

Man erkennt hieraus, daß

(18) $$d\mathfrak{n}^2 + t^2\,d\vartheta^2 = ds^2$$

wird.

Diese Formel kann man übrigens leicht aus Fig. 73 ablesen. Darin bedeuten P und Q benachbarte Flächenpunkte, PA und QB ihre Normalen, AB ihr gemeinsames Lot. Da AB zu PA senkrecht, also zur Tangentenebene von P parallel ist, wird die Strecke PC, parallel und gleich AB, auf der Tangentenebene von P liegen, so daß, falls Q unendlich nahe bei P liegt, also PQ das Bogenelement ds bedeutet, auch C ein zu P unendlich benachbarter Flächenpunkt ist. Nun ist AB sowohl zu $CB \parallel PA$ als auch zu QB senkrecht, d. h. PC steht auf der Ebene CBQ senkrecht; folglich ist $\sphericalangle PCQ$ ein Rechter. Es ist weiterhin: $PC = AB = d\mathfrak{n}$, $\sphericalangle CBQ = d\vartheta$, $PA = CB = t$, also $CQ = t\,d\vartheta$ zu setzen. Aus dem rechtwinkligen Dreieck PCQ geht demnach sofort die Formel (18) hervor.



Fig. 73.

Zu dem Flächenpunkte C mögen Parameterwerte gehören, die wir zum Unterschiede von den Parameterwerten $u + du$, $v + dv$ des Punktes Q mit $u + \delta u$, $v + \delta v$ bezeichnen wollen. Die Differentiale

$$x_u\,\delta u + x_v\,\delta v, \quad y_u\,\delta u + y_v\,\delta v, \quad z_u\,\delta u + z_v\,\delta v$$

sind zu den Richtungskosinus von PC und daher auch von AB proportional, und da AB zu PA und QB senkrecht ist, muß somit

$$\mathsf{S}\,X(x_u\,\delta u + x_v\,\delta v) = 0, \quad \mathsf{S}\,(X + dX)(x_u\,\delta u + x_v\,\delta v) = 0$$

sein. Die erste Gleichung ist nach XI (I) eine Identität, und aus der zweiten wird:

$$\mathsf{S}\,(X_u\,du + X_v\,dv)(x_u\,\delta u + x_v\,\delta v) = 0$$

oder also nach (12), S. 122:

$$L\,du\,\delta u + M(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N\,dv\,\delta v = 0.$$

Dies aber besagt nach Satz 50, S. 191, daß die Fortschreitungsrichtungen $(dv:du)$ und $(\delta v:\delta u)$, also PQ und PC, zueinander konjugiert sind. Weil $PC \parallel AB$ ist, gilt daher der

Satz 59: Geht man von einem Flächenpunkte P zu einem unendlich benachbarten Q über, so ist das gemeinsame Lot der Normalen von P und Q parallel derjenigen Fortschreitungsrichtung von P aus, die zu der Fortschreitungsrichtung von P nach Q konjugiert ist.

Man kann dies auch aus der geometrischen Definition konjugierter Richtungen auf S. 190 u. f. schließen, denn die Gerade AB ist zu beiden Normalen senkrecht, also auch parallel zu der Schnittgeraden der Tangentenebenen von P und von Q.

Den oben für $d\mathfrak{n}^2$ gefundenen Wert kann man noch auf eine andere bemerkenswerte Form bringen, wenn man nämlich auf den Zähler in (11) diejenige identische Umformung anwendet, die in I S. 194 unter (11) angegeben wurde. Danach wird:

$$(19) \qquad d\mathfrak{n}^2 = \frac{\mathbf{S}(dy\,dZ - dz\,dY)^2}{\mathbf{S}\,dX^2}.$$

Hierin ist nun

$$dy\,dZ - dz\,dY =$$
$$= (y_u Z_u - z_u Y_u)\,du^2 + (y_u Z_v - z_u Y_v + y_v Z_u - z_v Y_u)\,du\,dv + $$
$$+ (y_v Z_v - z_v Y_v)\,dv^2,$$

also nach (1) und (2):

$$dy\,dZ - dz\,dY =$$
$$= \frac{y_u z_v - z_u y_v}{D^2}\,[(FL - EM)\,du^2 + (GL - EN)\,du\,dv + (GM - FN)\,dv^2].$$

Der Inhalt der eckigen Klammer läßt sich als Determinante schreiben, und der davorstehende Faktor ist nach XI (F) gleich $X:D$. Somit kommt:

$$(20) \qquad dy\,dZ - dz\,dY = -\frac{X}{D}\begin{vmatrix} dv^2 & E & L \\ -du\,dv & F & M \\ du^2 & G & N \end{vmatrix}$$

Entsprechende Formeln gelten für $dz\,dX - dx\,dZ$ und $dx\,dY - dy\,dX$. Nach (19) ergibt sich also wegen $\mathbf{S}X^2 = 1$ und (16):

$$(21) \qquad d\mathfrak{n}^2 = \frac{1}{D^2(H\,d\sigma^2 - K\,ds^2)}\begin{vmatrix} dv^2 & E & L \\ -du\,dv & F & M \\ du^2 & G & N \end{vmatrix}^2.$$

Wenn man, wie wir es oft getan haben, $dv:du$ mit k bezeichnet, tritt rechts eine Determinante auf, die schon bei der Be-

stimmung der Hauptkrümmungsrichtungen des Flächenpunktes P vorkam, siehe (17) auf S. 132. Daraus folgt, daß $d\mathfrak{n}^2$ gleich Null wird, wenn die der Normale des Punktes P oder (u, v) unendlich benachbarte Normale von einem Punkte Q ausgeht, der auf einer der Hauptkrümmungsrichtungen von P liegt. Dann also wird man vermuten, daß die beiden unendlich benachbarten Normalen einander schneiden (vgl. I S. 368). Wir werden hierauf im nächsten Paragraphen noch einmal zurückkommen (siehe S. 212 u. f.).

Dividiert man den Wert (21) von $d\mathfrak{n}^2$ mit dem unter (17) angegebenen Werte von $d\vartheta^2$, so geht rechts ein vollständiges Quadrat hervor, so daß man die Wurzel ausziehen kann. Es kommt:

$$\frac{d\mathfrak{n}}{d\vartheta} = \frac{\pm 1}{D(H\,d\sigma^2 - K\,ds^2)} \begin{vmatrix} dv^2 & E & L \\ -du\,dv & F & M \\ du^2 & G & N \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Durch geeignete Festsetzungen kann man eine Wahl zwischen den beiden Vorzeichen herbeiführen, doch darauf wollen wir nicht eingehen. Hervorgehoben sei, daß der Wert (22) außer vom gewählten Flächenpunkte (u, v) nur noch von der gewählten Fortschreitungsrichtung $(dv : du)$ abhängt, da er eine homogene Funktion nullten Grades von du und dv ist.

Wir wollen jetzt die Gesamtheit aller derjenigen Normalen der Fläche betrachten, die von allen zu einem bestimmt gewählten Flächenpunkte (u, v) oder P unendlich benachbarten Flächenpunkten $(u + du, v + dv)$ oder Q ausgehen. Insbesondere wollen wir untersuchen, wo sie eine Ebene treffen, die zur Tangentenebene von P parallel ist und auf der Normale von P eine beliebig gewählte Strecke t abschneidet, also durch irgend einen beliebig gewählten Punkt N auf der Normale geht, für den $PN = t$ ist. Jetzt also soll t nicht gerade notwendig den Wert (9) haben. Nach (8) geben die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{x} &= x + x_u\,du + x_v\,dv + (X + X_u\,du + X_v\,dv)\,t, \\ \mathfrak{y} &= y + y_u\,du + y_v\,dv + (Y + Y_u\,du + Y_v\,dv)\,t, \\ \mathfrak{z} &= z + z_u\,du + z_v\,dv + (Z + Z_u\,du + Z_v\,dv)\,t \end{aligned}\right. \tag{23}$$

die Schnittpunkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ jener Ebene mit allen Normalen an, die zu der Normale von P unendlich benachbart sind. Da hier zwei Differentiale du und dv auftreten, folgern wir, daß diese Schnittpunkte innerhalb eines solchen unendlich kleinen Flächenstücks der Ebene liegen, das sich im allgemeinen nicht auf ein Kurvenelement zusammenziehen wird. Anders gesagt: Durch jeden Punkt

der Ebene, der zu N unendlich benachbart ist, wird auch eine unendlich benachbarte Normale gehen.

Dies wird nur dann nicht der Fall sein, wenn die drei Funktionen (23), aufgefaßt als Funktionen von du und dv, voneinander abhängig sind, oder auch, da sie linear in du und dv sind, wenn die Koeffizienten von du zu denen von dv proportional sind:

$$\frac{x_u + X_u t}{x_v + X_v t} = \frac{y_u + Y_u t}{y_v + Y_v t} = \frac{z_u + Z_u t}{z_v + Z_v t}, \tag{24}$$

denn dann kann man die Gleichungen (23) — sobald man den gemeinsamen Wert dieser drei Brüche mit $1 : \varrho$ bezeichnet — so schreiben:

$$\mathfrak{x} = x + Xt + (x_u + X_u t)(du + \varrho\, dv),$$
$$\mathfrak{y} = y + Yt + (y_u + Y_u t)(du + \varrho\, dv),$$
$$\mathfrak{z} = z + Zt + (z_u + Z_u t)(du + \varrho\, dv),$$

so daß sie die Veränderlichen du und dv nur in der Verbindung $du + \varrho\, dv$ enthalten, die überdies linear auftritt, so daß alle Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ nur noch eine Gerade erfüllen. Indem wir die Forderung, daß alle drei Brüche (21) denselben Wert $1 : \varrho$ haben sollen, etwas anders schreiben, erkennen wir also folgendes:

Nur dann, wenn man zwei Größen t und ϱ so bestimmen kann, daß

$$x_v + X_v t = \varrho (x_u + X_u t),$$
$$y_v + Y_v t = \varrho (y_u + Y_u t),$$
$$z_v + Z_v t = \varrho (z_u + Z_u t)$$

wird, schneiden alle diejenigen zweifach unendlich vielen Normalen, die zur Normale von P unendlich benachbart sind, die zur Tangentenebene von P parallele und von ihr um die Strecke t entfernte Ebene in einer Geraden. Diese Gerade geht von dem Punkte N aus, in dem die Parallelebene die Normale von P schneidet, und hat Richtungskosinus proportional zu:

$$x_u + X_u t, \quad y_u + Y_u t, \quad z_u + Z_u t.$$

Nun ist es in der Tat möglich, die drei letzten Gleichungen durch passende Werte von t und ϱ zu befriedigen. Wenn wir sie nämlich mit X, Y, Z multiplizieren und dann addieren, geht nach XI(H) und XI(I) eine Identität hervor. Tatsächlich liegen also nur zwei Bedingungsgleichungen vor. Diese können wir in bequemerer Form schreiben, indem wir die Gleichungen das eine Mal mit x_u, y_u, z_u und das andere Mal mit x_v, y_v, z_v multiplizieren und

dann jedesmal addieren. Dann kommt nach XI (A) und nach (12), S. 122:

$$F - Mt = \varrho(E - Lt),$$
$$G - Nt = \varrho(F - Mt).$$

Elimination der Hilfsgröße ϱ führt zu der Gleichung:

$$(LN - M^2)t^2 - (EN - 2FM + GL)t + (EG - F^2) = 0,$$

die nach (24), S. 134, aussagt, daß t gleich einem der beiden Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 sein muß, vorausgesetzt, daß überhaupt Hauptkrümmungsradien vorhanden sind, d. h. daß P ein gewöhnlicher Flächenpunkt ist.

Alle Flächennormalen, die zu der eines gewöhnlichen Flächenpunktes P unendlich benachbart sind, schneiden demnach nur zwei zur Tangentenebene von P parallele Ebenen in Geraden, nämlich die Ebenen durch die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte C_1 und C_2 von P. Die betreffenden Geraden $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ in diesen beiden Ebenen gehen durch C_1 bzw. C_2 selbst.

Die Richtungskosinus der Geraden $\mathfrak{g}_1$ sind proportional zu

$$x_u + X_u R_1, \qquad y_u + Y_u R_1, \qquad z_u + Z_u R_1$$

oder nach (1) zu drei Größen, von denen die erste diese ist:

$$(EG - F^2)x_u + (FM - GL)R_1 x_u + (FL - EM)R_1 x_v$$

und die beiden anderen durch zyklische Vertauschung aus ihr leicht hervorgehen. Zur Vereinfachung dieser Größen gehen wir auf die Formeln für die Hauptkrümmungen zurück. Sind k_1 und k_2 die Werte von $dv:du$ für die beiden Hauptkrümmungsrichtungen, so ist nach (22), S. 134:

$$R_1 = \frac{F + k_1 G}{M + k_1 N}.$$

Setzen wir diesen Wert ein, so werden die Richtungskosinus zu drei Größen proportional, von denen die erste den Wert

$$[G(EM - FL) + k_1 G(EN - GL) - k_1 F(FN - GM)]x_u - \\ - (EM - FL)(F + k_1 G)x_v$$

hat und die beiden anderen durch zyklische Vertauschung hieraus hervorgehen. Nach (18), S. 133, ist jedoch:

$$EM - FL = (FN - GM)k_1 k_2,$$
$$EN - GL = -(FN - GM)(k_1 + k_2).$$

Setzen wir diese Werte ein, so kann bei den drei Größen ein gemeinsamer Faktor gestrichen werden, so daß sich ergibt, daß die Richtungskosinus von $\mathfrak{g}_1$ zu den Größen

$$x_u + k_2 x_v, \qquad y_u + k_2 y_v, \qquad z_u + k_2 z_v$$

proportional sind. Diese Größen sind aber ihrerseits proportional zu den Richtungskosinus der zweiten Hauptkrümmungstangente von P. Entsprechende Schlüsse machen wir hinsichtlich der Geraden $\mathfrak{g}_2$. Daher kommt:

Satz 60:[1] Die Normalen, die zu der Normale eines gewöhnlichen Flächenpunktes P unendlich benachbart sind, schneiden sämtlich zwei Geraden $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$, von denen die erste durch den ersten Hauptkrümmungsmittelpunkt C_1 von P geht und zur zweiten Hauptkrümmungstangente von P parallel ist, während die zweite durch den zweiten Hauptkrümmungsmittelpunkt C_2 von P geht und zur ersten Hauptkrümmungstangente von P parallel ist. Im Falle eines parabolischen Flächenpunktes P liegt einer der beiden Punkte C_1 und C_2 und also auch eine der beiden Geraden $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ unendlich fern.

Fig. 74. Fig. 75.

Siehe Fig. 74 für einen elliptischen und Fig. 75 für einen hyperbolischen Punkt.

[1] Siehe Ch. Sturm, „Mémoire sur la théorie de la vision", Comptes Rendus 20. Bd. (1845).

Zugleich hat sich noch ergeben:

Satz 61:[1] Die Richtungskosinus der ersten Hauptkrümmungstangente eines gewöhnlichen und nicht-parabolischen Flächenpunktes (u, v) sind proportional zu:

$$x_u + X_u R_2, \quad y_u + Y_u R_2, \quad z_u + Z_u R_2$$

oder:

$$x_v + X_v R_2, \quad y_v + Y_v R_2, \quad z_v + Z_v R_2$$

und die der zweiten Hauptkrümmungstangente proportional zu:

$$x_u + X_u R_1, \quad y_u + Y_u R_1, \quad z_u + Z_u R_1$$

oder:

$$x_v + X_v R_1, \quad y_v + Y_v R_1, \quad z_v + Z_v R_1.$$

Wir hatten zwar nur das Eine bewiesen, daß

$$x_u + X_u R_1, \quad y_u + Y_u R_1, \quad z_u + Z_u R_1$$

proportional zu den Richtungskosinus der zweiten Hauptkrümmungstangente sind, aber das übrige ergibt sich durch Vertauschung der beiden Hauptkrümmungsrichtungen sowie durch Vertauschung der beiden Parameter u und v. Von den parabolischen Punkten mußte in Satz 61 abgesehen werden, weil für sie einer der beiden Hauptkrümmungsradien unendlich groß wird. — Will man den Satz 60 auf die Gesamtheit der Normalen einer Fläche anwenden, so muß man nach S. 159 und nach Satz 12, S. 131, von den Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden absehen. Aus unserem Satze folgt dann, daß die Gesamtheit der Normalen einer Fläche keine willkürliche Lagerung haben kann, vielmehr so beschaffen ist, daß alle zu einer von ihnen unendlich benachbarten Normalen zwei zueinander windschiefe und senkrechte Geraden schneiden. Nicht jede Schar von zweifach unendlich vielen Geraden ist die Schar der Normalen einer Fläche. Beispielsweise gibt es keine Fläche, die alle diejenigen Geraden, die irgend zwei zueinander windschiefe Geraden schneiden, senkrecht durchsetzt.

Um aus den Formeln weitere geometrische Schlüsse zu ziehen, empfiehlt sich die Einführung des Koordinatensystems $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, dessen Achsen das begleitende System des Punktes P bilden (vgl. S. 159). Dabei werden $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ selbst als Parameter benutzt. Die Fundamentalgrößen des Punktes P haben alsdann nach S. 160 die Werte:

[1] Siehe Rodrigues, „Sur quelques propriétés des intégrales doubles et des rayons de courbure des surfaces", Corresp. sur l'Ecole polyt. 3. Bd. (1815) und Bulletin de la Soc. philom. de Paris 1815.

$$\mathfrak{E} = 1, \qquad \mathfrak{F} = 0, \qquad \mathfrak{G} = 1;$$

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{R_1}, \quad \mathfrak{M} = 0, \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{R_2}.$$

Da nach (26), S. 135,

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \qquad K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}$$

ist, nimmt die erste Formel (17) die Gestalt an:

$$(25) \qquad t = \frac{\frac{1}{R_1}\,d\mathfrak{x}^2 + \frac{1}{R_2}\,d\mathfrak{y}^2}{\frac{1}{R_1^2}\,d\mathfrak{x}^2 + \frac{1}{R_2^2}\,d\mathfrak{y}^2} = \frac{\frac{1}{R_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2}\sin^2\varphi}{\frac{1}{R_1^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2^2}\sin^2\varphi},$$

wenn φ den Winkel bezeichnet, den die Richtung $(d\mathfrak{y} : d\mathfrak{x})$ mit der ersten Hauptkrümmungstangente von P bildet. Ferner gibt (17):

$$(26) \qquad \left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2 = \frac{\cos^2\varphi}{R_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2^2}.$$

Diese Formel erinnert an die Formel des Satzes 31, S. 160, mittels derer die Krümmung eines beliebiges Normalschnittes des Flächenpunktes P bestimmt wird. Doch standen in jener Formel R_1 und R_2 statt R_1^2 und R_2^2. Wir können daher hier eine geometrische Veranschaulichung entsprechend der auf S. 161 u. f. benutzen: Auf der Richtung, die mit der ersten Hauptkrümmungsrichtung den Winkel φ bildet, tragen wir als Radiusvektor den reziproken Wert von $d\vartheta : ds$ auf. Dabei ist zu beachten, daß im Falle einer reellen Fläche der Winkel $d\vartheta$ ebenso wie das Bogenelement ds positiv aufzufassen ist. Die Endpunkte der Radienvektoren bilden in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene den Kegelschnitt

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2^2} = 1,$$

der im reellen Falle eine Ellipse ist, die aber nicht mit der Ellipse auf S. 162 verwechselt werden darf, weil sie die beiden Hauptkrümmungsradien selbst, nicht die Wurzeln daraus, zu Halbachsen hat. Also gilt der

Satz 62: Trägt man auf jeder Fortschreitungsrichtung einer Fläche von einem gewöhnlichen Punkte P aus als Strecke den Quotienten aus dem Bogenelement ds und dem unendlich kleinen Winkel $d\vartheta$ auf, um den sich bei der Zurücklegung des Bogenelements ds die Richtung der Flächennormale ändert, so bilden die Endpunkte der Radienvektoren einen Kegelschnitt, dessen Halbachsen auf den Hauptkrümmungstangenten von P liegen und den

beiden Hauptkrümmungsradien von P gleich sind. Im reellen Falle ist der Kegelschnitt eine Ellipse, wenn der Flächenpunkt nicht parabolisch ist, sonst ein Paar von parallelen Geraden.

Sind φ_1 und φ_2 die Winkel, die zwei zueinander senkrechte Fortschreitungsrichtungen mit der ersten Hauptkrümmungsrichtung von P bilden, so ist $\cos^2\varphi_2 = \sin^2\varphi_1$ und $\sin^2\varphi_2 = \cos^2\varphi_1$, so daß nach (26) für die beiden zu diesen Richtungen gehörigen Werte von $d\vartheta : ds$ der Satz hervorgeht:

Satz 63: Geht man von einem gewöhnlichen Flächenpunkte P aus nach zwei zueinander senkrechten Richtungen um Bogenelemente ds_1 und ds_2 weiter, so genügen die Winkel $d\vartheta_1$ und $d\vartheta_2$, um die sich dabei die Richtung der Flächennormale ändert, der Gleichung

$$\left(\frac{d\vartheta_1}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta_2}{ds_2}\right)^2 = \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2},$$

wenn R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien von P sind.

Gehören dagegen φ_1 und φ_2 zu konjugierten Richtungen, so ist nach (6), S. 193:

$$\operatorname{tg}^2\varphi_1 . \operatorname{tg}^2\varphi_2 = \frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

Nun läßt sich $\operatorname{tg}^2\varphi$ aus (26) leicht berechnen. Setzen wir dann die Werte von $\operatorname{tg}^2\varphi_1$ und $\operatorname{tg}^2\varphi_2$ ein, so ergibt sich

Satz 64:[1] Geht man von einem gewöhnlichen Flächenpunkte nach konjugierten Richtungen um die Bogenelemente ds_1 und ds_2 fort, so genügen die Winkel $d\vartheta_1$ und $d\vartheta_2$, um die sich dabei die Richtung der Flächennormale ändert, der Gleichung:

$$\left(\frac{d\vartheta_1}{ds_1} \cdot \frac{d\vartheta_2}{ds_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{R_1 R_2}\right)^2.$$

Die Formel (25) kann auch so geschrieben werden:

$$\frac{t - R_1}{t - R_2} = -\frac{R_1^2}{R_2^2}\operatorname{tg}^2\varphi. \tag{27}$$

Ist ψ der Winkel, den das gemeinsame Lot AB der beiden Normalen PA und QB (siehe Fig. 72, S. 198) mit der Richtung der

[1] Diesen Satz finden wir ausdrücklich formuliert bei V. Kommerell, „Verallgemeinerung des Enneperschen Satzes von der Torsion der Asymptotenlinien“, Math.-naturw. Mitteilungen in Württemberg, 2. Serie, 3. Bd. (1901).

ersten Hauptkrümmung von P macht, so ist nach Satz 59 und nach (6), S. 193:

$$(28) \qquad \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = -\frac{R_2}{R_1},$$

so daß wir (27) auch so schreiben können:

$$(29) \qquad \frac{t - R_1}{t - R_2} = -\operatorname{ctg}^2\psi.$$

Wollen wir außer der bestimmt gewählten Flächennormale PA alle unendlich benachbarten ins Auge fassen, so haben wir φ oder ψ alle möglichen Werte zu geben. Zu jedem Werte von ψ gehört ein gewisses Lot AB. Die Gesamtheit aller dieser Lote AB ist eine einfach unendliche Schar von Geraden, bestimmt also eine geradlinige Fläche, deren Erzeugende die Normale PA oder $\mathfrak{z}$-Achse senkrecht schneiden und zwar in Punkten A, deren Abstände t von P nach (29) als Funktionen derjenigen Winkel ψ bestimmt werden, die diese Geraden mit der Richtung der ersten Hauptkrümmung von P, also mit der $\mathfrak{x}$-Achse, bilden. Nach (29) kommt

$$t = \tfrac{1}{2}(R_1 + R_2) - \tfrac{1}{2}(R_1 - R_2)\cos 2\psi,$$

so daß

$$(30) \quad \mathfrak{x} = \tau\cos\psi, \quad \mathfrak{y} = \tau\sin\psi, \quad \mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}(R_1 + R_2) - \tfrac{1}{2}(R_1 - R_2)\cos 2\psi$$

die Gleichungen einer dieser Geraden AB in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und ausgedrückt mittels eines Parameters τ sind. Läßt man außer τ auch ψ willkürlich, so stellt (30) die Gesamtheit der Geraden AB, also die von ihnen gebildete Fläche dar, ausgedrückt mittels der beiden Parameter τ und ψ. Elimination der Parameter gibt ihre Gleichung

$$(31) \qquad (R_2 - R_1)(\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2) = (2\mathfrak{z} - R_1 - R_2)(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2),$$

aus der man durch Vergleichung mit (7), S. 184, leicht folgert, daß hier wieder ein Zylindroid auftritt. Der Mittelpunkt des Zylindroids liegt auf der $\mathfrak{z}$-Achse und hat die Koordinate $\mathfrak{z} = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$, er ist demnach die Mitte zwischen C_1 und C_2. Für $\psi = 0$ und $\psi = \frac{1}{2}\pi$ stellen die Gleichungen (30) insbesondere die in den Figuren 74 und 75 auf S. 205 mit $\mathfrak{g}_2$ und $\mathfrak{g}_1$ bezeichneten Geraden dar.

Somit haben wir den

Satz 65: Diejenigen Geraden, auf denen die Lote zwischen der Normalen eines gewöhnlichen Flächenpunktes P und den unendlich benachbarten Flächennormalen liegen, bilden ein Zylindroid, dessen Mittelpunkt in der Mitte zwischen den beiden Hauptkrümmungs-Mittel-

punkten C_1 und C_2 von P liegt. Insbesondere gehören dem Zylindroid die Geraden $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ durch C_1 und C_2 parallel zur zweiten bzw. ersten Hauptkrümmungsrichtung von P an.

Im reellen Falle sind $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ die äußersten reellen Geraden des Zylindroids. Alle reellen kürzesten Abstände AB beginnen also zwischen C_1 und C_2.

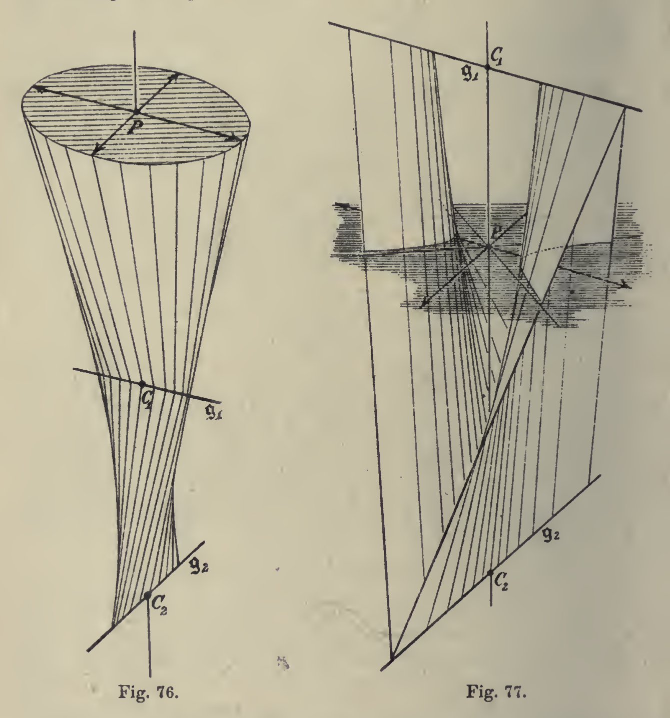


Fig. 76. Fig. 77.

Will man sich von der Lagerung derjenigen Flächennormalen eine Vorstellung machen, deren Fußpunkte Q einem gewöhnlichen Flächenpunkte P unendlich benachbart sind, so wird man zweckmäßig die Punkte Q auf der unendlich kleinen Kurve annehmen, in der eine zur Tangentenebene von P unendlich benachbarte und parallele Ebene die Fläche nach Satz 36, S. 168, schneidet. Diese Kurve ist unter den im Satze angegebenen Beschränkungen einem

Indikatrix-Kegelschnitte von P ähnlich und dazu ähnlich gelegen, also im Falle eines elliptischen Punktes P eine Ellipse, im Falle eines hyperbolischen Punktes P eine Hyperbel. Die Achsen des Kegelschnittes sind dabei parallel den Tangenten der beiden Hauptkrümmungsschnitte von P. Bedenkt man, daß nach jenem Satze die Ebene von P einen unendlich kleinen Abstand von höherer Ordnung als der Ordnung der Bogenelemente PQ hat, und stellt man die Bogenelemente PQ in endlicher Länge dar, so wird man zu einer der beiden Figuren 76 und 77 kommen: Die Normalen gehen von den Punkten eines Kegelschnittes aus und schneiden zwei zu den Achsen des Kegelschnittes parallele Geraden $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$, die durch die zu P gehörigen Hauptkrümmungsmittelpunkte C_1 und C_2 gehen.

Im Falle eines parabolischen Punktes ist der Kegelschnitt nach S. 168 durch zwei zueinander parallele Geraden a und b zu ersetzen, während etwa C_1 ins Unendlichferne rückt, $\mathfrak{g}_2$ zu a und b parallel wird und $\mathfrak{g}_1$ unendlich fern senkrecht zu a und b zu denken ist, so daß die Geraden, die von a oder b ausgehen und durch $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ gehen, parallel werden zu derjenigen Ebene durch PC_2, die zu a und b senkrecht ist. Man erkennt, daß die zu konstruierenden Geraden jetzt in den beiden Ebenen durch $\mathfrak{g}_2$ und a bzw. b liegen.

Den Fall eines Nabelpunktes P erhält man aus dem eines elliptischen Punktes nach S. 136 u. f., wenn man die Ellipse in Fig. 76 insbesondere als Kreis wählt und C_2 mit C_1 zusammenfallen läßt. Dann wird aus der in Fig. 76 dargestellten Fläche ein gerader Kreiskegel mit der Spitze C_1.

§ 11. **Krümmungskurven.**

In § 2 dieses Abschnittes wurden auf S. 135 die beiden Hauptkrümmungsrichtungen eines gewöhnlichen Flächenpunktes definiert. Für diese Richtungen (k) besteht nach S. 132 die Gleichung:

$$(EM - FL) - (GL - EN)k + (FN - GM)k^2 = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} k^2 & E & L \\ -k & F & M \\ 1 & G & N \end{vmatrix} = 0$$

oder auch, wenn man k durch $dv : du$ ersetzt, die Gleichung:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} dv^2 & E & L \\ -du\,dv & F & M \\ du^2 & G & N \end{vmatrix} = 0.$$

Geht man von einem Punkte P längs einer der beiden Hauptkrümmungsrichtungen zu einem unendlich benachbarten Punkte Q über und schlägt man von hier aus wieder diejenige Hauptkrümmungsrichtung von Q ein, die von der vorhergehenden unendlich wenig abweicht usw., so beschreibt man eine Kurve auf der Fläche, die in jedem ihrer Punkte eine der beiden zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen als Tangentenrichtung hat. Die ganze Fläche ist, soweit sie aus gewöhnlichen Punkten besteht, von solchen Kurven überzogen, und zwar bilden diese Kurven ein Kurvennetz (vgl. S. 13), weil ja durch jeden Punkt zwei solche Kurven gehen, die sich daselbst überdies senkrecht kreuzen. Es handelt sich also um ein orthogonales Kurvennetz. Dies Kurvennetz heißt das der Krümmungskurven der Fläche.[1] Analytisch wird es nach S. 13 durch die Gleichung (1) definiert, die, aufgefaßt als gewöhnliche Differentialgleichung, von den Kurven jenes Netzes und nur von ihnen befriedigt wird.

Diese Definition der Krümmungskurven gilt nun nur für Gebiete mit gewöhnlichen Punkten. Aber die in (1) auftretenden Fundamentalgrößen sind auch in außergewöhnlichen Punkten (vgl. S. 159) wohldefiniert, so daß auch in Gebieten mit außergewöhnlichen Punkten durch (1) gewisse Kurvenscharen bestimmt werden. Man wird daher wünschen, die Krümmungskurven geometrisch unabhängig von dem Auftreten außergewöhnlicher Punkte definieren zu können. Dazu gelangen wir, wenn wir nunmehr die schon auf S. 202 gestreifte Frage nach solchen unendlich benachbarten Flächennormalen behandeln, die einander schneiden. Der Begriff dieses Schneidens ist in I S. 367 u. f. bestimmt worden. Um den Satz 5, I S. 370, anwenden zu können, verfahren wir so:

Auf der Fläche sei eine Kurve c gezogen, d. h. die Parameter u und v seien als Funktionen eines Parameters t betrachtet. Die von einem Punkte (u, v) oder (x, y, z) der Kurve c ausgehende Flächennormale hat in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Gleichungen:

$$(2) \qquad \mathfrak{x} = x + \tau X, \quad \mathfrak{y} = y + \tau Y, \quad \mathfrak{z} = z + \tau Z,$$

ausgedrückt mittels eines Parameters τ. Durchwandert der Punkt (u, v) die Kurve c, so stellt (2) die Gesamtheit der von den Punkten von c

[1] Die Betrachtung der Krümmungskurven beginnt bei Monge in seiner „Application etc.“, vgl. die Anm. zu S. 126.

ausgehenden Flächennormalen, also eine geradlinige Fläche, dar. Dabei sind mit u und v auch x, y, z und X, Y, Z Funktionen von t, so daß t und τ die Parameter dieser geradlinigen Fläche bedeuten. Nach Satz 5, I S. 370, worin wegen (2) jetzt φ, χ, ψ durch x, y, z und f, g, h durch X, Y, Z zu ersetzen sind, schneidet jede Gerade der betrachteten Schar von Flächennormalen eine unendlich benachbarte, wenn

$$\begin{vmatrix} x' & X & X' \\ y' & Y & Y' \\ z' & Z & Z' \end{vmatrix} = 0$$

ist. Dabei sind x', y', z' und X', Y', Z' die Ableitungen nach t. Es ist also

$$x' = x_u \frac{du}{dt} + x_v \frac{dv}{dt}, \qquad X' = X_u \frac{du}{dt} + X_v \frac{dv}{dt}$$

usw., so daß sich nach Fortlassen des Nenners dt ergibt:

$$\begin{vmatrix} x_u\,du + x_v\,dv & X & X_u\,du + X_v\,dv \\ y_u\,du + y_v\,dv & Y & Y_u\,du + Y_v\,dv \\ z_u\,du + z_v\,dv & Z & Z_u\,du + Z_v\,dv \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Diese Bedingung wird bequemer, wenn man sie mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix}$$

multipliziert, die nach XI (L) gleich $D \neq 0$ ist. Kombiniert man bei der Anwendung des Satzes über die Multiplikation von Determinanten Reihe mit Reihe, so kommt nämlich wegen XI (A), (II) und (I) und nach (12), S. 122:

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -L\,du - M\,dv & -M\,du - N\,dv & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & L\,du + M\,dv \\ F\,du + G\,dv & M\,du + N\,dv \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Man erkennt sofort, daß dies nichts anderes als die Gleichung (1) ist.

Deshalb definieren wir nun so: Eine Flächenkurve c soll eine Krümmungskurve heißen, wenn die Flächennormale, die von irgend einem Punkte von c ausgeht, die Flächennormale scheidet, die von einem unendlich benachbarten

Punkte von c ausgeht. Man kann dies auch so fassen: Eine Flächenkurve c soll eine Krümmungskurve heißen, wenn die von den Punkten von c ausgehenden Flächennormalen eine abwickelbare Fläche bilden.

Nunmehr erscheint die oben gegebene vorläufige Definition im Falle gewöhnlicher Flächenpunkte als Satz, nämlich so:

Satz 66: Durch jeden gewöhnlichen Punkt einer Fläche gehen zwei zueinander senkrechte Krümmungskurven. Ihre Richtungen daselbst sind die beiden Hauptkrümmungsrichtungen des Punktes.

Überdies sei noch besonders formuliert der

Satz 67: Die Normale eines gewöhnlichen Flächenpunktes P wird nur von solchen unendlich benachbarten Flächennormalen geschnitten, die von Punkten ausgehen, die auf den Hauptkrümmungsrichtungen von P liegen.

Da die Gleichung (4) dasselbe wie die Gleichung (3) besagt, kann man die Bedingung für die Krümmungskurven auch so darstellen:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} dx & X & dX \\ dy & Y & dY \\ dz & Z & dZ \end{vmatrix} = 0.$$

Schreibt man hierin statt der ersten Zeile die Summe der bzw. mit X, Y, Z multiplizierten drei Zeilen, so kommt nach XI (II) und (I):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ dy & Y & dY \\ dz & Z & dZ \end{vmatrix} = 0$$

oder also

$$\frac{dy}{dY} = \frac{dz}{dZ}.$$

Überhaupt ergibt sich:

$$(6) \qquad \frac{dx}{dX} = \frac{dy}{dY} = \frac{dz}{dZ}.$$

Umgekehrt: Infolge von (6) besteht (5). Mithin haben wir den

Satz 68[1]: Krümmungskurven sind diejenigen Kurven einer Fläche, längs deren die Differentiale der rechtwinkligen Punktkoordinaten zu den Differentialen der Richtungskosinus der jeweiligen Flächennormale proportional sind.

[1] Siehe die Abhandlung von Rodrigues in der Anm. zu S. 206.

Ferner leuchtet sofort ein der

Satz 69: In einem Gebiete von lauter gewöhnlichen Flächenpunkten hat die Fläche zwei einfach unendliche und überall zueinander orthogonale Scharen von Krümmungskurven, die insbesondere stets reell sind, wenn es die Fläche ist.

Mit Absicht sagen wir hier nichts von außergewöhnlichen Punkten aus, in denen nach S. 159

$$(GL - EN)^2 - 4(EM - FL)(FN - GM) = 0$$

ist, d. h. die Gleichung (1) zwei zusammenfallende Wurzeln $dv:du$ hat, wenn die Gleichung (1) nicht gar zu einer Identität wird. Dieser besondere Fall tritt in den Nabelpunkten und insbesondere in den Flachpunkten ein, vgl. S. 126 und S. 146. Auf einer reellen Fläche tritt der Fall einer Doppelwurzel $dv:du$ nach S. 131 nirgends ein, wohl aber überall auf einer Fläche, die eine Schar von geraden und eine Schar von krummen Minimalkurven hat, nach Satz 12, S. 131. Wir schließen, daß eine derartige Fläche nur eine einfach unendliche Schar von Krümmungskurven haben kann. Benutzen wir hier die krummen Minimalkurven und die Minimalgeraden als Parameterlinien (u) und (v), so daß $E = G = 0$ ist, nach Satz 14, S. 44, so wird nach Satz 9, S. 129, auch $L = 0$. Die Gleichung (1) ergibt dann bloß $dv^2 = 0$, d. h. die Krümmungskurven sind die Minimalgeraden (v) der Fläche. Diejenigen Flächen schließlich, die überall Nabelpunkte oder insbesondere Flachpunkte haben, sind nach Satz 11, S. 129, die Kugeln und die Ebenen. Daher wird (1) überall auf einer Kugel oder insbesondere Ebene eine Identität. Demnach ist auf einer Kugel oder insbesondere einer Ebene jede Kurve als Krümmungskurve zu betrachten.

Liegt eine nicht-ebene abwickelbare Fläche vor, so fallen überall nach Satz 29, S. 157, die beiden Haupttangenten in die Erzeugenden, und deshalb sind dann nach Satz 33, S. 161, die Krümmungskurven der einen Schar diese Erzeugenden selbst. Die der anderen Schar sind die orthogonalen Trajektorien c der Erzeugenden, d. h. nach Satz 18, I S. 393, die Filarevolventen der Gratlinie, vorausgesetzt, daß überhaupt eine Gratlinie vorhanden ist. Nach der Definition der Krümmungskurven auf S. 214 bilden also die Flächennormalen längs einer jeden dieser Trajektorien c eine abwickelbare Fläche.

Dies Ergebnis ist nur ein besonderer Fall des Satzes 31, I S. 414, nach dem auch diejenigen Geraden, die längs einer orthogonalen Trajektorie c diese Kurve c senkrecht schneiden und einen nicht notwendig rechten, aber konstanten Winkel mit den Erzeugenden bilden, auf einer abwickelbaren Fläche liegen.

Aus diesem Satze können wir einen anderen über Krümmungskurven ableiten:

Es seien zwei Flächen F_1 und F_2 gegeben, die einander längs einer Kurve c unter konstantem Winkel α schneiden, so daß also in jedem Punkte P von c die Normalen n_1 und n_2 beider Flächen denselben Winkel α miteinander bilden. Ist dann c eine Krümmungskurve auf der einen Fläche F_1, so bilden die Normalen n_1 eine abwickelbare Fläche. Auf dieser Fläche ist c eine orthogonale Trajektorie aller Erzeugenden n_1. Nun schneiden alle Geraden n_2 als Normalen von F_2 die Kurve c ebenfalls senkrecht; da sie außerdem mit den Geraden n_1 den konstanten Winkel α bilden, folgt aus dem soeben angegebenen Satze: Die Normalen n_2 der zweiten Fläche F_2 längs c bilden auch eine abwickelbare Fläche, d. h. die Kurve c ist auch auf F_2 eine Krümmungskurve. Daher:

Satz 70: Schneiden zwei Flächen einander längs einer Kurve unter konstantem Winkel und ist die Kurve auf der einen Fläche eine Krümmungskurve, so ist sie es auch auf der anderen.

Um dies auch analytisch zu beweisen, bezeichnen wir die Richtungskosinus der Normalen bei der Fläche F_1 mit X_1, Y_1, Z_1, bei der Fläche F_2 mit X_2, Y_2, Z_2. In einem Punkte (x, y, z) der Schnittkurve c beider Flächen sollen nach Voraussetzung die Normalen einen konstanten Winkel α bilden. Dann ist:

$$\mathbf{S}\, X_1 X_2 = \cos\alpha .$$

Wenn wir längs der Schnittkurve c fortschreiten, muß also

$$\mathbf{S}\, X_1\, dX_2 + \mathbf{S}\, X_2\, dX_1 = 0$$

sein. Ist nun c auf F_1 eine Krümmungskurve, so sind dX_1, dY_1, dZ_1 nach Satz 68 proportional zu dx, dy, dz, so daß sich $\mathbf{S}\, X_2\, dX_1$ nur um einen gewissen Faktor von $\mathbf{S}\, X_2\, dx$ unterscheidet. Diese Summe aber ist gleich Null, da die Richtung $(X_2 : Y_2 : Z_2)$ auf der Tangentenrichtung $(dx : dy : dz)$ von c senkrecht steht. Unsere Gleichung gibt daher:

$$\mathbf{S}\, X_1\, dX_2 = 0 .$$

Außerdem ist wegen $\mathbf{S} X_2^2 = 1$ auch:

$$\mathbf{S} X_2 \, dX_2 = 0 .$$

Andererseits ist, weil die Normalen auf den Tangenten von c senkrecht stehen:

$$\mathbf{S} X_1 \, dx = 0 , \quad \mathbf{S} X_2 \, dx = 0 .$$

Daraus folgt, daß dx, dy, dz denselben beiden linearen homogenen Gleichungen genügen wie dX_2, dY_2, dZ_2. Mithin sind die einen Differentiale zu den anderen längs c proportional, d. h. nach Satz 68 ist c auch auf F_2 eine Krümmungskurve.

Wir können diese Schlußfolgerung umkehren: Es werde vorausgesetzt, daß die beiden Flächen F_1 und F_2 einander in einer Kurve c schneiden, die auf beiden Flächen Krümmungskurve ist. Nach Satz 68 sind dann längs der Schnittkurve c sowohl die Differentiale dX_1, dY_1, dZ_1 als auch die Differentiale dX_2, dY_2, dZ_2 proportional zu dx, dy, dz. Da aber $\mathbf{S} X_1 \, dx = 0$ und $\mathbf{S} X_2 \, dx = 0$ ist, folgt daraus:

$$\mathbf{S} X_1 \, dX_2 = 0 , \quad \mathbf{S} X_2 \, dX_1 = 0 ,$$

also auch:

$$\mathbf{S} X_1 \, dX_2 + \mathbf{S} X_2 \, dX_1 = 0$$

oder:

$$\mathbf{S} X_1 X_2 = \text{konst.}$$

und zwar längs c. Somit:[1]

Satz 71: Schneiden zwei Flächen einander längs einer Kurve, die auf beiden Flächen eine Krümmungskurve ist, so bilden sie längs der Kurve einen konstanten Winkel miteinander.

Aus der Proportionalität von dX_1, dY_1, dZ_1 mit dx, dy, dz darf allerdings nicht ohne weiteres auf die Gleichwertigkeit der Gleichungen $\mathbf{S} X_2 \, dX_1 = 0$ und $\mathbf{S} X_2 \, dx = 0$ geschlossen werden, sobald dX_1, dY_1, dZ_1 alle drei gleich Null sind, weil dann der Proportionalitätsfaktor gleich Null ist. Dieser Fall tritt nur dann ein, wenn längs der Schnittkurve c die eine Fläche parallele Normalen hat, d. h. wenn c der senkrechte Querschnitt eines Zylinders und somit eben ist. Da alle Kurven in einer Ebene Krümmungskurven sind, brauchen wir mithin unsere Sätze nur noch für den Fall des Schnittes einer Fläche mit einer Ebene zu beweisen. Dabei ist wie immer von Minimalebenen abzusehen.

[1] Die Sätze 70 und 71 rühren her von Bonnet, „Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques", Journal de l'Ecole polyt., 35. cah. (1853).

Sind X, Y, Z die Richtungskosinus der Fläche, a, b, c die der Ebene, so ist längs der Schnittkurve

$$\mathsf{S}\, X dx = 0, \quad \mathsf{S}\, a dx = 0.$$

Findet der Schnitt unter konstantem Winkel α statt, so ist längs der Kurve:

$$\mathsf{S}\, aX = \cos\alpha, \quad \text{also} \quad \mathsf{S}\, a dX = 0.$$

Da außerdem

$$\mathsf{S}\, X dX = 0$$

ist, genügen dX, dY, dZ denselben beiden linearen homogenen Gleichungen wie dx, dy, dz, sie sind also einander proportional, so daß die Kurve auf der Fläche nach Satz 68 eine Krümmungskurve ist. Die Umkehrung ist erlaubt: Ist die Kurve auf der Fläche eine Krümmungskurve, so sind dX, dY, dZ proportional zu dx, dy, dz, so daß aus der letzten Gleichung rückwärts die übrigen folgen. Wir sprechen die Ergebnisse für den vorliegenden Fall besonders aus, obwohl sie in Satz 70 und 71 enthalten sind, weil in den Ebenen jede Kurve eine Krümmungskurve ist:

Satz 72: Schneidet eine Ebene eine Fläche unter konstantem Winkel, so ist die Schnittkurve eine Krümmungskurve der Fläche.

Und:

Satz 73: Hat eine Fläche eine ebene Krümmungskurve, so hat sie längs der Kurve eine konstante Neigung zur Ebene der Kurve.

Da auch auf der Kugel jede Kurve eine Krümmungskurve ist, folgt insbesondere aus Satz 70:

Satz 74: Schneidet eine Kugel eine Fläche unter konstantem Winkel, so ist die Schnittkurve eine Krümmungskurve der Fläche.

Und aus Satz 71:

Satz 75: Hat eine Fläche eine sphärische Krümmungskurve, so hat sie längs der Kurve eine konstante Neigung zur Kugel der Kurve.[1]

---

[1] Die Sätze 72 bis 75 faßt man unter dem Namen des Satzes von Joachimsthal zusammen, siehe für ebene Krümmungskurven seine Abhandlung: „Demonstrationes theorematum ad superficies curvas spectantium", Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 30. Bd. (1846), die aus älterer Zeit stammt als die Arbeiten von Bonnet.

Ist eine Krümmungskurve einer Fläche eine Gerade, so muß nach Satz 73 jede Ebene durch die Gerade die Fläche unter konstantem Winkel schneiden, d. h. die Fläche muß längs der Geraden überall dieselbe Tangentenebene haben.

Satz 76: Enthält eine Fläche eine Gerade, so ist diese Gerade dann und nur dann eine Krümmungskurve, wenn die Fläche in allen Punkten der Geraden dieselbe Tangentenebene hat.

Wenn alle Krümmungskurven der einen Schar Geraden sein sollen, muß daher die geradlinige Fläche nach Satz 8, I S. 376, abwickelbar sein.

Zu unseren Sätzen geben wir einige Beispiele:

1. Beispiel: Eine Rotationsfläche wird von jeder Meridianebene senkrecht geschnitten, von jeder zur Achse senkrechten Ebene unter einem für diese Ebene konstanten Winkel. Daher sind die Meridiane und Breitenkreise nach Satz 72 die Krümmungskurven. Dasselbe folgt daraus, daß die Flächennormalen längs eines Meridians eine Ebene und längs eines Breitenkreises einen Kegel, also beide Male eine abwickelbare Fläche bilden.

2. Beispiel: Man kann die Erzeugung der Rotationsflächen so verallgemeinern: Eine Ebene E, in der eine Kurve γ liegt, werde stetig in einfach unendlich viele Lagen übergeführt, so daß sie (vgl. Satz 11, I S. 380) eine abwickelbare Fläche umhüllt, für deren Gratlinie c sie beständig eine Schmiegungsebene ist. Die Kurve γ erzeugt alsdann eine Fläche, und auf dieser Fläche ist γ in jeder Lage eine Krümmungskurve. Jeder Punkt P von γ beschreibt nämlich nach I S. 396 eine Planevolvente k von c; die Tangente seiner Bahn ist beständig senkrecht zur jeweiligen Lage von E. Deshalb ist die Tangentenebene der Fläche in P senkrecht zu E, d. h. die Ebene E schneidet die Fläche in jeder Lage längs der ganzen Kurve γ senkrecht. Mithin ist γ in jeder Lage eine Krümmungskurve, nach Satz 72. Die zweite Schar der Krümmungskurven besteht aus den von den Punkten P von γ beschriebenen Planevolventen k von c.

Die abwickelbare Fläche, die alle Ebenen E einhüllt, kann insbesondere ein Zylinder sein. Dann heißt die von γ beschriebene Fläche eine Gesimsfläche.[1] Diese Fläche wird somit von einer in einer Ebene E gelegenen Kurve γ erzeugt, wenn die Ebene auf einem Zylinder abrollt. Man erkennt, daß die Kurven k hier sämtlich in zur Zylinderachse senkrechten Ebenen liegen, und daß ihre senkrechten Projektionen auf eine derartige Ebene die Evolventen der Kurve sind, in der die Ebene den Zylinder trifft. Die Gesimsflächen gehören also zu denjenigen Flächen, auf denen beide Scharen von Krümmungskurven aus ebenen Kurven bestehen. In Fig. 78 ist ein Teil einer Gesimsfläche für den Fall dargestellt, wo der Zylinder ein gerader Kreiszylinder ist.

[1] Die Gesimsflächen und ihre Krümmungskurven hat zuerst Monge in seiner „Application etc." betrachtet, ebenso die Krümmungskurven der nachher erwähnten Röhrenflächen.

Daß die Böschungsflächen (vgl. I S. 381) zu den Gesimsflächen gehören, leuchtet ein: Sie gehen hervor, wenn die Kurve γ eine Gerade ist.

Die Kurve γ erzeugt eine Röhrenfläche, wenn sie ein Kreis ist und ihre Ebene E wie zuerst in irgend einer Art stetig in einfach unendlich viele

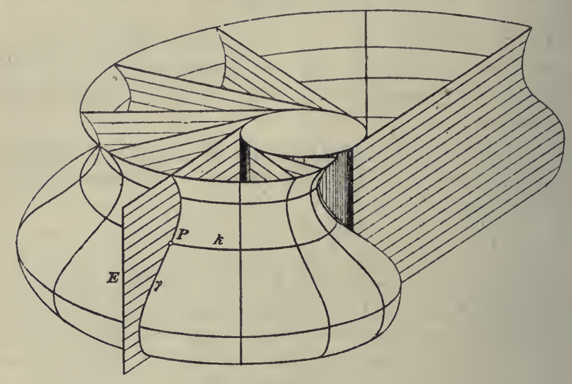


Fig. 78.

Lagen übergeführt wird. Dabei nämlich beschreibt der Mittelpunkt des Kreises eine Planevolvente $\mathfrak{c}$ der Gratlinie c derjenigen abwickelbaren Fläche, die von der Ebene E umhüllt wird. Mithin kann die Röhrenfläche auch so definiert werden: Sie wird erzeugt von allen gleich großen Kreisen γ, deren Mittelpunkte auf einer Kurve $\mathfrak{c}$ liegen, während ihre Ebenen beständig die Normalebenen dieser Punkte von $\mathfrak{c}$ sind, siehe Fig. 79. Wie im zuerst besprochenen allgemeinen Falle bilden die Kreise γ die eine Schar von Krümmungskurven, während die andere Schar aus orthogonalen Trajektorien k aller Normalebenen von $\mathfrak{c}$, also aus lauter Parallelkurven von $\mathfrak{c}$ bestehen.

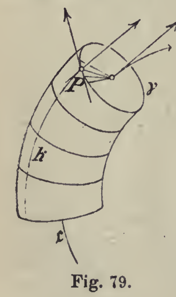


Fig. 79.

Die Bestimmung der Krümmungskurven einer Fläche erfordert die Integration der Differentialgleichung (1), wenn man nicht wie in den soeben betrachteten Beispielen auf anderem Wege zu ihnen gelangt. Ein Beispiel, in dem die Integration geleistet werden kann, ist das folgende

3. Beispiel: Auf der gemeinen Schraubenfläche (siehe S. 136):

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = qv$$

ist

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = u^2 + q^2$$

und

$$L = 0, \qquad M = -\frac{q}{\sqrt{u^2+q^2}}, \qquad N = 0,$$

so daß hier die Differentialgleichung (1) der Krümmungskurven so lautet:

$$(u^2 + q^2)\,dv^2 - du^2 = 0\,.$$

Sie ist in der Form

$$dv = \pm \frac{du}{\sqrt{u^2 + q^2}}$$

sofort zu integrieren und gibt

$$v = \log\left(u \pm \sqrt{u^2 + q^2}\right) + \text{konst.}$$

Die Kurven sind die Diagonalkurven des in Fig. 27 und 28, S. 74 und 75, angedeuteten Isothermennetzes.

Die Parameterlinien der Fläche sind selbst die Krümmungskurven, wenn die Gleichung (1) die Form $du\,dv = 0$ hat, also

$$EM - FL = 0 \quad \text{und} \quad NF - GM = 0$$

ist. Im Falle $F \neq 0$ ergeben diese Bedingungen $E{:}F{:}G$ gleich $L{:}M{:}N$, so daß die Fläche lauter **Nabelpunkte** hat (nach S. 126) und daher eine **Kugel** oder **Ebene** ist, nach Satz 11, S. 129. Auf solchen Flächen sind aber alle Kurven als Krümmungskurven aufzufassen, nach S. 215. Im Falle $F = 0$ kommt $EM = 0$ und $GM = 0$. Da mit F nicht zugleich sowohl E als auch G gleich Null sein kann (nach S. 15), muß dann $M = 0$ sein. Somit besteht der

Satz 77: Die Parameterlinien einer Fläche, die keine Kugel oder Ebene ist, sind ihre Krümmungskurven, sobald die Fundamentalgrößen F und M überall gleich Null sind.

Liegt die Fläche in der Form

$$z = f(x, y)$$

vor, sind also x und y selbst die Parameter u und v, so haben E, F, G nach (7), S. 15, die Werte $1 + p^2$, pq und $1 + q^2$, während sich L, M, N nach (16), S. 124, zueinander verhalten wie r, s, t. Folglich lautet die Differentialgleichung (1) der Krümmungskurven so:

$$\begin{vmatrix} dy^2 & 1 + p^2 & r \\ -dx\,dy & pq & s \\ dx^2 & 1 + q^2 & t \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

oder

$$[(1 + p^2)s - pqr]\,dx^2 + [(1 + p^2)t - (1 + q^2)r]\,dx\,dy - \\ - [(1 + q^2)s - pqt]\,dy^2 = 0\,. \tag{8}$$

Man kann dafür auch schreiben:

$$(r\,dx + s\,dy)[dy + q(p\,dx + q\,dy)] = \\ = (s\,dx + t\,dy)[dx + p(p\,dx + q\,dy)]\,.$$

Da p, q die partiellen Ableitungen erster Ordnung und r, s, t die zweiter Ordnung von z nach x und y sind, ist aber

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

so daß die Differentialgleichung der Krümmungskurven kürzer so geschrieben werden kann:[1]

$$(9) \qquad dp(dy + q\,dz) = dq(dx + p\,dz).$$

Wir machen hiervon eine Anwendung in dem

4. Beispiel: Unter welchen Umständen bilden auch die senkrechten Projektionen der Krümmungskurven einer Fläche auf eine bestimmte Ebene ein orthogonales Netz? Bei senkrechter Projektion erscheint ein rechter Winkel bekanntlich nur dann wieder als rechter Winkel, wenn einer seiner Schenkel der Projektionsebene parallel ist. Die Krümmungskurven der einen Schar müssen somit der Ebene parallel sein, und diese Bedingung reicht aus. Da man die Kurven, in denen eine Fläche durch lauter parallele Ebenen getroffen wird, die Höhenkurven der Fläche nennen kann, sobald man sich die Ebenen wagerecht denkt, ist die aufgeworfene Frage also identisch mit dieser:[2] Unter welchen Umständen sind die Höhenkurven einer Fläche Krümmungskurven? Die orthogonalen Trajektorien der Höhenkurven heißen aus einem einleuchtenden Grunde die Fallkurven (Kurven stärksten Gefälles) der Fläche. Sind die Höhenkurven Krümmungskurven, so gilt also dasselbe von den Fallkurven. Zur Lösung der Aufgabe betrachten wir die xy-Ebene als wagerecht. Dann werden die Höhenkurven durch z = konst. dargestellt. Längs einer Höhenkurve ist also $dz = 0$. Sollen die Höhenkurven Krümmungskurven sein, so muß also für sie nach (9)

$$dq\,dx - dp\,dy = 0$$

sein, d. h. unter der Bedingung $dz = 0$ oder

$$p\,dx + q\,dy = 0.$$

Hier liegen zwei in dx und dy lineare Gleichungen vor, deren Determinante

$$\begin{vmatrix} dq & -dp \\ p & q \end{vmatrix}$$

also für z = konst. verschwinden muß. Diese Determinante ist jedoch gleich $p\,dp + q\,dq$ oder der Hälfte des Differentials von $p^2 + q^2$. Sobald also z oder $f(x, y)$ konstant gewählt wird, muß auch $p^2 + q^2$ konstant sein, d. h. $p^2 + q^2$ ist eine Funktion von z allein, etwa das Quadrat der Funktion $\varphi(z)$. Dann dürfen wir setzen:

$$(10) \qquad p = \varphi(z)\cos\omega, \qquad q = \varphi(z)\sin\omega,$$

wo ω eine Funktion von x und y bedeutet. Weil aber p und q die Ableitungen von z nach x und y sind, muß wegen

[1] So findet sie sich in Monges „Application etc."

[2] In dieser Form hat Monge die Aufgabe in seiner „Application etc." gestellt und gelöst.

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

die Ableitung von p nach y gleich der von q nach x sein. Aber nach (10) ist:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \varphi' q \cos\omega - \varphi \sin\omega \,.\, \omega_y\,,$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \varphi' p \sin\omega + \varphi \cos\omega \,.\, \omega_x$$

oder, wenn man die Werte (10) rechts einsetzt:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \varphi\varphi' \sin\omega\cos\omega - \varphi \sin\omega \,.\, \omega_y\,,$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \varphi\varphi' \sin\omega\cos\omega + \varphi \cos\omega \,.\, \omega_x\,.$$

Beide Werte stimmen also wirklich überein, wenn

(11) $$\sin\omega \,.\, \omega_y + \cos\omega \,.\, \omega_x = 0$$

ist.

Höhen- und Fallkurven sind auch in der Projektion auf die xy-Ebene zueinander senkrecht, da die Höhenkurven Tangenten parallel zur xy-Ebene haben. Längs der Höhenkurven ist, wie gesagt, dz oder $p\,dx + q\,dy$ gleich Null, also $dy:dx$ gleich $-p:q$. Da x und y die Koordinaten in der xy-Ebene sind, gibt $-p:q$ auch die Fortschreitungsrichtung längs der Projektionen der Höhenkurven auf der xy-Ebene an. Dazu senkrecht ist die Richtung $dy:dx$, die den entgegengesetzt reziproken Wert, nämlich $q:p$, hat. Längs der Projektionen der Fallkurven gibt also $dy:dx = q:p$ die Fortschreitungsrichtungen an. Nach (10) ist dieser Wert gleich $\operatorname{tg}\omega$. Mithin bedeutet ω den Winkel, den die Tangente der Projektion einer Fallkurve mit der x-Achse bildet. Nach (11) ist nun $\operatorname{tg}\omega$ gleich $-\omega_x:\omega_y$. Längs der Projektion einer jeden Fallkurve ist somit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega_x}{\omega_y} \quad \text{oder} \quad \omega_x\,dx + \omega_y\,dy = 0\,,$$

d. h $d\omega = 0$. Längs der Projektion einer jeden Fallkurve ist also ω konstant, d. h. jede Fallkurve stellt sich in der Projektion als Gerade dar. Die Fallkurven liegen demnach in einer einfach unendlichen Schar von Ebenen, die auf der xy-Ebene senkrecht stehen. Diese Ebenen werden von einem vertikalen Zylinder eingehüllt, der insbesondere in eine vertikale Gerade ausarten kann. Die Höhenkurven sind orthogonale Trajektorien der Fallkurven und haben horizontale Tangenten. Folglich sind sie orthogonale Trajektorien jener Ebenenschar. Mithin gelangen wir zu den Gesimsflächen[1] des 2. Beispiels. Artet der Zylinder in eine Gerade aus, so ergibt sich insbesondere eine Rotationsfläche. Übrigens kann die Schar der vertikalen Ebenen auch aus lauter parallelen Ebenen bestehen. Dann geht als gesuchte Fläche einfach eine Ebene hervor.

[1] Wir merken hierbei an: Mit der Untersuchung derjenigen Flächen, deren Krümmungskurven sämtlich sphärisch oder im besonderen eben sind und zu denen also die Gesimsflächen gehören, haben sich namentlich Dupin, Joachimsthal, Bonnet, A. Serret und Dini beschäftigt. Ausführlichere Angaben der Literatur hierüber findet man bei Salmon-Fiedler, „Analytische Geometrie des Raumes", 2. Teil, 3. Aufl., Leipzig 1880, S. XXX.

§ 12. Dreifache orthogonale Flächensysteme.

Obgleich wir uns vorgenommen haben, die systematische Betrachtung der Eigenschaften von Flächen**scharen** beiseite zu lassen, wollen wir doch nicht an dem Falle eines dreifachen orthogonalen Flächensystems vorübergehen, weil er allzu eng mit der Theorie der Krümmungskurven zusammenhängt.[1]

Die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z seien nicht wie bisher als Funktionen von zwei Parametern u und v, sondern als Funktionen von **drei Parametern** u, v, w gegeben:

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v, w), \quad y = \chi(u, v, w), \quad z = \psi(u, v, w),$$

wobei wir wie immer voraussetzen, daß φ, χ, ψ innerhalb eines Bereiches, in dem wir verbleiben, einwertige analytische Funktionen von u, v, w bedeuten. Ist u_0, v_0, w_0 ein erlaubtes Wertetripel von u, v, w, und sind x_0, y_0, z_0 die infolge von (1) dazu gehörigen Werte von x, y, z, so gehört zu jedem Wertetripel u, v, w in einer gewissen Umgebung des Tripels u_0, v_0, w_0 ein Punkt (x, y, z) in einer gewissen Umgebung des Punktes (x_0, y_0, z_0). Wenn wir nun noch voraussetzen, daß die sogenannte **Funktionaldeterminante** der drei **Funktionen** φ, χ, ψ, nämlich

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v & \varphi_w \\ \chi_u & \chi_v & \chi_w \\ \psi_u & \psi_v & \psi_w \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

für das Wertetripel u_0, v_0, w_0 von Null verschieden sei, lehrt der Satz der Funktionentheorie über das Vorhandensein von Auflösungen (vgl. S. 4), daß die Gleichungen (1), falls man einen Punkt (x, y, z) irgendwie in einer hinreichend engen Umgebung des Punktes (x_0, y_0, z_0) wählt, durch ein und nur ein Wertetripel u, v, w in einer gewissen Umgebung des Tripels u_0, v_0, w_0 befriedigt werden. Beschränken wir uns auf derartige Umgebungen, so können wir also sagen, daß infolge von (1) zu jedem Wertetripel u, v, w ein und nur ein Punkt (x, y, z) und umgekehrt zu jedem Punkte (x, y, z) ein und nur ein Wertetripel u, v, w gehört. Einen Punkt (x, y, z) kann man daher auch einen Punkt (u, v, w) nennen, indem man ihn durch die zugehörigen Parameterwerte kennzeichnet. Überdies ist noch hervorzuheben, daß die Funktionaldeterminante von φ, χ, ψ oder x, y, z

[1] Dennoch kann dieser Paragraph ohne Beeinträchtigung des Späteren überschlagen werden.

unter den gemachten Beschränkungen nicht nur für das Wertetripel u_0, v_0, w_0, sondern überhaupt von Null verschieden ist.[1]

Man nennt u, v, w krummlinige Koordinaten des Raumes[2]; der Grund dafür liegt in folgender Betrachtung: Wählt man etwa w bestimmt, gleich w_0, so stellen die Gleichungen (1) nach S. 6 eine Fläche dar:

$$(2) \qquad x = \varphi(u, v, w_0), \quad y = \chi(u, v, w_0), \quad z = \psi(u, v, w_0),$$

denn sie enthalten nur noch zwei Parameter u und v, und die drei zweireihigen Determinanten

$$\chi_u \psi_v - \psi_u \chi_v, \quad \psi_u \varphi_v - \varphi_u \psi_v, \quad \varphi_u \chi_v - \chi_u \varphi_v$$

sind nicht alle drei gleich Null, weil sonst die Funktionaldeterminante von φ, χ, ψ verschwände. Ebenso ergibt sich je eine Fläche, wenn man v bestimmt, etwa gleich v_0, oder u bestimmt, etwa gleich u_0, wählt, nämlich die Fläche

$$(3) \qquad x = \varphi(u, v_0, w), \quad y = \chi(u, v_0, w), \quad z = \psi(u, v_0, w)$$

mit den Parametern u und w bzw. die Fläche

$$(4) \qquad x = \varphi(u_0, v, w), \quad y = \chi(u_0, v, w), \quad z = \psi(u_0, v, w)$$

mit den Parametern v und w. Alle drei Flächen haben einen Punkt (x_0, y_0, z_0) gemein, dessen Koordinaten sich aus (1) ergeben, wenn man darin u, v, w gleich u_0, v_0, w_0 wählt. Die Fläche (2) wird man als die Fläche (w_0) bezeichnen können, da man aus (1) ihre Gleichungen (2) sofort erhalten kann, wenn man den zugehörigen Wert w_0 von w einsetzt. Entsprechend wird man die Flächen (3) und (4) als die Flächen (v_0) und (u_0) bezeichnen können.

Diese Betrachtung gilt nun allgemein in dem Bereiche, auf den wir uns beschränkt haben: Jeder Punkt (x, y, z) oder (u, v, w) erscheint als Schnittpunkt dreier Flächen (u), (v) und (w). Die Flächen (u) bilden eine einfach unendliche Schar, ebenso die Flächen (v) und die Flächen (w). Die Gesamtheit aller dieser Flächen heißt ein dreifaches Flächensystem.

Die beiden durch den Punkt (u_0, v_0, w_0) gehenden Flächen (v_0) und (w_0), die Flächen (3) und (2), schneiden einander längs der Kurve, die durch (1) dargestellt wird, wenn man darin v und w

[1] Bei der Ausdehnung des Bereiches, die unter Umständen möglich ist, wenn φ, χ, ψ bestimmt gegebene Funktionen sind, wird man Stellen (u, v, w), an denen die Funktionaldeterminante verschwindet, als singulär ausschließen.

[2] Nach Lamé's „Leçons sur les coordonnées curvilignes", Paris 1859.

gleich v_0 und w_0 wählt, denn sowohl aus (2) gehen durch die Substitution $v = v_0$ als auch aus (3) durch die Substitution $w = w_0$ die drei Gleichungen

$$(5) \qquad x = \varphi(u, v_0, w_0), \quad y = \chi(u, v_0, w_0), \quad z = \psi(u. v_0, w_0)$$

hervor, die nur noch einen Parameter u enthalten und daher eine Kurve definieren. Diese Schnittkurve der Flächen (v_0) und (w_0) wird man als die Kurve (v_0, w_0) bezeichnen können. Ebenso haben die Flächen (w_0) und (u_0) die Schnittkurve (w_0, u_0):

$$(6) \qquad x = \varphi(u_0, v, w_0), \quad y = \chi(u_0, v, w_0), \quad z = \psi(u_0, v, w_0)$$

mit dem Parameter v und die Flächen (u_0) und (v_0) die Schnittkurve (u_0, v_0):

$$(7) \qquad x = \varphi(u_0, v_0, w), \quad y = \chi(u_0, v_0, w), \quad z = \psi(u_0, v_0, w)$$

mit dem Parameter w. Diese drei Kurven enthalten sämtlich den Punkt (u_0, v_0, w_0), den gemeinsamen Punkt der drei Flächen (u_0), (v_0) und (w_0).

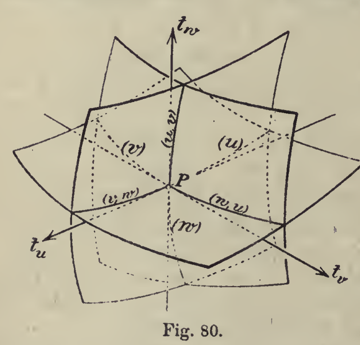


Fig. 80.

Allgemein gehen durch jeden Punkt P oder (u, v, w) des erlaubten Bereiches drei Flächen (u), (v), (w) mit drei Schnittkurven (v, w), (w, u), (u, v), siehe Fig. 80. Da längs der Kurve (v, w) nur noch u veränderlich ist, wird man die Tangente dieser Kurve in P etwa mit t_u bezeichnen, ebenso mit t_v und t_w die Tangenten der Kurven (w, u) und (u, v) im Punkte P.

1. **Beispiel:** Das einfachste Gleichungensystem (1) ist dieses:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = w.$$

Hier sind x, y, z mit u, v, w identisch. Die Flächen (u), (v), (w) sind daher die Ebenen $x =$ konst., $y =$ konst., $z =$ konst. parallel zu den drei Koordinatenebenen, und die Kurven (v, w), (w, u), (u, v) die durch den Punkt (x, y, z) gehenden Parallelen zu den drei Koordinatenachsen. Die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z sind eben bloß ein besonderer Fall von krummlinigen Koordinaten des Raumes.

2. **Beispiel:** Wird in der Parameterdarstellung einer Kugel mit dem Mittelpunkte im Anfangspunkte O, siehe 3. Beispiel, S. 11, der Radius r durch eine willkürliche Größe w ersetzt, so liegen die drei Gleichungen vor:

$$x = w \cos u \cos v, \quad y = w \cos u \sin v, \quad z = w \sin u.$$

Hier ist jede Fläche (w) eine Kugel um O mit dem Radius w. Die Fläche (u) ist ein Rotationskegel mit der Spitze O und der z-Achse als Drehachse, und zwar bedeutet dabei u den Winkel der Erzeugenden mit der xy-Ebene. Schließlich ist die Fläche (v) eine Ebene durch die z-Achse, indem diese Ebene mit der xy-Ebene den Winkel v bildet, siehe Fig. 81. Die Kurven (u, v) sind Geraden von O aus, die Kurven (v, w) Kreise mit dem Mittelpunkte O, deren Ebenen die z-Achse enthalten, und die Kurven (w, u) Kreise, deren Mittelpunkte auf der z-Achse liegen, während ihre Ebenen zur z-Achse senkrecht sind.

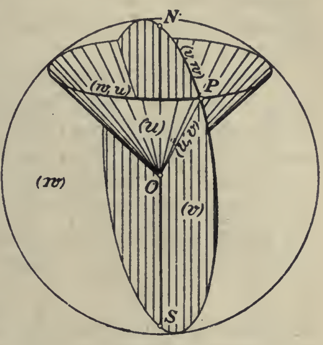


Fig. 81.

Das dreifache Flächensystem (1) heißt **orthogonal**, wenn die Flächen jeder der drei Scharen die der beiden anderen Scharen senkrecht schneiden, und zwar überall in dem erlaubten Bereiche. Die Bedingungen dafür sind leicht aufzustellen. Wir haben nur zu verlangen, daß die drei in Fig. 80 mit t_u, t_v, t_w bezeichneten Tangenten zu einander senkrecht werden. Nun hat t_u als Tangente der Kurve (v, w), längs deren v und w feste Werte haben, Richtungskosinus proportional zu x_u, y_u, z_u. Entsprechendes gilt von t_v und t_w. Daher ergibt sich sofort der

Satz 78:[1] Ein dreifaches Flächensystem

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \chi(u, v, w), \quad z = \psi(u, v, w)$$

ist dann und nur dann orthogonal, wenn die Funktionen x, y, z von u, v, w den drei Bedingungen

$$x_v x_w + y_v y_w + z_v z_w = 0,$$
$$x_w x_u + y_w y_u + z_w z_u = 0,$$
$$x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0$$

Genüge leisten.

Diese Bedingungen der Orthogonalität lassen sich kürzer so schreiben:

$$\text{(8)} \qquad \mathbf{S}\, x_v x_w = 0, \qquad \mathbf{S}\, x_w x_u = 0, \qquad \mathbf{S}\, x_u x_v = 0.$$

[1] Mit den dreifachen orthogonalen Flächensystemen hat sich zuerst Dupin 1813 in seinen „Développements de géometrie" beschäftigt, jedoch ohne Benutzung der krummlinigen Koordinaten, deren systematische Einführung man Lamé verdankt, vgl. Anm. zu S. 225. Bei Lamé finden sich auch die Bedingungen der Orthogonalität, die in Satz 78 angegeben sind.

Man erkennt leicht, daß sie in den beiden in den Beispielen betrachteten Fällen erfüllt sind; es leuchtet ja auch geometrisch ohne weiteres ein, daß sich die Beispiele auf dreifache orthogonale Flächensysteme beziehen.

Liegt ein dreifaches orthogonales Flächensystem vor, so ist an jeder Stelle (u, v, w) die Tangente t_w der Kurve (u, v) zu den beiden Tangenten t_u und t_v senkrecht, siehe wieder Fig. 80, S. 226, also auch senkrecht zur Ebene von t_u und t_v, d. h. zur Tangentenebene der Fläche (w). Demnach ist t_w Flächennormale der Fläche (w). Ihre Richtungskosinus, die wir mit X, Y, Z bezeichnen wollen, sind, wie gesagt, proportional zu x_w, y_w, z_w, so daß wir erhalten:

$$(9) \qquad X = \frac{x_w}{\sqrt{\mathsf{S}\, x_w^2}}, \qquad Y = \frac{y_w}{\sqrt{\mathsf{S}\, x_w^2}}, \qquad Z = \frac{z_w}{\sqrt{\mathsf{S}\, x_w^2}}.$$

Die Quadratwurzel können wir dadurch einwertig machen, daß wir ihr an einer bestimmten Stelle (u, v, w) einen ihrer beiden Werte beilegen. Wir sehen dabei aber von allen Stellen ab, wo $\mathsf{S}\, x_w^2 = 0$ ist, schließen überhaupt alle diejenigen Punkte von der Betrachtung aus, die Minimalpunkte einer Kurve (v, w), (w, u) oder (u, v) sind. Lassen wir nun den betrachteten Punkt P oder (u, v, w) längs der hindurchgehenden Kurve (v, w) auf der Fläche (w) wandern, so sind die Differentiale dX, dY, dZ gleich $X_u du$, $Y_u du$, $Z_u du$, also proportional zu X_u, Y_u, Z_u. Aber diese drei Größen sind weiterhin zu drei anderen proportional. Dies erkennt man so:

Da x_v, y_v, z_v den Richtungskosinus der Geraden t_v proportional sind, die zur Geraden t_w senkrecht ist, hat man zunächst $\mathsf{S}\, x_v X = 0$. Hieraus geht durch Differentiation nach u hervor:

$$\mathsf{S}\, x_v X_u = -\mathsf{S}\, x_{uv} X.$$

Werden rechts die Werte (9) eingesetzt, so kommt:

$$(10) \qquad \mathsf{S}\, x_v X_u = -\frac{\mathsf{S}\, x_{uv} x_w}{\sqrt{\mathsf{S}\, x_w^2}}.$$

Aber wenn wir die Gleichungen (8) der Reihe nach partiell hinsichtlich u, v, w, differenzieren, ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathsf{S}\, x_{uv} x_w + \mathsf{S}\, x_{uw} x_v &= 0, \\ \mathsf{S}\, x_{vw} x_u + \mathsf{S}\, x_{uv} x_w &= 0, \\ \mathsf{S}\, x_{uw} x_v + \mathsf{S}\, x_{vw} x_u &= 0. \end{aligned}$$

Ziehen wir von der Summe der beiden ersten die dritte ab, so folgt:

$$\mathsf{S}\, x_{uv} x_w = 0,$$

so daß aus (10) einfach hervorgeht:

$$\mathsf{S}\, x_v X_u = 0.$$

Da ferner $\mathsf{S}\, X^2 = 1$ ist, haben wir auch $\mathsf{S}\, X X_u = 0$ oder nach Einsetzen der Werte (9):

$$\mathsf{S}\, x_w X_u = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen ergeben, daß sich X_u, Y_u, Z_u zueinander verhalten wie die drei nicht sämtlich verschwindenden Determinanten

$$y_v z_w - z_v y_w, \qquad z_v x_w - x_v z_w, \qquad x_v y_w - y_v x_w.$$

Wieder können wir weiterhin drei andere Größen finden, die zu diesen drei Determinanten proportional sind. Denn die dritte und zweite Gleichung (8), nämlich

$$\mathsf{S}\, x_v x_u = 0, \qquad \mathsf{S}\, x_w x_u = 0,$$

die in x_u, y_u, z_u linear und homogen sind, lehren, daß sich x_u, y_u, z_u gerade so wie jene Determinanten zueinander verhalten. Demnach hat sich ergeben:

(11) $$X_u : Y_u : Z_u = x_u : y_u : z_u.$$

Nun erinnern wir uns daran, daß, wenn der Punkt P längs der Kurve (v, w) auf der Fläche (w) wandert, nur der Parameter u variiert, so daß, wie gesagt, die Differentiale dX, dY, dZ der Richtungskosinus der Flächennormale der Fläche (w) proportional zu X_u, Y_u, Z_u werden, während andererseits die Differentiale dx, dy, dz der rechtwinkligen Koordinaten proportional zu x_u, y_u, z_u werden. Die Proportionen (11) lehren somit nach Satz 68, S. 214, daß die Kurve (v, w) eine Krümmungskurve der Fläche (w) ist. Durch Vertauschen der Rollen, die u und v spielen, beweist man ebenso, daß die Kurve (w, u) eine Krümmungskurve der Fläche (w) ist. Was für die Fläche (w) gilt, ist auch für die Flächen (u) und (v) richtig. Wir gelangen somit zu dem

Satz 79[1]: In einem dreifachen orthogonalen Flächensystem wird jede Fläche einer Schar von den Flächen der beiden anderen Scharen in ihren beiden Scharen von Krümmungskurven geschnitten.

3. Beispiel: Unter a^2, b^2, c^2 seien drei gegebene positive Konstanten verstanden, und es sei $a^2 > b^2 > c^2$. Die Gleichung

---

[1] Diesen Satz hat Dupin schon 1813 in seinen „Développements" bewiesen.

(12)
$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1$$

stellt dann für jeden bestimmten reellen Wert von λ, der kleiner als a^2 ist, eine reelle Fläche zweiter Ordnung dar, und zwar ein zweischaliges Hyperboloid, wenn $a^2>\lambda>b^2$ ist, ein einschaliges Hyperboloid, wenn $b^2>\lambda>c^2$ ist, und ein Ellipsoid, wenn $c^2>\lambda$ ist. Wird dagegen $\lambda>a^2$ gewählt, so ist die Fläche imaginär. Diese reellen Flächen zweiter Ordnung sind sämtlich konfokal, denn sie schneiden jede der drei Koordinatenebenen, die ja die Achsenebenen der Flächen sind, in konfokalen Kegelschnitten. Durch einen beliebig gewählten und nicht gerade in einer der drei Koordinatenebenen gelegenen reellen Punkt (x, y, z) geht, behaupten wir, gerade eines jener zweischaligen Hyperboloide, eines jener einschaligen Hyperboloide und eines jener Ellipsoide. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt daraus, daß (12) bei gegebenen reellen und von Null verschiedenen Werten von x, y, z eine Gleichung dritten Grades für λ vorstellt, die, wie man leicht sieht, reelle Wurzeln $\lambda=u$, $\lambda=v$ und $\lambda=w$ hat, die in den Intervallen

(13)
$$a^2>u>b^2>v>c^2>w$$

liegen. Umgekehrt: Wählt man für λ drei Werte u, v, w, die diesen Intervallen angehören, so gehören dazu nach (12) drei konfokale Flächen zweiter Ordnung, nämlich:

(14)
$$\left\{\begin{aligned}&\frac{x^2}{a^2-u}+\frac{y^2}{b^2-u}+\frac{z^2}{c^2-u}=1,\\&\frac{x^2}{a^2-v}+\frac{y^2}{b^2-v}+\frac{z^2}{c^2-v}=1,\\&\frac{x^2}{a^2-w}+\frac{y^2}{b^2-w}+\frac{z^2}{c^2-w}=1,\end{aligned}\right.$$

die insgesamt acht reelle Schnittpunkte haben, von denen in jedem der von den Koordinatenebenen begrenzten Oktanten des Raumes je einer liegt, und zwar sind alle acht Punkte dabei symmetrisch zu den Koordinatenebenen angeordnet. Denn die Gleichungen (14) haben ja die Auflösungen hinsichtlich x^2, y^2, z^2:

(15)
$$\left\{\begin{aligned}x^2&=\frac{(a^2-u)(a^2-v)(a^2-w)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\\y^2&=\frac{(b^2-u)(b^2-v)(b^2-w)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},\\z^2&=\frac{(c^2-u)(c^2-v)(c^2-w)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)},\end{aligned}\right.$$

die in der Tat alle drei positiv sind, weil u, v, w in den Intervallen (13) liegen. Um die Voraussetzungen der allgemeinen Theorie zu erfüllen, wollen wir uns zunächst auf den Oktanten des Raumes beschränken, in dem x, y, z sämtlich positiv sind. Dann wissen wir: Greift man eines der konfokalen zweischaligen Hyperboloide, eines der konfokalen einschaligen Hyperboloide und eines der konfokalen Ellipsoide nach Belieben heraus, so haben sie in diesem Oktanten einen und nur einen gemeinsamen Punkt P oder (x, y, z). Die Gesamtheit der konfokalen Flächen zweiter Ordnung bildet demnach ein dreifaches Flächensystem. Ein beliebiger Punkt P oder (x, y, z) des Oktanten läßt sich daher auch durch die drei Werte u, v, w von λ festlegen, zu denen die

drei durch P gehenden Flächen zweiter Ordnung gehören. Man nennt u, v, w elliptische Koordinaten des Raumes[1], vgl. die elliptischen Koordinaten u und v in der Ebene im 5. Beispiele I, S. 148.

Das Flächensystem ist orthogonal. Denn die erste Gleichung (15) gibt nach v bzw. w differenziert:

$$2xx_v = -\frac{(a^2-w)(a^2-u)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \qquad 2xx_w = -\frac{(a^2-u)(a^2-v)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}.$$

Multiplikation beider Formeln und Einsetzen des Wertes von x^2 aus (15) liefert:

$$x_v x_w = \frac{1}{4}\frac{a^2-u}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}.$$

Durch gleichzeitige zyklische Vertauschung von x, y, z und von a, b, c gehen hieraus die Werte von $y_v y_w$ und $z_v z_w$ hervor, und man erkennt sofort, daß

$$x_v x_w + y_v y_w + z_v z_w = 0$$

ist. Dies aber ist die erste Bedingung der Orthogonalität, nach Satz 78; daß die beiden anderen auch erfüllt sind, liegt auf der Hand.

Aus Satz 79 folgern wir somit, daß alle diese konfokalen Flächen zweiter Ordnung einander in ihren Krümmungskurven schneiden.

Beispielsweise kann man hiernach die Krümmungskurven des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a^2>b^2>c^2) \tag{16}$$

dadurch bestimmen, daß man das Ellipsoid mit allen konfokalen zwei- und einschaligen Hyperboloiden schneidet. Dies Ellipsoid (16) gehört zu den Flächen (w) des dreifachen Flächensystems, und zwar zu dem Werte $w = 0$, wie die letzte Gleichung (14) zeigt. Die Krümmungskurven der einen Schar auf dem Ellipsoid (16) sind somit die Schnittkurven mit allen einfach unendlich vielen konfokalen zweischaligen Hyperboloiden

$$\frac{x^2}{a^2-u}+\frac{y^2}{b^2-u}+\frac{z^2}{c^2-u}=1 \qquad (a^2>u>b^2) \tag{17}$$

und die der zweiten Schar die Schnittkurven mit allen einfach unendlich vielen konfokalen einschaligen Hyperboloiden

$$\frac{x^2}{a^2-v}+\frac{y^2}{b^2-v}+\frac{z^2}{c^2-v}=1 \qquad (b^2>v>c^2). \tag{18}$$

Die Beschränkung auf einen Oktanten des Raumes ist nicht mehr nötig.

Wegen $a^2>b^2>c^2$ ist die xz-Ebene die Ebene der größten und kleinsten Achse des Ellipsoids (16). Die senkrechten Projektionen der Krümmungskurven auf diese Ebene ergeben sich, dargestellt durch eine Gleichung zwischen x und z, wenn man y aus (17) und (18) durch Einsetzen des aus (16) für y^2 hervorgehenden Wertes eliminiert. Es kommt:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2(a^2-u)}x^2+\frac{c^2-b^2}{c^2(c^2-u)}z^2=1 \qquad (a^2>u>b^2) \tag{19}$$

und

$$\frac{a^2-b^2}{a^2(a^2-v)}x^2+\frac{c^2-b^2}{c^2(c^2-v)}z^2=1 \qquad (b^2>v>c^2). \tag{20}$$

[1] Nach Lamé, vgl. die Anm. zu I S. 148.

Die Gleichungen (19) und (20) stellen für alle erlaubten Werte von u und v Ellipsen dar, deren Achsen auf der x-Achse und z-Achse liegen.

Man sieht ebenso leicht ein, daß die senkrechten Projektionen der Krümmungskurven der ersten bzw. zweiten Schar auf die Ebene der größten und der mittleren Achse des Ellipsoids, d. h. auf die xy-Ebene, Hyperbeln bzw. Ellipsen sind, während es sich bei der senkrechten Projektion auf die Ebene der mittleren und der kleinsten Achse, d. h. auf die yz-Ebene, gerade umgekehrt verhält. Auch hier liegen die Achsen der Kegelschnitte auf den Koordinatenachsen. Als Projektionen der reellen Krümmungskurven des Ellipsoids kommen von den Hyperbeln immer nur diejenigen Teile in Betracht, die innerhalb der Ellipsen liegen, in denen die xy-Ebene bzw. yz-Ebene das Ellipsoid schneiden.[1]

§ 13. Haupttangentenkurven.

Wie wir zu Beginn des 11. Paragraphen auf S. 212 zu den Krümmungskurven kamen, gelangen wir jetzt zu den sogenannten Haupttangentenkurven einer Fläche, wenn wir in der damaligen Betrachtung die Hauptkrümmungsrichtungen durch die Richtungen der Haupttangenten ersetzen.

Eine Haupttangentenkurve ist daher jede Flächenkurve, deren Tangenten überall Haupttangenten der Fläche sind. Da die Haupttangenten eines gewöhnlichen Flächenpunktes nach S. 164 die Asymptoten der zugehörigen Indikatrix sind, heißen die Haupttangentenkurven auch Asymptotenkurven. Nach S. 143 kann man die Haupttangentenkurven auch als diejenigen Kurven bezeichnen, deren Tangenten sämtlich die Fläche in höherer als erster Ordnung berühren.

Nach (7), S. 146, werden die Fortschreitungsrichtungen (k) der Haupttangenten eines Flächenpunktes (u, v) durch die Bedingung

$$L + 2Mk + Nk^2 = 0$$

gegeben, die, wenn k durch $dv:du$ ersetzt wird, die Form

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0 \tag{1}$$

annimmt. Dies also ist nach S. 13 die Differentialgleichung der Haupttangentenkurven.

Nur für Flachpunkte wird die Gleichung (1) eine Identität, vgl. S. 146. Nach Satz 23 sind daher die Ebenen die einzigen

[1]) Nicht durch Anwendung des ihm ja noch nicht bekannten Satzes 79, sondern durch Integration der Differentialgleichung hat Monge in seiner „Application" zuerst die Krümmungskurven des Ellipsoids bestimmt. Ebenda hat er gezeigt, wie man die Projektionen auf die drei Achsenebenen konstruieren kann, und sorgfältige Figuren hinzugefügt (Tafel I und II). Ein Modell des Ellipsoids mit seinen Krümmungskurven findet sich im Verlage von Schilling, in Leipzig.

Flächen, auf denen jede Kurve eine Haupttangentenkurve ist. Ferner definiert (1) nach S. 14 nur eine einfach unendliche Kurvenschar, wenn $LN - M^2$ auf der Fläche verschwindet. Nach Satz 28, S. 157, haben also nur die abwickelbaren Flächen — abgesehen von den Ebenen selbst — bloß eine einfach unendliche Schar von Haupttangentenkurven.

In allen anderen Fällen dagegen definiert (1) zwei einfach unendliche Scharen von Haupttangentenkurven. Diese Kurven bilden somit ein Kurvennetz. Durch jeden Punkt gehen zwei Kurven des Netzes nach verschiedenen Richtungen, abgesehen von denjenigen Punkten, in denen $LN - M^2$ etwa verschwindet, d. h. von den parabolischen Punkten. In ihnen berühren die Netzkurven einander.

Da die Minimalkurven nach Satz 18, S. 46, die Differentialgleichung

$$E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 = 0$$

haben, diese Gleichung aber mit (1) nach S. 159 nur dann eine Wurzel $dv:du$ gemein hat, wenn es sich um außergewöhnliche Punkte handelt, kann also eine Minimalkurve nur dann eine Haupttangentenkurve sein, wenn sie aus lauter außergewöhnlichen Punkten der Fläche besteht. Nach Satz 12, S. 131, hat eine Fläche überall außergewöhnliche Punkte, die nicht insbesondere Nabelpunkte sind, wenn die Fläche eine, aber auch nur eine Schar von Minimalgeraden enthält. Diese Minimalgeraden bilden alsdann die eine Schar von Haupttangentenkurven. Reelle Flächen von dieser Art gibt es nicht. Zu den außergewöhnlichen Punkten gehören aber auch die Nabelpunkte, die auch auf reellen Flächen vorkommen können. Nach Satz 8, S. 128, sind die Kugeln die einzigen Flächen, auf denen beide Scharen von Haupttangentenkurven aus Minimalgeraden bestehen. Von den in jenem Satze genannten Ebenen ist hierbei abzusehen, da auf ihnen, wie wir sahen, jede Kurve eine Haupttangentenkurve vorstellt.

Im reellen Falle sind die Haupttangenten eines elliptischen Punktes imaginär, eines parabolischen Punktes reell zusammenfallend und eines hyperbolischen Punktes reell verschieden, vgl. S. 149 u. f. und 162 u. f. Mithin hat eine nicht-abwickelbare reelle Fläche nur im Gebiete der hyperbolischen Punkte ein reelles Netz von Haupttangentenkurven. Werden die elliptischen Punkte von den hyperbolischen durch eine Kurve getrennt, so besteht diese Grenzlinie aus lauter parabolischen Punkten und ist selbst auch eine Haupttangentenkurve. Beispielsweise sind die

Haupttangentenkurven auf einem reellen Ellipsoid, zweischaligen Hyperboloid und elliptischen Paraboloid imaginär, dagegen auf einem reellen einschaligen Hyperboloid und hyperbolischen Paraboloid reell. Hierdurch unterscheiden sich die Haupttangentenkurven von den Krümmungskurven, die auf einer reellen Fläche nach Satz 69, S. 215, stets reell sind.

Die Parameterlinien (v) bzw. (u) selbst sind Haupttangentenkurven, wenn die Gleichung (1) durch $dv = 0$ bzw. $du = 0$ befriedigt wird, d. h. wenn $L = 0$ bzw. $N = 0$ ist. Also haben wir den

Satz 80: Die Parameterlinien (v) bzw. (u) einer Fläche sind nur dann Haupttangentenkurven, wenn die Fundamentalgröße L bzw. N überall gleich Null ist.

Nach Satz 55, S. 194, sind die Haupttangenten eines Flächenpunktes die zu sich selbst konjugierten Tangenten. Sind also P und Q unendlich benachbarte Punkte einer Haupttangentenkurve, so schneiden die zu P und Q gehörigen Tangentenebenen der Fläche einander in der Tangente PQ der Kurve. Daher hat die abwickelbare Fläche, die alle Tangentenebenen einhüllt, die den Punkten der Kurve zukommen, diese Kurve selbst zur Gratlinie, vgl. Satz 11, I S. 380. Diese Tangentenebenen sind demnach zugleich Schmiegungsebenen der Kurve. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Kurve keine Gerade sei (vgl. I S. 222). Somit haben wir den

Satz 81: Die krummen Haupttangentenkurven einer Fläche sind diejenigen Flächenkurven, deren Schmiegungsebenen zugleich in ihren Berührungspunkten die Tangentenebenen der Fläche sind.

Was die etwa auf der Fläche vorhandenen geraden Linien betrifft, so weiß man, daß sie die Fläche in höherer als erster Ordnung berühren. Also folgt:

Satz 82: Jede Gerade, die einer Fläche angehört, ist eine Haupttangentenkurve der Fläche.

Nebenbei bemerkt: Minimalkurven zweiter Ordnung (vgl. I S. 242, 243) sind als Haupttangentenkurven ausgeschlossen, denn eine derartige Kurve hat ja als einzige Schmiegungsebene eine Minimalebene. Nach Satz 81 müßten also ihre Punkte Minimalpunkte der Fläche (vgl. S. 23) sein. Solche Punkte aber wurden grundsätzlich beiseite gelassen.

Betrachten wir eine krumme Haupttangentenkurve, die keine Minimalkurve (erster Ordnung) ist. Nach Satz 81 fallen ihre Binor-

malen mit den Flächennormalen zusammen. Sind also P und Q zwei unendlich benachbarte Punkte der Kurve, ist ihr Bogenelement PQ gleich ds und bilden die Flächennormalen von P und Q miteinander den Winkel $d\vartheta$, so ist $d\vartheta : ds$ nach (27), I S. 235, die **Torsion** der Haupttangentenkurve im Punkte P. Da nun die Haupttangente von P zu sich selbst konjugiert ist, ergibt sich aus Satz 64, S. 208, daß

$$\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^4 = \left(\frac{1}{R_1 R_2}\right)^2$$

ist, wenn P einen gewöhnlichen Flächenpunkt bedeutet. Demnach ist die Torsion der Haupttangentenkurve gleich $1 : \sqrt{R_1 R_2}$. Die Quadratwurzel hat jedoch zwei entgegengesetzt gleiche Werte. Indem wir dasselbe Ergebnis auf einem andern Wege noch einmal ableiten, werden wir erkennen, daß die Torsionen der beiden durch P gehenden Haupttangentenkurven einander entgegengesetzt gleich sind.

Wir betrachten zu diesem Zwecke eine Fläche, die zwei verschiedene Scharen von Haupttangentenkurven hat, sehen also nach S. 233 von den abwickelbaren Flächen ab. Wir nehmen ferner an, die Haupttangentenkurven seien keine Minimalkurven, lassen also auch die Flächen mit nur einer Schar von Minimalgeraden und die Kugeln beiseite. Alsdann wählen wir die Haupttangentenkurven als die Parameterlinien der Fläche. Dies bedeutet nach Satz 80, daß die Fundamentalgrößen L und N gleich Null anzunehmen sind. Ferner seien α, β, γ die Richtungskosinus der Tangente, l, m, n die der Hauptnormale und λ, μ, ν die der Binormale der Haupttangentenkurve (v) im Punkte P oder (u, v). Nach (10), S. 34 ist

$$\alpha = \frac{x_u}{\sqrt{E}}, \quad \beta = \frac{y_u}{\sqrt{E}}, \quad \gamma = \frac{z_u}{\sqrt{E}}. \tag{2}$$

Nach Satz 81 ist die Hauptnormale die zur Tangente der Parameterlinie (v) senkrechte Flächentangente. Ihre Fortschreitungsrichtung (k) ergibt sich nach Satz 13, S. 39, wenn wir darin $k_1 = 0$ (wegen $dv = 0$) und $k_2 = k$ setzen. Es kommt:

$$E + Fk = 0,$$

also $k = -E : F$. Nach (20), S. 39, hat daher die Hauptnormale die Richtungskosinus:

$$l = \varepsilon \frac{F x_u - E x_v}{D\sqrt{E}}, \quad m = \varepsilon \frac{F y_u - E y_v}{D\sqrt{E}}, \quad n = \varepsilon \frac{F z_u - E z_v}{D\sqrt{E}}. \tag{3}$$

Hier haben wir einen Faktor $\varepsilon = \pm 1$ hinzufügen müssen, weil die Hauptnormale noch nicht orientiert worden ist. Die Binormale

schließlich fällt mit der Flächennormale zusammen, deren Richtungskosinus X, Y, Z sind. Wir haben also noch

$$(4) \qquad \lambda = \eta X, \quad \mu = \eta Y, \quad \nu = \eta Z,$$

wo wieder η eine der beiden Zahlen ± 1 ist. Setzen wir die Werte (2), (3) und (4) in II (D) ein, so kommt:

$$(5) \qquad -\frac{\varepsilon\eta}{D} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 1$$

oder wegen XI (L) einfach

$$(6) \qquad -\varepsilon\eta = 1.$$

Demnach ist $\eta = -1 : \varepsilon = -\varepsilon$ und daher statt (4):

$$(7) \qquad \lambda = -\varepsilon X, \quad \mu = -\varepsilon Y, \quad \nu = -\varepsilon Z.$$

Nach III (C) ist ferner, wenn $1 : \varrho$ die Torsion der betrachteten Haupttangentenkurve (v) bedeutet:

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{l}{\varrho}.$$

Dabei ist $d\lambda$ der Zuwachs von λ längs der Kurve (v), also gleich $\lambda_u du$, und ds das Bogenelement der Kurve (v), das auf S. 36 mit $d_u s$ bezeichnet wurde und nach (15) ebenda gleich $\sqrt{E}\,du$ ist. Also kommt

$$\frac{\lambda_u}{\sqrt{E}} = \frac{l}{\varrho}$$

oder nach (7) und (3):

$$(8) \qquad \frac{1}{\varrho} = -\frac{D X_u}{F x_u - E x_v}.$$

Ganz entsprechend kann man die Torsion $1 : \varrho$ der anderen Haupttangentenkurve (u) berechnen. Dabei braucht man in den Formeln (2), (3) und (4) nur u mit v und dementsprechend E mit G zu vertauschen. Statt (5) kommt dann aber:

$$-\frac{\varepsilon\eta}{D} \begin{vmatrix} x_v & y_v & z_v \\ x_u & y_u & z_u \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 1$$

Die hier auftretende Determinante ist entgegengesetzt gleich der in (5). Deshalb folgt jetzt weiter statt (6):

$$+\varepsilon\eta = 1,$$

also $\eta = \varepsilon$, so daß statt (7)

$$\lambda = \varepsilon X, \quad \mu = \varepsilon Y, \quad \nu = \varepsilon Z$$

hervorgeht. Daher ergibt sich weiterhin für die Torsion die Formel, die aus (8) hervorgeht, wenn man nicht nur u mit v und E mit G vertauscht, sondern auch das Vorzeichen ändert:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{D X_v}{F x_v - G x_u}. \tag{9}$$

Nach (1) und (2) auf S. 197 ist nun weiterhin, weil L und N, wie gesagt, den Wert Null haben:

$$X_u = \frac{M}{D^2}(F x_u - E x_v), \quad X_v = \frac{M}{D^2}(F x_v - G x_u).$$

Einsetzen dieser Werte in (8) und (9) gibt die beiden Torsionen

$$-\frac{M}{D} \quad \text{und} \quad +\frac{M}{D},$$

also entgegengesetzt gleiche Werte. Falls der betrachtete Punkt (u, v) ein gewöhnlicher ist, läßt sich ihr Produkt, da $L = N = 0$ ist, nach (26), S. 135, in der Form

$$\frac{1}{R_1 R_2}$$

darstellen, wo R_1 und R_2 die beiden Hauptkrümmungsradien sind.

Dies gestattet uns, das Produkt auch in dem Falle darzustellen, wo die Haupttangentenkurven nicht gerade als die Parameterlinien gewählt worden sind. Denn allgemein ist nach der angeführten Formel

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{LN - M^2}{D^2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Mithin gilt der

Satz 83:[1] Die Torsionen, die den beiden durch einen Flächenpunkt (u, v) gehenden Haupttangentenkurven ebenda zukommmen, sind einander entgegengesetzt gleich, und ihr Produkt hat den Wert:

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

[1] Dieser Satz wurde allerdings von Enneper 1870 in den Göttinger Nachrichten in der Abhandlung „Über asymptotische Linien“ bewiesen. Aber Loria hat in der Bibliotheca math., 3. Folge, 2. Bd., 1901, darauf aufmerksam gemacht, daß es nicht recht ist, den Satz, wie es zu geschehen pflegt, als den Enneperschen zu bezeichnen, da er schon früher von Beltrami, nämlich in der Abhandlung „Dimostrazione di due formole del sig. Bonnet“, Giornale di Matem. 4. Bd. (1866), bewiesen worden ist.

Vorausgesetzt wird dabei, daß durch den betrachteten Punkt überhaupt zwei krumme Haupttangentenkurven gehen, die keine Minimalkurven sind.

Und im besonderen:

Satz 84: Sind die Parameterlinien (v) und (u) einer Fläche Haupttangentenkurven, so daß die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L und N überall gleich Null sind, so haben die Kurven (v) und (u) in einem gemeinsamen Punkte (u, v) die Torsionen

$$-\frac{M}{D} \text{ und } \frac{M}{D},$$

falls ihnen überhaupt dort Torsionen zukommen.

Natürlich ist dabei stillschweigend vorausgesetzt, daß die Tangenten der Parameterlinien wie auf S. 34f. dadurch orientiert worden seien, daß $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ einwertig und zwar insbesondere im reellen Falle positiv angenommen werden, so daß ihre Richtungskosinus

$$\frac{x_u}{\sqrt{E}}, \frac{y_u}{\sqrt{E}}, \frac{z_u}{\sqrt{E}} \text{ bzw. } \frac{x_v}{\sqrt{G}}, \frac{y_v}{\sqrt{G}}, \frac{z_v}{\sqrt{G}}$$

ebenfalls einwertig werden.

In den Sätzen ist betont worden, daß sie sich nur auf Fälle beziehen, wo den Haupttangentenkurven wirklich Torsionen zukommen. Das ist ja nicht immer der Fall, z. B. nicht auf den geradlinigen Flächen, auf denen die eine Schar der Haupttangentenkurven nach Satz 82 aus den Geraden der Fläche besteht. Diese Flächen bieten uns in betreff der anderen Schar von Haupttangentenkurven etwas Besonderes dar, weshalb wir sie in einem Beispiele behandeln wollen.

1. Beispiel: Es liege eine nicht-abwickelbare geradlinige Fläche vor. Ihre Geraden sollen keine Minimalgeraden sein. Sie bilden die eine Schar von Haupttangentenkurven. Hat die Fläche zwei Geradenscharen, ist sie also nach Satz 30, S. 158, eine Fläche zweiter Ordnung, so besteht auch die zweite Schar von Haupttangentenkurven aus lauter Geraden. Im allgemeinen dagegen ist die zweite Schar krummlinig. Um sie zu bestimmen, können wir so verfahren: Nach (2), I S. 367, sind

$$(10) \qquad x = \varphi(u) + v f(u), \qquad y = \chi(u) + v g(u), \qquad z = \psi(u) + v h(u)$$

die Gleichungen einer allgemeinen geradlinigen Fläche. Berechnen wir hier L, M, N nach (11), S. 122, so ergibt sich, daß DL eine ganze quadratische Funktion von v ist, deren Koeffizienten noch u enthalten, daß ferner DM nur von u abhängt und $DN = 0$ ist, so daß sich von der Differentialgleichung (1) zunächst die Gleichung $du = 0$ absondert, die aussagt, daß die geradlinigen Erzeugenden (u) der Fläche Haupttangentenkurven sind. Außerdem bleibt

dann für die zweite Schar der Haupttangentenkurven eine Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{dv}{du} = A(u) + B(u)v + C(u)v^2,$$

d. h. nach I S. 291 eine Riccatische Differentialgleichung. Wir wissen nach I S. 292, daß vier beliebige Lösungen

(11) $$v = \omega_1(u), \quad v = \omega_2(u), \quad v = \omega_3(u), \quad v = \omega_4(u)$$

dieser Gleichung ein konstantes Doppelverhältnis haben. Wenn wir nun — was wir tun dürfen — voraussetzen, daß in den Gleichungen (10) der Fläche die Größen f, g, h die Richtungskosinus der geradlinigen Erzeugenden sind, so bedeutet v den Abstand des Punktes (u, v) der Fläche von der Flächenkurve:

$$x = \varphi(u), \quad y = \chi(u), \quad z = \psi(u),$$

und zwar gemessen auf der durch den Punkt (u, v) gehenden Erzeugenden. Mithin folgt, daß die vier Haupttangentenkurven (11) solche vier Strecken v auf jeder Erzeugenden abschneiden, die ein auf der ganzen Fläche konstantes Doppelverhältnis haben. Oder nach Satz 52, I S. 449:

Satz 85[1]: Auf einer nicht-abwickelbaren geradlinigen Fläche, deren Geraden keine Minimalgeraden sind, bilden die Erzeugenden selbst die eine Schar von Haupttangentenkurven, während die andere Schar so verläuft, daß irgend welche vier Kurven dieser zweiten Schar alle Erzeugenden in demselben Doppelverhältnisse schneiden.

Daraus folgt insbesondere, daß die beiden Geradenscharen auf einer nicht-abwickelbaren Fläche zweiter Ordnung sich so kreuzen, daß vier Geraden der einen alle Geraden der anderen in demselben Doppelverhältnisse schneiden, vorausgesetzt, daß diese zweite Schar nicht aus Minimalgeraden besteht.

Weil der Begriff der Torsion bei den geraden Linien fehlt, da sie keine bestimmten Schmiegungsebenen haben (vgl. I S. 222), kommt auch der Satz 83 für die geradlinigen Haupttangentenkurven nicht in Betracht. Aber wenn man in diesem Falle definiert, daß die Flächennormalen die Binormalen der Geraden heißen sollen, könnte man doch den Satz aufrecht erhalten. Wir beschränken uns jedoch auf diese Andeutung.

Zu den geradlinigen Flächen gehören die gemeinen Schraubenflächen, vgl. das 2. Beispiel, S. 73:

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = qv.$$

Hier ist der Satz 85 trivial, denn nach S. 136 ist $L = N = 0$, so daß die Parameterlinien selbst nach Satz 80 die Haupttangentenkurven sind. Die Kurven (v) sind die Erzeugenden der Fläche und die Kurven (u) lauter gemeine Schraubenlinien, nämlich die in Fig. 27 und 28, S. 74 und 75, angedeuteten. Hier tritt der besondere Fall ein, daß beide Scharen von Haupttangentenkurven ein Orthogonalsystem bilden.

Allgemein wollen wir die Frage aufwerfen, wann auf einer Fläche, auf der zwei und nur zwei verschiedene Scharen von Haupttangentenkurven vorkommen, diese Kurven ein Orthogonalsystem

[1]) P. Serret, „Théorie nouvelle géométrique et mécanique des courbes à double courbure", Paris 1860.

bilden. Wir sehen dabei also von den abwickelbaren Flächen, den Flächen mit einer und nur einer Schar von Minimalgeraden und den Kugeln ab, so daß ein beliebiger Punkt (u, v) der Fläche zugleich ein gewöhnlicher Punkt ist. Da die Haupttangenten die Asymptoten der Indikatrix-Kegelschnitte sind, tritt der gesuchte Fall nur dann ein, wenn die Indikatrizen aus gleichseitigen Hyperbeln bestehen, also die beiden Hauptkrümmungsradien einander entgegengesetzt gleich sind, nach (8), S. 161. Also gilt der

Satz 86: Die Haupttangentenkurven einer Fläche bilden ein Orthogonalsystem, wenn überall die Summe der beiden Hauptkrümmungsradien gleich Null ist. Dabei wird von den abwickelbaren Flächen, den Flächen mit einer und nur einer Schar von Minimalgeraden und den Kugeln abgesehen.

2. Beispiel: Außer den gemeinen Schraubenflächen, die nach dem 1. Beispiele hierher gehören, erwähnen wir noch die Katenoide. Nach Satz 20, S. 143, sind die Katenoide die einzigen Rotationsflächen mit einem Orthogonalsystem von Haupttangentenkurven, wenn wir wie immer (vgl. S. 48) voraussetzen, daß die Flächenachse keine Minimalgerade sei. Die Gleichungen eines Katenoids können wir, wenn wir die Leitlinie der Kettenlinie, d. h. die Rotationsachse, als z-Achse wählen, so schreiben:

$$x = \frac{1}{2} a (e^u + e^{-u}) \cos v, \qquad y = \frac{1}{2} a (e^u + e^{-u}) \sin v, \qquad z = a u,$$

wo a eine Konstante bedeutet. Nach (11), S. 122, ist hier:

$$L = -N, \qquad M = 0,$$

also die Differentialgleichung (1) der Haupttangentenkurven:

$$d u^2 - d v^2 = 0.$$

Sie zerfällt in

$$d u + d v = 0 \qquad \text{und} \qquad d u - d v = 0.$$

Demnach sind die Kurven

$$u + v = \text{konst.}, \qquad u - v = \text{konst.}$$

die Haupttangentenkurven, und sie bilden ein Orthogonalsystem.

§ 14. Netze von konjugierten Kurven.

Wenn man eine Fläche mit zwei Scharen von je einfach unendlich vielen Kurven in der Art überzieht, daß in jedem Punkte der Fläche die hindurchgehenden Kurven der beiden Scharen konjugierte Richtungen haben, liegt ein Netz von konjugierten Kurven vor. Nach Satz 57, S. 195, werden alsdann in jedem gewöhnlichen Punkte der Fläche die Tangenten der beiden hindurch-

gehenden Kurven harmonisch durch die beiden Haupttangenten getrennt. Bewegt sich ein Punkt längs einer Kurve der einen Schar, so dreht sich dabei seine Tangentenebene nach S. 192 um die jeweilige Tangente der durch ihn gehenden Kurve der anderen Schar. Oder auch: Die Tangentenebenen längs einer Kurve der einen Schar erzeugen eine Tangentenfläche oder Kegel- oder Zylinderfläche, deren Geraden die Tangenten der Kurven der anderen Schar in ihren Schnittpunkten mit jener einen Kurve sind. (Siehe Fig. 82.)

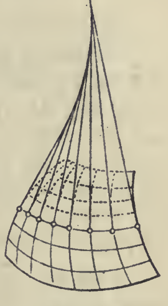


Fig. 82.

Nach den Erörterungen auf S. 192 hat der Begriff der konjugierten Kurven nur auf den Tangentenflächen, Kegeln und Zylindern keine bestimmte Bedeutung, weil hier die eine Kurvenschar die der Erzeugenden sein muß, während die andere Schar ganz beliebig sein kann. Insbesondere können wir in der Ebene jedes Netz von Kurven als konjugiert bezeichnen, da alle ihre Punkte Flachpunkte sind, vgl. S. 191. Auf einer beliebigen Fläche sind die Krümmungskurven nach Satz 54, S. 194, zueinander konjugiert; auch sind die Hauptangentenkurven jeder einzelnen Schar zu sich selbst konjugiert, nach Satz 55, ebenda. Umgekehrt: wenn die beiden konjugierten Scharen zusammenfallen, bilden sie notwendig eine Schar von Haupttangentenkurven.

Fragen wir uns, wann eine Differentialgleichung von der Form (vgl. S. 13)

$$(1) \qquad A(u,v)\,du^2 + 2\,B(u,v)\,du\,dv + C(u,v)\,dv^2 = 0 \quad .$$

ein Netz von konjugierten Kurven definiert. Die Gleichung liefert für jeden Punkt (u, v) der Fläche die Werte k_1 und k_2 für die Richtungen $(dv : du)$ der beiden durch ihn gehenden Kurven, so daß

$$A + 2\,B\,k_1 + C\,k_1^2 = 0, \qquad A + 2\,B\,k_2 + C\,k_2^2 = 0$$

ist. Nach (3), S. 191, ist zu fordern, daß diese Gleichungen die Gleichung

$$(2) \qquad L + M(k_1 + k_2) + N\,k_1\,k_2 = 0$$

nach sich ziehen. Da nun

$$k_1 + k_2 = -\frac{2\,B}{C}, \qquad k_1\,k_2 = \frac{A}{C}$$

ist, ergibt sich:

Satz 87: Die durch die Differentialgleichung

$$A(u,v)\,du^2 + 2\,B(u,v)\,du\,dv + C(u,v)\,dv^2 = 0$$

definierten beiden Kurvenscharen auf einer Fläche sind zueinander konjugiert, wenn die Koeffizienten A, B, C mit den Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L, M, N durch die Bedingung

$$LC - 2MB + NA = 0$$

verknüpft sind.

Allerdings haben wir oben stillschweigend $C \neq 0$ angenommen. Ist $C = 0$, aber $A \neq 0$, so kommen wir zu demselben Ergebnisse, wenn wir statt $dv : du$ das Verhältnis $du : dv$ benutzen. Im Falle $A = C = 0$ ist (1) die Differentialgleichung $du\,dv = 0$ der Parameterlinien (u) und (v), für die $k_1 = \infty$, $k_2 = 0$ wird, so daß sich die Bedingung (2) hier — nach Division mit k_1 — auf $M = 0$ reduziert. So kommen wir zu folgendem Satze, der übrigens doch bloß ein besonderer Fall des Satzes 87 ist:

Satz 88: Die Parameterlinien (u) und (v) einer Fläche sind dann und nur dann zueinander konjugiert, wenn die Fundamentalgröße zweiter Ordnung M gleich Null ist.

Nach (11), S. 122, lautet diese Bedingung $M = 0$ ausführlich geschrieben so:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

Ist sie erfüllt, so gibt es drei nicht sämtlich verschwindende Funktionen α, β, γ von u und v derart, daß gleichzeitig

$$\alpha x_{uv} + \beta x_u + \gamma x_v = 0,$$
$$\alpha y_{uv} + \beta y_u + \gamma y_v = 0,$$
$$\alpha z_{uv} + \beta z_u + \gamma z_v = 0$$

ist, weil dies drei lineare homogene Gleichungen für α, β, γ sind, deren Determinante gleich Null ist. Wäre $\alpha = 0$, so wären x_u, y_u, z_u proportional zu x_v, y_v, z_v, d. h. die Funktionaldeterminante von je zweien der Funktionen x, y, z wäre gleich Null, was nach S. 6 auszuschließen ist. Da also $\alpha \neq 0$ ist, folgt, wenn $-\beta : \alpha$ mit A und $-\gamma : \alpha$ mit B bezeichnet wird: Sind die Parameterkurven zueinander konjugiert, so gibt es zwei Funktionen $A(u,v)$ und $B(u,v)$ derart, daß:

$$x_{uv} = A x_u + B x_v,$$
$$y_{uv} = A y_u + B y_v,$$
$$z_{uv} = A z_u + B z_v$$

ist. Umgekehrt, wenn derartige drei Gleichungen gelten, folgt aus ihnen wieder die Gleichung (3). Mithin können wir sagen:

Satz 89:[1] Die Parameterkurven (u) und (v) einer Fläche

$$x = \varphi(u,v), \qquad y = \chi(u,v), \qquad z = \psi(u,v)$$

sind dann und nur dann zueinander konjugiert, wenn die drei Funktionen φ, χ, ψ von u und v, für ϑ eingesetzt, einer und derselben Gleichung von der Form

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\, \partial v} = A(u,v)\frac{\partial \vartheta}{\partial u} + B(u,v)\frac{\partial \vartheta}{\partial v}$$

genügen, worin A und B Funktionen von u und v sind.

Eine Gleichung von der Form:

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\, \partial v} = A(u,v)\frac{\partial \vartheta}{\partial u} + B(u,v)\frac{\partial \vartheta}{\partial v}$$

mit gegebenen Funktionen A und B und unbekannter oder zu suchender Funktion ϑ ist eine Bedingung für die ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten von ϑ, also eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für ϑ.

Man kann diese Gleichung benutzen, um einige Flächenfamilien abzuleiten, deren Parameterlinien konjugiert sind, indem man nämlich für A und B besonders einfache Funktionen wählt und dann die allgemeinste Funktion ϑ zu bestimmen sucht, die der Gleichung genügt.

Beispiel: Die einfachste Annahme ist $A = B = 0$. Dann liegt die Gleichung vor:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Sie sagt aus, daß $\frac{\partial \vartheta}{\partial u}$ von v frei und $\frac{\partial \vartheta}{\partial v}$ von u frei ist, d. h. ϑ hat die Form:

$$\vartheta = U(u) + V(v).$$

Satz 89 führt uns daher zu den Flächen mit der Darstellungsform:

$$(5) \qquad x = U_1(u) + V_1(v), \qquad y = U_2(u) + V_2(v), \qquad z = U_3(u) + V_3(v).$$

---

[1] Dieser Satz, nach dem zu einem jeden Netze von konjugierten Kurven eine sogenannte Laplace'sche partielle Differentialgleichung gehört, ist von Darboux. Siehe seine „Leçons sur la théorie générale des surfaces", 1. partie, Paris 1887, S. 102.

Hier sind also U_1, U_2, U_3 Funktionen von u allein und V_1, V_2, V_3 Funktionen von v allein. Die Kurven (u) sind offenbar sämtlich durch Schiebung aus der einen Kurve

$$x = V_1(v), \quad y = V_2(v), \quad z = V_3(v)$$

ableitbar. Die Fläche (5) enthält also eine Schar von ∞^1 kongruenten und gleichgestellten Kurven. Eine solche Fläche heißt eine Schiebungsfläche oder Translationsfläche.[1]

Umgekehrt, wenn eine Kurve

$$x = V_1(v), \quad y = V_2(v), \quad z = V_3(v),$$

geschrieben in dem Parameter v, durch Schiebungen in ∞^1 Lagen gebracht werden soll, haben wir zu den Koordinaten x, y, z Größen zu addieren, die sich stetig ändern, also Funktionen U_1, U_2, U_3 eines zweiten Parameters u. So gehen die Gleichungen (5) hervor. Jede Schiebungsfläche ist daher in der Form (5) darzustellen. Sie lehrt, daß auch die Parameterkurven (v) sämtlich durch Schiebung aus der einen Kurve

$$x = U_1(u), \quad y = U_2(u), \quad z = U_3(u),$$

hervorgehen. Also kommt mit Rücksicht auf Satz 89 der

Satz 90: Jede Schiebungsfläche enthält ein Netz von zwei Scharen von kongruenten und gleichgestellten Kurven, und diese beiden Scharen sind zueinander konjugiert.

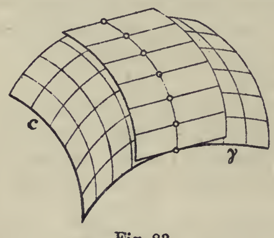


Fig. 83.

Dies letzte sieht man ebenfalls geometrisch sofort ein: Wenn eine starre Kurve c stetig verschoben wird, so daß einer ihrer Punkte eine Kurve γ beschreibt (siehe Fig. 83), so haben die Punkte der Kurve c in jeder Lage parallele Bewegungsrichtungen längs der Tangenten der durch die Punkte gehenden mit γ kongruenten Kurven in homologen Punkten. Diese Tangenten bliden einen Zylinder, d. h. eine abwickelbare Fläche, so daß Satz 58, S. 196, angewandt werden kann.

Nächst den Zylindern, die ja augenscheinlich Schiebungsflächen sind, sind die Paraboloide

$$z = a x^2 + b y^2$$

als besonders einfache Schiebungsflächen zu nennen. Denn sie lassen sich so darstellen:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = a u^2 + b v^2.$$

Die Kurven c und γ sind hier Parabeln.

---

[1] Die Schiebungsflächen wurden ausführlich untersucht von Lie, „Beiträge zur Theorie der Minimalflächen, I." Math. Annalen 14. Bd. (1879). Diese Abhandlung, auf die wir später noch zu verweisen haben, ist eine neue Bearbeitung einer älteren Abhandlung: „Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimal-Flächen, I.", Archiv for Math. og Naturvidenskab, 2. Bd. (1877).

Es kann vorkommen, daß die beiden Scharen von Kurven dieselbe analytische Darstellung haben; alsdann wird die Fläche von einer Schar von einfach unendlich vielen kongruenten und gleichgestellten Kurven doppelt überdeckt. Dieser Fall tritt ein, wenn die Funktionen U_1, U_2, U_3 von u, abgesehen von additiven Konstanten, dieselben Formen haben wie die Funktionen V_1, V_2, V_3 von v. Hierauf kommen wir sogleich nochmals zurück.

Wir bemerken noch, daß die Schiebungsfläche (5) auch auf eine andere Art erzeugt werden kann: Wir betrachten nämlich die Kurve C, die durch

$$\mathfrak{x} = 2\,U_1(u), \qquad \mathfrak{y} = 2\,U_2(u), \qquad \mathfrak{z} = 2\,U_3(u)$$

dargestellt wird, und die Kurve Γ, die durch

$$\mathfrak{x} = 2\,V_1(v), \qquad \mathfrak{y} = 2\,V_2(v), \qquad \mathfrak{z} = 2\,V_3(v)$$

dargestellt wird, ausgedrückt mittels eines Parameters u bzw. v. Jeden Punkt (u) von C verbinden wir geradlinig mit jedem Punkte (v) von Γ. Die Mitten aller Strecken sind dann durch die Gleichungen (5) gegeben. Siehe Fig. 84. Wir haben also den

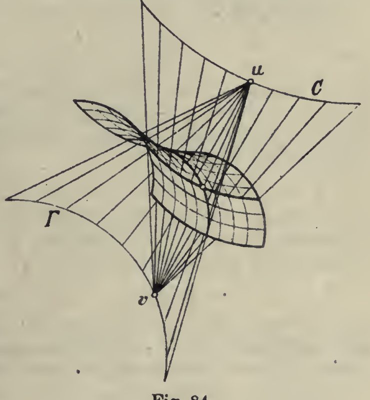


Fig. 84.

Satz 91: Die Schiebungsflächen sind identisch mit denjenigen Flächen, die von den Mitten der Verbindungsstrecken zwischen den Punkten zweier Kurven gebildet werden.

Wenn beide Kurven C und Γ durch eine einzige Kurve C ersetzt werden, ergeben sich die Flächen der Mitten der Sehnen einer Kurve. Und dies sind diejenigen Schiebungsflächen, bei denen die beiden Scharen von erzeugenden Kurven in eine einzige zusammenfallen, die aber die Fläche doppelt überdeckt, so daß durch jeden Punkt der Fläche zwei Kurven der Schar gehen. Eine derartige Fläche wird durch die Gleichungen (5) dargestellt, wenn man als Funktionen V_1, V_2, V_3 die Funktionen U_1, U_2, U_3 wählt, nachdem in ihnen der Parameter u durch v ersetzt worden ist. Es erhellt, daß alsdann die Kurve C, nämlich:

$$\mathfrak{x} = 2\,U_1(u), \qquad \mathfrak{y} = 2\,U_2(u), \qquad \mathfrak{z} = 2\,U_3(u)$$

auf der Fläche gelegen ist. Sie wird von allen ∞^1 kongruenten Kurven berührt. Denn wählt man auf ihr einen Punkt P, zieht man von ihm aus alle Geraden, die die Kurve C noch einmal treffen und halbiert man alle diese Sehnen, so bekommt man eine ähnliche Kurve im halben Maßstabe, die C in P berührt. In diesem Falle also berühren alle Parameterlinien (u) und alle Parameterlinien (v) die Kurve C. Da sie ein Netz von konjugierten Kurven bilden, und da also in jedem Punkte P von C die beiden hindurchgehenden Kurven (u)

und (v) die Kurve C berühren, ist die Tangente von C in P zu sich selbst konjugiert und also eine Haupttangente, nach Satz 55, S. 194. Mithin ist C eine Haupttangentenkurve der Fläche. Rechnerisch kann man dies aus den Gleichungen (5) — immer für den Fall, daß die Funktionen U_1, U_2, U_3 von u dieselben wie die Funktionen V_1, V_2, V_3 von v sind, deshalb nicht ableiten, weil die Parameterdarstellung der Fläche gerade für die Kurve C ausartet, da die Parameterlinien einander in den Punkten von C berühren. Es hat sich ergeben:

Satz 92: Der Ort der Mitten der Sehnen einer Kurve C ist eine Schiebungsfläche, auf der die Kurve C selbst eine Haupttangentenkurve ist. Die Kurve C wird in jedem Punkte von einer der erzeugenden Kurven der Schiebungsfläche berührt, und diese erzeugenden Kurven, die der Kurve C im halben Maßstabe ähnlich sind, überdecken die Fläche doppelt, dabei ein Netz von konjugierten Kurven bildend.

Nehmen wir z. B. als Kurve C die gemeine Schraubenlinie (vgl. (13) in I S. 211)

$$\mathfrak{x} = r\cos u, \qquad \mathfrak{y} = r\sin u, \qquad \mathfrak{z} = qu \tag{6}$$

auf dem Rotationszylinder um die z-Achse mit dem Radius r und der Schraubenhöhe $2\pi q$, so haben wir dem Parameter u zwei Werte u und v zu geben und die halben Summen aus den beiden zusammengehörigen Koordinaten zu bilden. So erhalten wir

$$x = \tfrac{1}{2}r(\cos u + \cos v), \qquad y = \tfrac{1}{2}r(\sin u + \sin v), \qquad z = \tfrac{1}{2}q(u + v) \tag{7}$$

als Gleichungen der Fläche der Mitten aller Sehnen der Schraubenlinie (6). Die Fläche enthält als Schiebungsfläche ∞^1 gleichgestellte Schraubenlinien, die alle mit der gemeinen Schraubenlinie

$$x = \tfrac{1}{2}r\cos u, \qquad y = \tfrac{1}{2}r\sin u, \qquad z = \tfrac{1}{2}qu$$

kongruent sind; übrigens liegt diese selbst nicht auf der Fläche. Jene ∞^1 Schraubenlinien überdecken die Fläche doppelt mit einem Netze von konjugierten Kurven. Benutzt man die neuen Parameter

$$\bar{u} = r\cos\tfrac{1}{2}(u - v), \qquad \bar{v} = \tfrac{1}{2}(u + v),$$

so stellt sich die Fläche (7) so dar:

$$x = \bar{u}\cos\bar{v}, \qquad y = \bar{u}\sin\bar{v}, \qquad z = q\bar{v}. \tag{8}$$

Nach (20), S. 73, ist sie also eine gemeine Schraubenfläche mit der Schraubenhöhe $2\pi q$. Die Schraubenlinie (6) liegt auf ihr und ist nach Satz 92 eine Haupttangentenkurve. (Vgl. auch das Beispiel auf S. 239.) Da der Radius r des Zylinders von C in den Gleichungen (8) nicht auftritt, kann als Kurve C irgend eine derjenigen Schraubenlinien gewählt werden, in denen die Fläche von den Rotationszylindern um ihre Achse geschnitten wird. Jede Kurve (v) auf der Fläche, die zu dieser Kurve C im halben Maßstabe ähnlich und also von der Schraubenhöhe πq ist, erfüllt nach (7) eine Gleichung:

$$(x - \tfrac{1}{2}r\cos v)^2 + (y - \tfrac{1}{2}r\sin v)^2 = \tfrac{1}{4}r^2,$$

die zeigt, daß die Kurve (v) auf einem Rotationszylinder vom Radius $\tfrac{1}{2}r$ liegt, der die z-Achse als Mantellinie enthält. Daher:

Satz 93: Jede gemeine Schraubenfläche kann auf unendlich viele Arten als Schiebungsfläche erzeugt werden.[1] Ihre Schnittkurve mit irgend einem Rotationszylinder, der die Schraubenachse als Mantellinie enthält, ist nämlich eine gemeine Schraubenlinie, deren Schraubenhöhe halb so groß wie die der Fläche ist, und die sich auf der Fläche ohne Drehung verschieben läßt. Die Kurven, in die sie dabei übergeht, berühren sämtlich eine derjenigen gemeinen Schraubenlinien der Fläche, die Haupttangentenkurven sind. Wählt man umgekehrt irgend eine der krummen Haupttangentenkurven der Fläche aus, so ist der Ort der Mitten ihrer Sehnen die Fläche selbst.

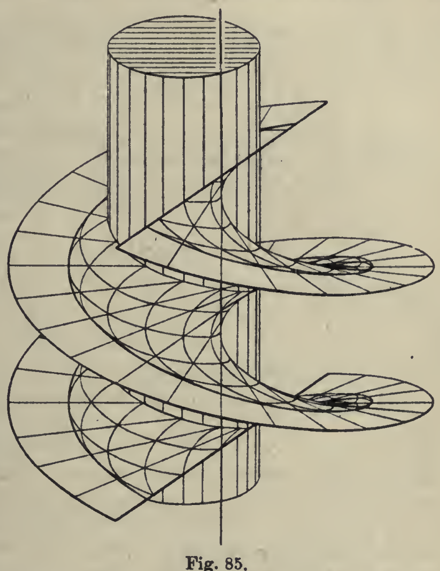


Fig. 85.

In Fig. 85 ist der Schnitt der Schraubenfläche mit einem Zylinder, der als Mantellinie die Schraubenachse enthält, dargestellt; außerdem ist die hervorgehende Schnittkurve, also eine gemeine Schraubenlinie von der halben Schraubenhöhe, auf der Fläche verschoben in mehreren Lagen wiedergegeben. Alle diese Kurven werden von einer gemeinen Schraubenlinie eingehüllt, die die ganze Schraubenhöhe hat und eine Haupttangentenkurve der Fläche ist.

[1] Es gibt noch viele andere Flächen, die ebenfalls auf unendlich viele Weisen als Schiebungsflächen erzeugt werden können; auch die auf S. 244 genannten Paraboloide gehören dazu. Außerdem gibt es Flächen, die vier oder drei verschiedene Scharen von je einfach unendlich vielen kongruenten und gleichgestellten Kurven enthalten. Alle diese Flächen hat Lie bestimmt, siehe seine Abhandlungen: „Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden“, Archiv for Math. og Naturw., 7. Bd., 1882, „Sur une interprétation nouvelle du théorème d'Abel“, Comptes rendus 94. Bd., 1892, „Über die Theorie der Translationsflächen und das Abelsche Theorem“, Leipziger Berichte 1896. Rein analytisch hat der Verf. diese Liesche Theorie von neuem entwickelt in der Arbeit „Das Abelsche Theorem und das Liesche Theorem über Translationsflächen“, Acta math. 28. Bd., 1903.

Definiert man eine einfach unendliche Schar von Flächenkurven durch eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dv}{du} = \lambda(u, v), \tag{9}$$

so kann man leicht die Differentialgleichung der konjugierten Kurvenschar

$$\frac{dv}{du} = \mu(u, v)$$

berechnen. Denn $k_1 = \lambda$ und $k_2 = \mu$ müssen die Gleichung (2) erfüllen, d. h. es muß

$$L + M(\lambda + \mu) + N\lambda\mu = 0 \tag{10}$$

sein, woraus sich

$$\mu = -\frac{L + M\lambda}{M + N\lambda}$$

ergibt, so daß

$$\frac{dv}{du} = -\frac{L + M\lambda}{M + N\lambda} \tag{11}$$

die gesuchte Differentialgleichung ist.

Ist $\Omega(u, v)$ ein Integral der Differentialgleichung (9), d. h. stellt

$$\Omega(u, v) = \text{konst.} \tag{12}$$

die erste Kurvenschar dar, so folgt aus

$$\Omega_u du + \Omega_v dv = 0,$$

daß $\lambda = -\Omega_u : \Omega_v$ sein muß. Also gibt (11) als Differentialgleichung der zur Schar (12) konjugierten Schar:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{M\Omega_u - L\Omega_v}{N\Omega_u - M\Omega_v}. \tag{13}$$

Ist die Schar (12) insbesondere die der Parameterlinien (u), also $\Omega = u$, so ergibt sich statt (13):

$$\frac{dv}{du} = -\frac{M}{N}$$

oder also:

$$M\,du + N\,dv = 0. \tag{14}$$

Ebenso ist

$$L\,du + M\,dv = 0 \tag{15}$$

die Differentialgleichung der zu den Parameterlinien (v) konjugierten Kurven.

Zu den Netzen von konjugierten Kurven kommen wir auch, wenn wir uns die Frage vorlegen, bis zu welchem Grade die

unendlich kleinen Vierecke eines Kurvennetzes als eben zu bezeichnen sind. Es seien nämlich

$$(u,v), \quad (u+du,v), \quad (u,v+dv), \quad (u+du,v+dv)$$

vier unendlich benachbarte Punkte auf der Fläche, die ein unendlich kleines Parallelogramm bilden, da ihr Viereck, unendlich vergrößert, nur unendlich wenig von einem endlichen Parallelogramm abweicht. Man vergleiche die Betrachtung in der Ebene, I S. 164. Da wir aber jetzt Betrachtungen im Raume anstellen, kann das Viereck auch windschief sein. Berücksichtigt man noch unendlich kleine Größen von höherer Ordnung als der von du und dv, so darf man die Ebene der drei Ecken

$$(u,v), \quad (u+du,v), \quad (u,v+dv)$$

nicht mit der Tangentenebene des Punktes (u,v) verwechseln, obwohl beide für $\lim du = 0$ und $\lim dv = 0$ übereinstimmen. Dies möge zunächst in Kürze dargetan werden: Die Tangentenebene des Punktes (x,y,z) oder (u,v) hat nach XI (E) die Gleichung

$$\mathsf{S}\, X(\mathfrak{x} - x) = 0$$

in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$. Da X, Y, Z die Richtungskosinus der Normale sind, stellt die linke Seite den Abstand ε eines Punktes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ von der Tangentenebene dar, wenn der Punkt der Ebene nicht angehört. Wählen wir als Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ die Stelle der Fläche mit den Parametern $u + du$, $v + dv$, so ist also ihr Abstand ε von der Tangentenebene der Stelle (u,v) gegeben durch:

$$\varepsilon = \mathsf{S}\, X\big(x(u+du, v+dv) - x(u,v)\big)$$

oder, nach Potenzen von du und dv entwickelt, durch:

$$\varepsilon = \mathsf{S}\, X\Big(x_u\, du + x_v\, dv + \frac{1}{1\,.\,2}(x_{uu}\, du^2 + 2x_{uv}\, du\, dv + x_{vv}\, dv^2) + \ldots\Big).$$

Hierin bedeutet x den Wert der Abszisse für die Stelle (u,v). Nach XI (J) sind also $\mathsf{S}\, Xx_u$ und $\mathsf{S}\, Xx_v$ gleich Null. Daher ergibt sich mit Rücksicht auf (8), S. 122:

$$(16) \qquad \varepsilon = \frac{1}{1\,.\,2}(L\, du^2 + 2\, M\, du\, dv + N\, dv^2) + \ldots,$$

wobei die Punkte Glieder von dritter und höherer Dimension in du und dv andeuten. Wie man sieht, fallen hier die Glieder zweiter Dimension nur dann fort, wenn

$$L\, du^2 + 2\, M\, du\, dv + N\, dv^2 = 0$$

ist, d. h. die Richtung $(dv : du)$ die einer Haupttangente des Punktes (u, v) ist, nach (7), S. 146. Wählt man $dv = 0$, so lehrt (16), daß der Punkt $(u + du, v)$ von der Tangentenebene des Punktes (u, v) den Abstand

$$\varepsilon = \frac{1}{1 \,.\, 2} L\, du^2 + \dots$$

hat; ebenso ergibt sich, daß der Punkt $(u, v + dv)$ von ihr den Abstand

$$\varepsilon = \frac{1}{1 \,.\, 2} N dv^2 + \dots$$

hat.

Wir wollen nun die Frage untersuchen, wie sich der Abstand des Punktes $(u + du,\ v + dv)$ von der Ebene der drei Punkte

$$(u, v), \quad (u + du, v), \quad (u, v + dv)$$

darstellt. Nach dem Vorhergehenden ist diese Frage verschieden von der Frage, wie sich der Abstand des Punktes $(u + du,\ v + dv)$ von der Tangentenebene des Punktes (u, v) darstellt. Es wird sich also nicht der Wert (16) ergeben.

Die aufgeworfene Frage greifen wir an, indem wir zunächst den Inhalt J des Tetraeders der vier Punkte

$$(u, v), \quad (u + du, v), \quad (u, v + dv), \quad (u + du,\ v + dv)$$

berechnen. Bezeichnen wir vorerst die rechtwinkligen Koordinaten der vier Punkte mit

$$x, y, z, \quad x_1, y_1, z_1, \quad x_2, y_2, z_2, \quad x_3, y_3, z_3,$$

so ist bekanntlich:

$$6J = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix}$$

Dabei erscheint der Inhalt (wie übrigens oben auch der Abstand ε) mit einem Vorzeichen behaftet.

Nun sind x_1, y_1, z_1 die Koordinaten des Punktes $(u + du, v)$. Daher ist zu setzen:

$$x_1 = x + x_u du + \frac{1}{1 \,.\, 2} x_{uu} du^2 + \dots$$

usw. Ferner entsprechend:

$$x_2 = x + x_v dv + \frac{1}{1 \,.\, 2} x_{vv} dv^2 + \dots$$

usw., dagegen:

$$x_3 = x + x_u\,du + x_v\,dv + \frac{1}{1\,.\,2}(x_{uu}\,du^2 + 2\,x_{uv}\,du\,dv + x_{vv}\,dv^2) + \dots$$

usw., so daß sich ergibt:

$$6\,J = \begin{vmatrix} x_u\,du + \frac{1}{1\,.\,2}x_{uu}\,du^2 + \dots & \cdot & \cdot \\ x_v\,dv + \frac{1}{1\,.\,2}x_{vv}\,dv^2 + \dots & \cdot & \cdot \\ x_u\,du + x_v\,dv + \frac{1}{1\,.\,2}(x_{uu}\,du^2 + 2\,x_{uv}\,du\,dv + x_{vv}\,dv^2) + \dots & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Subtrahieren wir die beiden ersten Zeilen von der dritten, und sondern wir von den beiden ersten die Faktoren du und dv ab, so kommt:

$$6\,J = \begin{vmatrix} x_u + \frac{1}{1\,.\,2}x_{uu}\,du + \dots & \cdot & \cdot \\ x_v + \frac{1}{1\,.\,2}x_{vv}\,dv + \dots & \cdot & \cdot \\ x_{uv}\,du\,dv + \dots & \cdot & \cdot \end{vmatrix} du\,dv.$$

Wenn wir nur die Glieder niedrigster, nämlich vierter Dimension wirklich ausrechnen, ergibt sich:

$$J = \tfrac{1}{6}\,du^2\,dv^2 \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix} + \dots$$

oder nach (11), S. 122:

$$J = \tfrac{1}{6}\,D\,M\,du^2\,dv^2 + \dots$$

Nach S. 45 ist ferner der Inhalt des Dreiecks der drei ersten Punkte gleich

$$\tfrac{1}{2}\,D\,du\,dv + \dots$$

Ist nun η der Abstand des vierten Punktes von der Ebene der drei ersten, so ist nach einer bekannten Formel der Stereometrie:

$$\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}\,D\,du\,dv + \dots)\,\eta = J.$$

Also kommt:

$$\eta = M\,du\,dv + \dots,$$

wobei die Punkte Glieder von höherer als zweiter Dimension andeuten. Demgegenüber haben die Seiten des Vierecks, die vom Punkte (u, v) nach den Punkten $(u + du, v)$ und $(u, v + dv)$ gehen, nach S. 34 die Längen

$$\sqrt{E}\,du + \dots, \qquad \sqrt{G}\,dv + \dots,$$

wo die Punkte Glieder von höherer als erster Dimension ersetzen. Im allgemeinen also, d. h. wenn die Seiten nicht auf Minimalkurven liegen, also $E \neq 0$ und $G \neq 0$ ist, und wenn die Seiten nicht konjugiert sind, also $M \neq 0$ ist (vgl. Satz 88), sind die Vierecksseiten von der ersten Dimension in du und dv, während der Abstand der vierten Ecke von der Ebene der drei ersten Ecken von der zweiten Dimension ist. Ist dagegen $M = 0$, d. h. sind die Vierecksseiten konjugiert, so wird der soeben erwähnte Abstand von höherer als zweiter Dimension in du und dv.

Dies Ergebnis ist von Bedeutung für die Herstellung eines Modells einer Fläche: Wird die Fläche mit einem Kurvennetze überzogen, und denkt man sich eine Vergrößerung ausgeübt, die so stark ist, daß die Längen $\sqrt{E}\,du$ und $\sqrt{G}\,dv$ der Maschenseiten endlich werden, so fragt es sich, ob man die Maschenvierecke in dem herzustellenden Modelle dieser Vergrößerung eben wählen darf. Wenn man du und dv durch Endliches ersetzt, wird man folgerichtig Unendlichkleines von der zweiten Ordnung durch Unendlichkleines von der ersten Ordnung ersetzen, so auch den Abstand η der vierten Ecke eines Maschenvierecks von der Ebene der drei andern Ecken. Wollte man aber in dem Modell diese jetzt in der ersten Ordnung unendlich kleine Strecke gar nicht zur Anschauung bringen, so müßte man auch alle Vierecke als Parallelogramme darstellen, denn die Richtungsunterschiede der Gegenseiten einer Masche sind ja auch nur unendlich klein von der ersten Ordnung und bleiben es bei der Vergrößerung, die ja die Winkel nicht ändert. Ein Vielflach aber, das aus lauter aneinandergesetzten Parallelogrammen gebildet wird, kann immer nur eine Schiebungsfläche, vgl. S. 244, veranschaulichen, da hier aneinanderstoßende Kanten der einen Art lauter kongruente und gleichgestellte Vielecke bilden. Um also ein Modell einer allgemeinen Fläche zu bekommen, ist man gezwungen, die jetzt unendlich kleinen Größen erster Ordnung durch kleine Größen zur Anschauung zu bringen, also die Vierecke wenig verschieden von Parallelogrammen zu wählen. Dann aber müßte man auch jene Abstände η in die Erscheinung bringen, also windschiefe Vielecke wählen, es sei denn, daß man ein Netz konjugierter Kurven vergrößert, denn nur hier ist η von noch höherer Ordnung unendlich klein. In einem

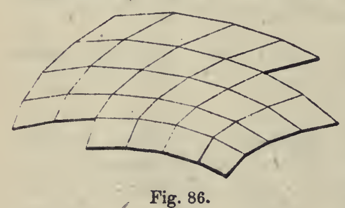


Fig. 86.

Modell, bestehend aus lauter ebenen und von Parallelogrammen unendlich wenig abweichenden Vierecken wie in Fig. 86, muß man daher notwendig die Seiten der Vierecke als die Veranschaulichung von Bogenelementen zweier konjugierter Kurvenscharen auffassen. —

Es ist sehr bemerkenswert, daß man auf einer beliebigen Fläche durch eine Konstruktion, die rechnerisch nur Differentiationen und Eliminationen verlangt, stets ein Netz von konjugierten Kurven, ja sogar unendlich viele solche Netze finden kann:

Man wähle nämlich irgend eine Gerade $\mathfrak{g}$ fest im Raume und konstruiere erstens die Kurven $\mathfrak{c}$, in denen die Fläche von allen Ebenen durch $\mathfrak{g}$ geschnitten wird, und lege zweitens von jedem Punkte der Geraden $\mathfrak{g}$ aus die Tangenten an die Fläche. Dann entstehen ∞^1 Tangentialkegel; jeder berührt die Fläche längs einer Kurve k (siehe Fig. 87). Die Kurven $\mathfrak{c}$ und k sind nun zueinander konjugiert.

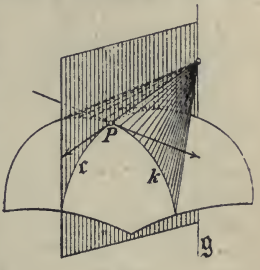


Fig. 87.

In der Tat: Die Kegel sind abwickelbare Flächen. Nach Satz 58, S. 196, ist also in jedem Punkte P der Fläche die Tangente der hindurchgehenden Kurve k konjugiert zur hindurchgehenden Erzeugenden des Kegels. Diese Erzeugende aber schneidet die Gerade $\mathfrak{g}$ und liegt daher in der Ebene der hindurchgehenden Kurve $\mathfrak{c}$, indem sie diese Kurve in P berührt. Also haben die beiden Kurven $\mathfrak{c}$ und k in P konjugierte Tangenten.

Um dies auch analytisch abzuleiten, wählen wir die Gerade $\mathfrak{g}$ als z-Achse. Benutzen wir alsdann $y:x$ als Parameter u, so daß

$$y = ux \tag{17}$$

ist, so sind die Kurven (u) die Kurven $\mathfrak{c}$. Nach (14) ist

$$M\,du + N\,dv = 0 \tag{18}$$

die Differentialgleichung der zu den Kurven $\mathfrak{c}$ konjugierten Kurven. Infolge von (17) wird

$$\tag{19} \begin{cases} y_u = x + u x_u, & y_v = u x_v, \\ y_{uv} = x_v + u x_{uv}, & y_{vv} = u x_{vv}, \end{cases}$$

so daß nach (11), S. 122, kommt:

$$M = \frac{1}{D}\left[x_v(x_v z_u - z_v x_u) + x(x_{uv} z_v - z_{uv} x_v)\right],$$

$$N = \frac{1}{D} x(x_{vv} z_v - z_{vv} x_v).$$

Die Differentialgleichung (18) lautet demnach:

$$(20)\quad [x_v(x_v z_u - z_v x_u) + x(x_{uv} z_v - z_{uv} x_v)]\,du + x(x_{vv} z_v - z_{vv} x_v)\,dv = 0.$$

Wir müssen zeigen, daß sie von den Kurven k erfüllt wird. Zu diesem Zwecke wählen wir einen Punkt $z = c$ auf der z-Achse und legen von ihm aus alle Tangentenebenen

$$X(\mathfrak{x} - x) + Y(\mathfrak{y} - y) + Z(\mathfrak{z} - z) = 0$$

an die Fläche. Diese Ebenen berühren die Fläche längs einer Kurve k, die nach der Substitution von $\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = 0$, $\mathfrak{z} = c$ dargestellt wird durch:

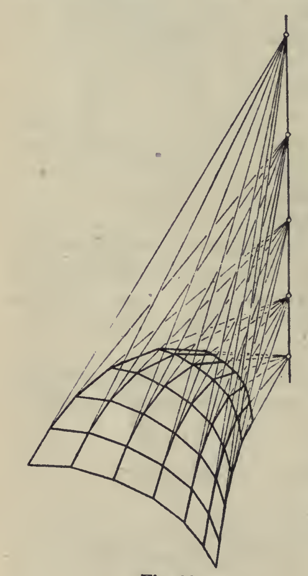


Fig. 88.

$$(21)\qquad \frac{Xx + Yy + Zz}{Z} = c,$$

denn dies ist eine Gleichung von der Form $\Omega(u, v) = c$. Wegen (17) und (19) ist aber nach XI (F):

$$DX = x z_v - u(x_v z_u - z_v x_u),$$
$$DY = x_v z_u - z_v x_u,$$
$$DZ = -x x_v,$$

so daß (21) so lautet:

$$(22)\qquad \frac{z x_v - x z_v}{x_v} = c.$$

Das vollständige Differential der linken Seite hiervon ist nun gleich der linken Seite von (20), dividiert mit x_v^2. Mithin ist (22) ein Integral von (20). Hiermit ist der analytische Nachweis beendet und zugleich gezeigt, wie man auf einer beliebigen Fläche, nachdem man $y:x$ als Parameter u eingeführt hat, mittels der Formel (22) die zu den Kurven (u) konjugierten Kurven durch Differentiation allein findet.

Wir haben hiernach den

Satz 94:[1] Schneidet man eine Fläche mit denjenigen Ebenen, die eine feste Gerade enthalten, so sind die Schnittkurven konjugiert zu den Berührungskurven derjenigen Tangentialkegel der Fläche, deren Spitzen auf der festen Geraden liegen.

In Fig. 88, S. 254, ist die Form eines Modells angegeben, das man nach den früheren Auseinandersetzungen für dies Netz von konjugierten Kurven herstellen kann.

§ 15. Die sphärische Abbildung und das Krümmungsmaß.

Im ersten Bande haben wir auf S. 50, 51 eine Kurve Punkt für Punkt auf einen Kreis vom Radius Eins abgebildet, indem wir zu jeder Normale der Kurve den parallelen Kreisradius zogen. Das Verhältnis aus einem Bogenelement des Kreises zum zugehörigen Bogenelement der Kurve lieferte alsdann das Krümmungsmaß der Kurve, siehe Satz 28 ebenda. Dies Verfahren können wir für Flächen und Kugeln verallgemeinern. Wir gelangen dadurch zur sogenannten sphärischen Abbildung. Zunächst leiten wir ihre allgemeinen Eigenschaften ab. Alsdann werden wir entsprechend wie bei den Kurven in der Ebene mit Hilfe der sphärischen Abbildung zu einem Krümmungsmaße der Fläche gelangen.

Wir nehmen also eine Kugel vom Radius Eins an, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt O sei, und ziehen zur Normale eines Punktes P oder (u, v) der gegebenen Fläche

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

in derselben Orientierung die Parallele vom Kugelmittelpunkte O aus. Dieser Kugelradius hat einen Endpunkt $\mathfrak{P}$ auf der Kugel. Er heißt das sphärische Bild[2] des Flächenpunktes P, siehe

---

[1] Satz von Böklen in seiner „Analytischen Geometrie des Raumes“, 1. Aufl., Stuttgart 1861, S. 69.

[2] Diese sphärische Abbildung kommt bei Rodrigues in der Abhandlung „Sur quelques propriétés des intégrales doubles et des rayons de courbure des surfaces“, Bulletin de la Soc. philomatique de Paris, 1815 (auch in der Correspondance sur l'École polyt. 3. Bd., 1815), vor. Als ein methodisches Hilfsmittel wurde sie aber erst von Gauss in die Flächentheorie eingeführt, nämlich 1828 in den „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ (vgl. die Anm. zu S. 6). Erst dadurch wurde die sphärische Abbildung allgemein bekannt, und dies erklärt, daß sie häufig als die Gaussische Abbildung bezeichnet wird.

Fig. 89. Offenbar sind die Richtungskosinus X, Y, Z der Normale des Flächenpunktes P die rechtwinkligen Koordinaten des sphärischen Bildes $\mathfrak{P}$.

Nach XI (F) ist:

$$(2) \qquad X = \frac{y_u z_v - z_u y_v}{D}, \quad Y = \frac{z_u x_v - x_u z_v}{D}, \quad Z = \frac{x_u y_v - y_u x_v}{D}.$$

Demnach werden die Koordinaten der Punkte $\mathfrak{P}$ der Kugel als Funktionen der Parameter u, v dargestellt, ebenso wie die Koordinaten x, y, z der Flächenpunkte P Funktionen von u und v sind. Nach S. 6 aber sind X, Y, Z nur dann die Koordinaten der Punkte $\mathfrak{P}$ der Kugelfläche und nicht nur einer Kurve oder gar nur eines einzigen Punktes der Kugelfläche, wenn nicht alle drei Determinanten

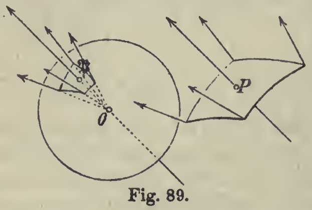


Fig. 89.

$$Y_u Z_v - Z_u Y_v, \quad Z_u X_v - X_u Z_v, \quad X_u Y_v - Y_u X_v$$

gleich Null sind. Nun ist nach (1) und (2) auf S. 197:

$$Y_u Z_v - Z_u Y_v = \frac{1}{D^4} \begin{vmatrix} FM - GL & FL - EM \\ FN - GM & FM - EN \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix},$$

also ausgerechnet:

$$Y_u Z_v - Z_u Y_v = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}(y_u z_v - z_u y_v).$$

Der erste Faktor rechts ist die in Satz 14, S. 135, auftretende Größe K. Durch zyklische Vertauschung ergeben sich noch zwei entsprechende Formeln. Demnach haben wir:

$$(3) \quad \begin{cases} Y_u Z_v - Z_u Y_v = K(y_u z_v - z_u y_v), \quad Z_u X_v - X_u Z_v = K(z_u x_v - x_u z_v), \\ X_u Y_v - Y_u X_v = K(x_u y_v - y_u x_v). \end{cases}$$

Da nun nach S. 6 die rechts stehenden Determinanten nicht sämtlich gleich Null sind, gilt dasselbe von den links stehenden, wenn $K \neq 0$ oder also $LN - M^2 \neq 0$ ist. Nach Satz 28, S. 157, besagt dies, daß die sphärische Abbildung der vorgelegten Fläche (1) auf die Kugel nur dann, wenn die Fläche abwickelbar ist, bloß eine Kurve oder gar nur einen Punkt auf der Kugel liefert.

Wir setzen daher voraus, die gegebene Fläche (1) sei nicht abwickelbar. Dann gibt (2) eine Darstellung der rechtwinkligen Koordinaten X, X, Z der Punkte $\mathfrak{P}$ der Kugel mittels der

beiden Parameter u und v, und es liegt eine punktweise Abbildung der Fläche auf die Kugel vor, bei der nicht nur jedem Punkte der Fläche ein Punkt der Kugel entspricht, sondern auch zu jedem Punkte der Kugel (in einem gewissen Bereiche) ein Punkt der Fläche gehört.

Die sphärische Abbildung mag auch so erläutert werden: Die gegebene Fläche (1) werde aus irgend einer Richtung durch parallele Strahlen beleuchtet. Daraus, daß die Helligkeit einer Stelle zum Kosinus des Einfallswinkels, d. h. des Winkels des Lichtstrahls mit der Normale, proportional ist, folgt alsdann: Welche Richtung auch die Strahlen haben mögen, stets hat eine Stelle P der Fläche dieselbe Helligkeit wie die ihr bei der sphärischen Abbildung entsprechende Stelle $\mathfrak{P}$ der Kugel.[1]

Der Kugel kommen, da ihre rechtwinkligen Koordinaten X, Y, Z durch (2) als Funktionen der Parameter u und v dargestellt werden, Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung in bezug auf u und v zu, die wir mit $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ bezeichnen wollen. Das Quadrat des Bogenelements der Kugel, nämlich

$$d\mathfrak{s}^2 = \mathfrak{E}\,du^2 + 2\,\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{G}\,dv^2, \tag{4}$$

ist nun nach (2):

$$d\mathfrak{s}^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2.$$

Das Bogenelement $d\mathfrak{s}$ ist, da die Kugel den Radius Eins hat, identisch mit dem Winkel der Normale des Punktes (u, v) der Fläche (1) und der Normale eines unendlich benachbarten Flächenpunktes $(u + du,\ v + dv)$.

Nach (14), S. 199, ergibt sich

$$d\mathfrak{s}^2 = H(L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2) - K(E\,du^2 + F\,du\,dv + G\,dv^2)$$

oder

$$d\mathfrak{s}^2 = (HL - KE)\,du^2 + 2(HM - KF)\,du\,dv + (HN - KG)\,dv^2,$$

so daß die Vergleichung mit (4) gibt:

$$\begin{cases} \mathfrak{E} = \mathbf{S}\,X_u^2 \quad = HL - KE, \\ \mathfrak{F} = \mathbf{S}\,X_u X_v = HM - KF, \\ \mathfrak{G} = \mathbf{S}\,X_v^2 \quad = HN - KG \end{cases} \tag{5}$$

Setzt man hierin die Werte von H und K aus Satz 14, S. 135, ein, so kommt:

[1] Deshalb bedient man sich der sphärischen Abbildung in der darstellenden Geometrie zur Konstruktion der Linien gleicher Helligkeit auf Flächen, der sogenannten Lichtgleichen oder Isophoten.

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E} = \frac{1}{D^2}[E M^2 - 2 F L M + G L^2], \\ \mathfrak{F} = \frac{1}{D^2}[E M N - F(L N + M^2) + G L M], \\ \mathfrak{G} = \frac{1}{D^2}[E N^2 - 2 F M N + G M^2]. \end{cases}$$

Ferner ist nach (5), wenn wir entsprechend

$$D^2 = E G - F^2$$

auch

$$(7)\qquad \mathfrak{D}^2 = \mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2$$

setzen:

$$\mathfrak{D}^2 = H^2(L N - M^2) - H K(E N - 2 F M + G L) + K^2(E G - F^2).$$

Da aber nach Satz 14, S. 135,

$$L N - M^2 = K D^2, \qquad E N - 2 F M + G L = H D^2$$

ist, ergibt sich hieraus einfach:

$$(8)\qquad \mathfrak{D}^2 = K^2 D^2.$$

Ehe wir weiterhin die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ für die Darstellung (2) der Kugel berechnen, wollen wir die Ergebnisse in § 12 des 1. Abschnittes für beliebige punktweise Abbildungen auf die sphärische Abbildung anwenden, weil wir dabei nur die Fundamentalgrößen erster Ordnung brauchen.

Nach Satz 55, S. 109 u. f., sind drei Fälle zu unterscheiden, und nach den Entwicklungen auf S. 108 u. f. kommt dabei die Gleichung

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} k^2 & E & \mathfrak{E} \\ -k & F & \mathfrak{F} \\ 1 & G & \mathfrak{G} \end{vmatrix} = 0$$

in Betracht; es sind nämlich die Fälle zu scheiden, wo diese Gleichung identisch besteht, zwei zusammenfallende Wurzeln k oder zwei verschiedene Wurzeln k hat. Nach (5) läßt sich (9) so schreiben:

$$(10)\qquad H \begin{vmatrix} k^2 & E & L \\ -k & F & M \\ 1 & G & N \end{vmatrix} = 0.$$

Erster (besonderer) Fall: Die sphärische Abbildung ist konform, wenn die Gleichung (10) identisch besteht, also entweder

$$H = 0$$

oder

$$E : F : G = L : M : N$$

ist. Im zweiten Falle hat die Fläche (1) lauter Nabelpunkte (nach S. 126) und ist daher nach Satz 11, S. 129, eine Kugel, da ja die Ebenen wie alle abwickelbaren Flächen ausgeschlossen wurden. Es leuchtet ein, daß die Abbildung einer Kugel von beliebigem Radius auf eine Kugel vom Radius Eins eine ähnliche Abbildung ist. Dieser Fall ist demnach trivial. Außerdem bleibt aber noch der Fall $H = 0$ zu berücksichtigen.

Wenn die sphärische Abbildung konform ist, entsprechen den beiden Scharen von Minimalkurven der Fläche (1) nach Satz 55, S. 109 u. f., die beiden Scharen von Minimalkurven der Bildkugel. d. h. nach Satz 32, S. 78, die beiden Scharen von Minimalgeraden der Bildkugel.

Indem wir jetzt zur Betrachtung des zweiten und dritten Falles übergehen, müssen wir voraussetzen, daß die Fläche (1) keine Kugel sei und daß auf ihr die Größe H nicht überall verschwinde. Alsdann stellt (10) die Differentialgleichung der Krümmungskurven der Fläche (1) dar, vgl. 1, S. 211. Mithin ergibt sich weiterhin:

Zweiter (besonderer) Fall: Bei der sphärischen Abbildung gibt es kein Orthogonalsystem auf der Fläche (1), dessen Bild wieder ein Orthogonalsystem ist, falls die Gleichung (10) eine Doppelwurzel k hat, d. h. nach S. 215, falls die Fläche (1) eine und nur eine Schar von Minimalgeraden enthält, die dann ihre einzigen Krümmungskurven sind. Diese Schar von Minimalgeraden bildet sich dabei als die eine Schar von Minimalgeraden der Kugel ab.

Dritter (allgemeiner) Fall: Auf der Fläche (1) gibt es in allen Fällen, die bisher nicht betrachtet wurden, ein und nur ein Orthogonalsystem, dessen Bild auf der Kugel wieder ein Orthogonalsystem ist, und zwar wird dies System durch (10) definiert, d. h. es ist das System der Krümmungskurven.

Demnach gelten die folgenden Sätze:

Satz 95: Die sphärische Abbildung einer nicht-abwickelbaren Fläche ist dann und nur dann konform, wenn die Fläche entweder eine Kugel ist oder wenn auf ihr überall die Größe H verschwindet.

Satz 96: Bei der sphärischen Abbildung einer nicht-abwickelbaren Fläche stellt sich kein Orthogonalsystem der Fläche wieder als Orthogonalsystem dar, sobald die Fläche eine und nur eine Schar von Minimalgeraden ent-

hält. Die Bilder dieser Minimalgeraden machen die eine Schar von Minimalgeraden der Bildkugel aus.

Satz 97: Bei der sphärischen Abbildung einer nicht-abwickelbaren Fläche stellt sich ein und nur ein Orthogonalsystem der Fläche wieder als Orthogonalsystem dar, wenn die Fläche keine Schar von Minimalgeraden enthält und außerdem die Größe H auf ihr nicht überall verschwindet, und zwar ist dies Orthogonalsystem das der Krümmungskurven.

Daß sich das System der Krümmungskurven wieder als Orthogonalsystem abbildet, leuchtet auch geometrisch ein.

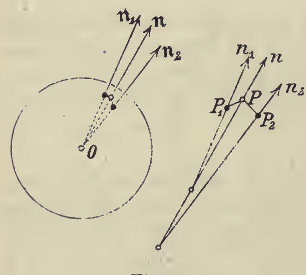


Fig. 90.

Wenn nämlich P irgend ein gewöhnlicher Flächenpunkt ist und P_1 und P_2 unendlich benachbarte Flächenpunkte auf den durch P gehenden beiden Krümmungskurven sind, wird die Normale n von P nach S. 213 von den Normalen n_1 und n_2 von P_1 und P_2 geschnitten, siehe Fig. 90. Die zu n, n_1 und n_2 parallelen Radien $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ der Bildkugel liegen daher so, daß die Ebene von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}_1$ zur Ebene von n und n_1 parallel ist und ebenso die Ebene von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}_2$ zur Ebene von n und n_2. Da nun $PP_1 \perp PP_2$ und die Ebene $PP_1P_2 \perp n$ ist, steht die Ebene von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}_1$ auf der Ebene von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}_2$ senkrecht. Daraus folgt sofort, daß die drei Bildpunkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von P, P_1 und P_2, die in Fig. 90 nicht bezeichnet werden konnten, so liegen, daß $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1 \perp \mathfrak{P}\mathfrak{P}_2$ ist.

Auf einer nicht-abwickelbaren Fläche mit einer Schar von Minimalgeraden ist $H \neq 0$. Denn wenn man dieselben Parameterlinien wie auf S. 129 einführt, wird $E = G = 0$ und $L = 0$. Wäre nun $H = 0$, so müßte auch $M = 0$, also $LN - M^2 = 0$ sein, sodaß die Fläche nach Satz 28, S. 157, abwickelbar wäre. — Eine nicht-abwickelbare Fläche, auf der $H = 0$ ist, hat somit nur gewöhnliche Punkte (vgl. S. 159) mit Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2. Da nun nach (27), S. 135,

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ist, besagt $H = 0$, daß an jeder Stelle R_2 entgegengesetzt gleich R_1 sein soll Deshalb läßt sich der Satz 95 auch so aussprechen:

Satz 98: Konform ist die sphärische Abbildung nur für die Kugeln, bei denen sie sogar ähnlich ist, und für diejenigen Flächen, auf denen überall die beiden Hauptkrümmungsradien einander entgegengesetzt gleich sind.

Wir bereiten nun die Berechnung der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der durch (2) in den rechtwinkligen Koordinaten X, Y, Z dargestellten Kugel vor. Nach (8) ist zunächst die Größe

$$\mathfrak{D} = \sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}$$

gleich $\pm KD$. Im reellen Falle soll $\mathfrak{D}$ ebenso wie D nach der Vorschrift auf S. 18 positiv sein. Demnach setzen wir

$$\mathfrak{D} = \varepsilon K D, \tag{11}$$

indem wir unter ε eine der Zahlen $+1$ und -1 verstehen und zwar insbesondere im reellen Falle $+1$ oder -1, je nachdem K für die zugehörige Stelle (u, v) der Fläche (1) positiv oder negativ ist. Nun aber ist nach Satz 14, S. 135:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \tag{12}$$

also für elliptische oder konvex-konvexe Punkte $(LN - M^2 > 0)$ positiv und für hyperbolische oder konvex-konkave Punkte $(LN - M^2 < 0)$ negativ, da ja D^2 oder $EG - F^2$ im reellen Falle positiv ist, vgl. hierzu S. 149, 150. Bei der Abbildung elliptischer Punkte nehmen wir demnach $\varepsilon = +1$ und bei der Abbildung hyperbolischer Punkte $\varepsilon = -1$ an. Was die parabolischen Flächenpunkte $(LN - M^2 = 0)$ betrifft, so ist zu bemerken, daß dann nicht nur $\mathfrak{D} = 0$ wird, sondern auch X, Y, Z von einander abhängig werden, weshalb wir von der Abbildung parabolischer Punkte überhaupt absehen (vgl. auch S. 256).

Im imaginären Falle wählen wir in (11) für ε irgend einen der beiden Werte $+1$ und -1 aus.

Der nach dem Bildpunkte (X, Y, Z) eines Flächenpunktes (x, y, z) gehende Kugelradius ist nach Voraussetzung geradeso wie die zu ihm parallele Normale des Flächenpunktes orientiert; andererseits ist er eine Normale der Kugel. Hieraus kann man schließen, daß die Richtungskosinus $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ der Kugelnormale entweder geradezu gleich X, Y, Z oder aber gleich $-X, -Y, -Z$ sein müssen. Denn, obgleich die sphärische Abbildung stets durch Radien parallel zu den orientierten Flächennormalen vermittelt wird, sind doch diese Radien nicht notwendig geradeso orientiert wie die mit ihnen zusammenfallenden Kugelnormalen, weil ja die

Orientierung der Normalen nach S. 32 davon abhängt, wie $\mathfrak{D}$ einwertig gemacht worden ist. Dies läßt sich rechnerisch sofort bestätigen. Entsprechend XI (F) ist nämlich zu setzen:

$$\mathfrak{X} = \frac{Y_u Z_v - Z_u Y_v}{\mathfrak{D}} \quad \text{usw.},$$

so daß aus (3) und (11) mit Rücksicht auf (2) folgt:

(13) $$\mathfrak{X} = \varepsilon X, \quad \mathfrak{Y} = \varepsilon Y, \quad \mathfrak{Z} = \varepsilon Z.$$

Demnach sind die Kugelnormalen im reellen Falle nach außen oder nach innen hin positiv zu rechnen, je nachdem elliptische oder hyperbolische Punkte der Fläche (1) abgebildet werden.

Weiterhin ist nun entsprechend (12), S. 122, bei der Kugel (2) für die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung anzusetzen:

$$\mathfrak{L} = -\mathbf{S}\,\mathfrak{X}_u X_u, \quad \mathfrak{M} = -\mathbf{S}\,\mathfrak{X}_u X_v = -\mathbf{S}\,\mathfrak{X}_v X_u, \quad \mathfrak{N} = -\mathbf{S}\,\mathfrak{X}_v X_v,$$

also nach (13):

$$\mathfrak{L} = -\varepsilon\,\mathbf{S}\,X_u^2, \quad \mathfrak{M} = -\varepsilon\,\mathbf{S}\,X_u X_v, \quad \mathfrak{N} = -\varepsilon\,\mathbf{S}\,X_v^2.$$

mithin nach (5):

(14) $$\mathfrak{L} = -\varepsilon\,\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{M} = -\varepsilon\,\mathfrak{F}, \quad \mathfrak{N} = -\varepsilon\,\mathfrak{G}.$$

Daß $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ zu $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ proportional sein müssen, war vorauszusehen, weil alle Punkte der Bildkugel Nabelpunkte sind (vgl. S. 126 u. f.). —

Das Formelsystem (6), das die Fundamentalgrößen erster Ordnung $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ der Kugel mittels E, F, G und L, M, N ausdrückt, gibt noch Anlaß zu einer Bemerkung: In allen Gliedern rechtsstehend, abgesehen von je einem, tritt der Faktor M auf. Die Formeln werden also erheblich einfacher, wenn $M = 0$ ist, d. h. wenn wir annehmen, daß als Parameterlinien (v) und (u) der Fläche (1) ein konjugiertes Kurvennetz gewählt wird, siehe Satz 88, S. 242. Da M nach (12), S. 122, gleich $-\mathbf{S}\,X_u x_v$ und auch gleich $-\mathbf{S}\,X_v x_u$ ist und da X, Y, Z die rechtwinkligen Koordinaten des Bildpunktes des Flächenpunktes (x, y, z) sind, ist im Falle $M = 0$ die Tangente der Parameterlinie (u) bzw. (v) im Punkte (u, v) auf der Fläche senkrecht zur Tangente der Parameterlinie (v) bzw. (u) im Bildpunkte auf der Kugel. Ist also ω der Winkel, den die Parameterlinien (v) und (u) auf der Fläche miteinander im Punkte (u, v) bilden, und ist $\mathfrak{w}$ der entsprechende Bildwinkel auf der Kugel, so wird daher $\sin^2\mathfrak{w}$ gleich $\sin^2\omega$, $\cos^2\mathfrak{w}$ gleich $\cos^2\omega$ sein. Um im reellen Falle noch Genaueres zu ermitteln, gehen wir von den Formeln (13) und (14), S. 36, aus, nach denen

(15) $$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}, \quad \sin\omega = \frac{D}{\sqrt{E}\sqrt{G}}$$

ist und $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ im reellen Falle positiv sind (siehe S. 34). Entsprechend wird zu setzen sein:

$$\cos \mathfrak{w} = \frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{\mathfrak{E}}\sqrt{\mathfrak{G}}}, \quad \sin \mathfrak{w} = \frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{\mathfrak{E}}\sqrt{\mathfrak{G}}}.$$

Wegen $M = 0$ aber gibt (6):

$$(16) \qquad \mathfrak{E} = \frac{GL^2}{D^2}, \quad \mathfrak{F} = -\frac{FLN}{D^2}, \quad \mathfrak{G} = \frac{EN^2}{D^2},$$

ferner (12) noch $K = LN : D^2$, also (11):

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon LN}{D},$$

so daß kommt:

$$\cos \mathfrak{w} = \frac{-FLN}{\sqrt{GL^2}\sqrt{EN^2}}, \quad \sin \mathfrak{w} = \frac{\varepsilon DLN}{\sqrt{GL^2}\sqrt{EN^2}},$$

Nun hat man zu beachten, daß die Wurzeln im reellen Falle positiv sind. Liegt ein elliptischer bzw. hyperbolischer Flächenpunkt vor, d. h. ist $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$, so wird demnach $LN = \sqrt{L^2}\sqrt{N^2}$ bzw. $LN = -\sqrt{L^2}\sqrt{N^2}$, sobald auch diese Wurzeln positiv gerechnet werden. Man hat somit in den letzten Formeln LN gleich $\varepsilon\sqrt{L^2}\sqrt{N^2}$ zu setzen. Dann aber kommt:

$$\cos \mathfrak{w} = \frac{-\varepsilon F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}, \quad \sin \mathfrak{w} = \frac{D}{\sqrt{E}\sqrt{G}},$$

daher nach (15):

$$\cos \mathfrak{w} = -\varepsilon \cos \omega, \quad \sin \mathfrak{w} = \sin \omega.$$

Im Falle $\varepsilon = 1$ wird daher $\mathfrak{w} = \pi - \omega$, im Falle $\varepsilon = -1$ dagegen $\mathfrak{w} = \omega$. Somit gilt der

Satz 99: Bei der sphärischen Abbildung entsprechen zwei von einem Flächenpunkte ausgehenden konjugierten Richtungen (k_1) und (k_2) solche Richtungen $(\varkappa_1)$ und $(\varkappa_2)$ auf der Bildkugel, von denen $(\varkappa_1)$ zu (k_2) und $(\varkappa_2)$ zu (k_1) senkrecht ist. Ist ω der Winkel der konjugierten Richtungen (k_1) und (k_2) und $\mathfrak{w}$ der Bildwinkel, d. h. der entsprechende Winkel der Richtungen $(\varkappa_1)$ und $(\varkappa_2)$ auf der Kugel, so ist im reellen Falle $\mathfrak{w} = \pi - \omega$ oder $\mathfrak{w} = \omega$, je nachdem der Flächenpunkt elliptisch oder hyperbolisch ist.

Da jede Haupttangente eines Flächenpunktes zu sich selbst konjugiert ist (siehe Satz 55, S. 194), folgt also im besonderen, daß jeder Haupttangentenkurve der Fläche bei der sphärischen Abbildung eine Kurve auf der Kugel derart entspricht, daß beide

Kurven in einander zugeordneten Punkten zueinander senkrechte Tangenten haben. Dagegen ist jede Hauptkrümmungsrichtung zu der zu ihr senkrechten Hauptkrümmungsrichtung konjugiert (nach Satz 54, S. 194); mithin entspricht jeder Krümmungskurve der Fläche bei der Abbildung eine Kurve derart, daß beide in zusammengehörigen Punkten parallele Tangenten haben. Hiermit steht der Satz 97 im Einklange. —

Nachdem wir so die wichtigsten Eigenschaften der sphärischen Abbildung gewonnen haben, gehen wir an die zu Anfang dieses Paragraphen angedeutete Anwendung, um zu einem Krümmungsmaße für die Flächen zu kommen.

Zu diesem Zwecke beschränken wir uns vorläufig auf den reellen Fall und betrachten ein Element der Fläche (1), nämlich das unendlich kleine Parallelogramm mit den Ecken

$$(17)\quad (u, v), \quad (u + du, v), \quad (u + du,\ v + dv), \quad (u, v + dv),$$

das von Parameterlinien eingeschlossen ist und dessen Flächeninhalt nach Satz 16, S. 45, gleich $D\,du\,dv$ ist. Der Flächeninhalt ist dabei positiv, wenn der Sinn des Umlaufens des Parallelogramms, von der positiven Normale aus betrachtet, übereinstimmt mit dem Sinne der Drehung von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse hin, von der positiven z-Achse aus betrachtet. Nun gehören zu denselben Parameterwerten (17) auch die Ecken des Bildparallelogramms auf der Kugel, und sein Flächeninhalt ist gleich $\mathfrak{D}\,du\,dv$. Aber wenn man die Kugel von außen betrachtet, ist der Sinn des Umlaufes dieses Parallelogramms nur dann der positive, falls die Normale der Kugel nach außen positiv ist, d. h. falls die Stelle (u, v) der Fläche (1) elliptisch ist. Wir setzen nun fest, daß wir die Bildkugel von außen betrachten und dementsprechend den Flächeninhalt des Bildparallelogramms positiv oder negativ rechnen wollen, je nachdem der Sinn des Umlaufens alsdann derselbe ist oder nicht wie der der Drehung der positiven x-Achse zur positiven y-Achse hin, betrachtet von der positiven z-Achse her. Bei dieser Festsetzung bekommt das Bildparallelogramm den Flächeninhalt $\varepsilon\mathfrak{D}\,du\,dv$.

Das Verhältnis aus dem Inhalte des Bildparallelogramms und dem Inhalte des Parallelogramms der Fläche wird somit

$$\frac{\varepsilon\mathfrak{D}\,du\,dv}{D\,du\,dv},$$

also nach (11) gleich K. Mithin gilt der

Satz 100: Bei der sphärischen Abbildung einer reellen Fläche ist das Verhältnis aus dem Flächeninhalte des Bildes eines unendlich kleinen Stückes der Fläche in der Umgebung eines Punktes (u, v) und aus dem Flächeninhalte dieses Stückes selbst gleich K oder

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

vorausgesetzt, daß man bei der Betrachtung der Fläche von den positiven Normalen her und bei der Betrachtung der Kugel von außen her die Flächenstücke positiv oder negativ rechnet, falls sie im Sinne des Umlaufens übereinstimmen oder nicht übereinstimmen mit dem Sinne der Drehung der positiven x-Achse nach der positiven y-Achse hin, betrachtet von der positiven z-Achse aus.

Ist der Flächenpunkt (u, v) ein gewöhnlicher Punkt und sind R_1 und R_2 seine Hauptkrümmungsradien, so ist nach (27), S. 135:

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Das Flächenverhältnis, von dem in Satz 100 die Rede ist, heißt nun in sinngemäßer Verallgemeinerung der Definition bei einer ebenen Kurve, die man auf Grund des Satzes 28, I S. 51, aufstellen könnte, das Krümmungsmaß oder die Krümmung der Fläche (1) an der Stelle (u, v).

Im imaginären Falle gilt der Satz 100 auch noch, abgesehen von der Vorzeichenbestimmung. Man nennt nun in jedem Falle die Größe

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} \tag{18}$$

das Krümmungsmaß oder die Krümmung der Fläche (1) an der Stelle (u, v). Natürlich darf man nur im Falle eines gewöhnlichen Punktes (vgl. S. 159) sagen, daß die Krümmung gleich dem Produkte der rez roken Werte der beiden Hauptkrümmungsradien ist.[1] Im Falle eines außergewöhnlichen Punktes bleibt aber immer noch die Definition mittels der Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung bestehen.

[1] Schon 1815 erkannte Rodrigues (vgl. die Anm. zu S. 255), daß sich ein Flächenelement der Bildkugel zum zugehörigen Flächenelement der abgebildeten Fläche verhält wie Eins zum Produkte der beiden Hauptkrümmungsradien. Gauss fand dies aufs neue in seinen „Disquisitiones“ (vgl. die Anm. zu S. 6) und definierte die Krümmung in der oben angegebenen Weise. Ein weiterer sehr wichtiger auf die Krümmung bezüglicher Satz von Gauss wird uns später begegnen.

Die abwickelbaren Flächen wurden bei der sphärischen Abbildung von vornherein ausgeschlossen, weil ihre Bildpunkte nicht ein Flächenstück der Kugel, sondern nur Kurven erfüllen. Die Definition des Krümmungsmaßes durch (18) erhalten wir auch dann aufrecht. Wenn man will, kann man das auch aus der sphärischen Abbildung ableiten, denn bei der Abbildung eines unendlich kleinen Stückes einer abwickelbaren Fläche hat das Bildstück nicht einen unendlich kleinen Flächeninhalt, sondern den Flächeninhalt Null, so daß hier das in Satz 100 angegebene Verhältnis gleich Null wird. Dies steht nun im Einklange damit, daß $LN - M^2 = 0$ oder $K = 0$ das Merkmal der abwickelbaren Flächen ist, vgl. Satz 28, S. 157. Aus der Definition der Größe K als Krümmung folgt eben, daß wir diesen Satz so aussprechen können:

Satz 101: Die Flächen von der Krümmung Null sind die abwickelbaren Flächen und insbesondere die Ebenen.

Auf einer nicht-abwickelbaren Fläche wird die Krümmung an allen denjenigen Stellen gleich Null, wo $LN - M^2$ verschwindet, d. h. an den parabolischen Stellen. Die parabolischen Stellen sind also identisch mit den Stellen von der Krümmung Null. Nach S. 149, 150 erkennt man ferner: Die elliptischen Punkte haben positive und die hyperbolischen Punkte negative Krümmung, denn sie sind durch die Bedingung $LN - M^2 > 0$ bzw. < 0 gekennzeichnet.

Hat eine Fläche nur außergewöhnliche Punkte, so ist sie entweder eine Ebene oder eine Kugel oder eine Fläche mit einer und nur einer Schar von Minimalgeraden. Die Ebenen gehören zu Satz 101. Liegt eine Kugel vor, so ist ihr sphärisches Bild, wie früher schon hervorgehoben wurde, der Kugel ähnlich, und daher erkennt man leicht, daß das Verhältnis entsprechender Flächenstücke auf der Bildkugel und der Originalkugel gleich $1 : r^2$ wird, wenn die Kugel den Radius r hat. Demnach hat auch die Krümmung der Kugel den konstanten Wert $1 : r^2$. Dies wollen wir rechnerisch bestätigen: Die Kugel vom Radius r

$$x = r \cos u \cos v, \qquad y = r \cos u \sin v, \qquad z = r \sin u$$

gehört zu den auf S. 137 u. f. betrachteten Rotationsflächen, indem man dort in (1) für $p(u)$ die Funktion $r \cos u$ und für $q(u)$ die Funktion $r \sin u$ zu setzen hat. Nach (2) ebenda kommt also

$$EG - F^2 = r^4 \cos^2 u, \qquad LN - M^2 = r^2 \cos^2 u,$$

daher nach (18) in der Tat $K = 1 : r^2$.

Was schließlich die Flächen mit einer und nur einer Schar von Minimalgeraden betrifft, so werden wir ihre Krümmung später berechnen, wenn wir ausführlicher von ihnen sprechen (in § 17).

Bei der Definition der Krümmung K ist ein Umstand hervorzuheben: Die Fundamentalgrößen L, M, N sind erst dadurch einwertig gemacht worden, daß wir die Größe D einwertig festsetzten, da die Formeln (11), S. 122, ja zunächst nur LD, MD und ND einwertig definieren. Da nun aber nach (18)

$$K = \frac{LD.ND - (MD)^2}{D^4}$$

und D^2 einwertig ist, erkennt man, daß das Krümmungsmaß K einen von allen willkürlichen Festsetzungen unabhängigen Wert hat.

Wir erinnern hier an den Satz 64, S. 208. Dort betrachteten wir zwei konjugierte Bogenelemente ds_1 und ds_2 der Fläche und die Winkel $d\vartheta_1$ und $d\vartheta_2$, die die in ihren Endpunkten errichteten Flächennormalen mit der Normale ihres gemeinsamen Ausgangspunktes (u, v) bilden. Bei der sphärischen Abbildung sind $d\vartheta_1$ und $d\vartheta_2$ die Bilder der Bogenelemente ds_1 und ds_2. Sind nun ds_1 und ds_2 auch zueinander senkrecht, d. h. Bogenelemente der beiden durch den Punkt (u, v) gehenden Krümmungskurven, so sind auch ihre Bilder zueinander senkrecht, vgl. Satz 97, also $ds_1\,ds_2$ und $d\vartheta_1\,d\vartheta_2$ einander entsprechende Flächeninhalte auf der Fläche und Kugel. Deshalb läßt sich aus Satz 64, S. 208, wieder der Satz 100 gewinnen, allerdings abgesehen von der Vorzeichenbestimmung.

Beispiel: Auf einer Rotationsfläche ist die Krümmung nach Satz 17, S. 139, gleich dem reziproken Werte des Produktes des Krümmungsradius des Meridians und der Normale, wenn diese bis zur Achse gemessen wird, wobei noch das Vorzeichen zu beachten ist. Wir haben daher in Satz 18, S. 139, die Rotationsflächen konstanter Krümmung[1] bestimmt, abgesehen von denen von der Krümmung Null und von solchen Flächen, die wir damals überhaupt beiseite ließen, nämlich von Flächen, die eine und nur eine Schar von Minimalgeraden enthalten. Die Rotationsflächen von der Krümmung Null

[1] Die Rotationsflächen konstanter negativer Krümmung hat zuerst Minding bestimmt: „Wie sich entscheiden läßt, ob zwei gegebene krumme Flächen aufeinander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen mit unveränderlichem Krümmungsmaße", Journ. f. d. r. u. ang. Math. 19. Bd. (1839). Alle Rotationsflächen konstanter Krümmung hat alsdann Liouville bestimmt und zwar in der 4. Note zur 5. Auflage von Monges „Application etc." im Jahre 1850 (vgl. die Anm. zu S. 126).

sind nach Satz 101 abwickelbar, also Rotationskegel und Rotationszylinder, insbesondere die Ebene. Wenn ferner eine Rotationsfläche eine Schar von Minimalgeraden enthält, können wir sie so erzeugen: Die Gerade

$$\mathfrak{x} = a + Au, \quad \mathfrak{y} = b + Bu, \quad \mathfrak{z} = c + Cu$$

ist eine Minimalgerade, wenn

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0$$

ist (nach I S. 191). Durch Drehung ihrer Punkte um die z-Achse geht die Fläche

$$x = (a + Au)\cos v - (b + Bu)\sin v, \quad y = (a + Au)\sin v + (b + Bu)\cos v,$$
$$z = c + Cu$$

hervor. und hier ist:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(aA + bB + cC)\frac{z - c}{C}.$$

Die Fläche ist demnach im Falle $C \neq 0$ eine Kugel. Dagegen geht im Falle $C = 0$ eine Ebene $z = c$ hervor. Wir haben also alle Rotationsflächen von konstanter Krümmung bestimmt. Wie auf S. 48 ist wieder vorausgesetzt, daß die Achse der Fläche keine Minimalgerade sei.

Anhangsweise besprechen wir noch zwei mit der sphärischen Abbildung zusammenhängende Dinge:

Trägt man auf allen Normalen der gegebenen Fläche (1) von ihren Fußpunkten aus eine konstante Strecke a ab, so ist der Ort der Endpunkte eine Fläche mit den Gleichungen

$$\mathfrak{x} = x + Xa, \quad \mathfrak{y} = y + Ya, \quad \mathfrak{z} = z + Za$$

in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ebenfalls ausgedrückt mittels der Parameter u und v. Hier ist:

$$\mathfrak{x}_u = x_u + X_u a, \quad \mathfrak{x}_v = x_v + X_v a$$

usw., so daß nach XI (H) und XI (I) folgt:

$$\mathbf{S}\, X\mathfrak{x}_u = 0, \quad \mathbf{S}\, X\mathfrak{x}_v = 0,$$

was aussagt, daß der Punkt ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$) der neuen Fläche dieselbe Normale wie der Punkt (x, y, z) der Fläche (1) hat. Daraus folgt:

Satz 102: Trägt man auf den Normalen einer Fläche von ihren Fußpunkten aus eine konstante Strecke auf, so ist der Ort der Endpunkte eine Fläche, deren Tangentenebenen den Tangentenebenen der ursprünglichen Fläche in den entsprechenden Punkten parallel sind.

Man nennt daher die neue Fläche eine Parallelfläche der Fläche (1). Es leuchtet ein, daß entsprechende Punkte der Fläche (1) und einer Parallelfläche dasselbe sphärische Bild haben. Die sphärische Abbildung bringt also nur diejenigen

Eigenschaften einer Fläche zum Ausdrucke, die auch allen Parallelflächen der Fläche zukommen.

Eine andere auf die sphärische Abbildung bezügliche Bemerkung ist diese: Die Minimalgeraden der Bildkugel (vgl. Satz 32, S. 78) sind die Bilder gewisser Kurven der Fläche (1); fragen wir uns, welcher. Alle Tangentenebenen der Kugel längs einer ihrer Minimalgeraden enthalten die Gerade. Da nun entsprechende Punkte der Bildkugel und der Fläche (1) parallele Tangentenebenen haben, so folgt: Die zugehörigen Kurven der Fläche (1) sind so beschaffen, daß die Tangentenebenen der Fläche längs einer solchen Kurve sämtlich einer und derselben Minimalgeraden parallel sind. Durch alle Punkte dieser Kurve der Fläche (1) gehen also parallele Flächentangenten, die Minimalgeraden sind. Diese Minimaltangenten bilden einen Zylinder, der die Fläche längs der gesuchten Kurve umhüllt. Nach Satz 58, S. 196, ist daher die Tangente irgend eines Punktes der Kurve konjugiert zu einer der beiden Minimaltangenten des Punktes. Demnach sind die gesuchten Kurven konjugiert zur einen bzw. anderen Schar von Minimalkurven der Fläche (1).

Um dasselbe analytisch zu beweisen, schicken wir einen allgemeinen auch sonst nützlichen Satz voraus: Ist ein Kurvennetz auf der Fläche (1) wie auf S. 13 durch eine Differentialgleichung

$$A(u,v)\,du^2 + 2B(u,v)\,du\,dv + C(u,v)\,dv^2 = 0 \tag{19}$$

definiert, so kann man nach der Differentialgleichung fragen, die diejenigen beiden Kurvenscharen bestimmt, die zu den durch (19) gegebenen beiden Kurvenscharen konjugiert sind. Setzen wir $dv:du = k$, so geht (19) über in

$$A + 2Bk + Ck^2 = 0,$$

und für die beiden Wurzeln dieser in k quadratischen Gleichung, die wir k_1 und k_2 nennen wollen, ist:

$$k_1 + k_2 = -\frac{2B}{C}, \qquad k_1 k_2 = \frac{A}{C}. \tag{20}$$

Sind nun $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die zu k_1 und k_2 konjugierten Werte von $dv:du$, so muß nach S. 191

$$\varkappa_1 = -\frac{L + Mk_1}{M + Nk_1}, \qquad \varkappa_2 = -\frac{L + Mk_2}{M + Nk_2}$$

sein, d. h.

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = -\frac{2LM + (LN + M^2)(k_1 + k_2) + 2MNk_1k_2}{M^2 + MN(k_1 + k_2) + N^2k_1k_2},$$

$$\varkappa_1\varkappa_2 = \frac{L^2 + LM(k_1 + k_2) + M^2k_1k_2}{M^2 + MN(k_1 + k_2) + N^2k_1k_2},$$

also nach (20):

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = -2\frac{LMC - (LN + M^2)B + MNA}{M^2C - 2MNB + N^2A},$$

$$\varkappa_1\varkappa_2 = \frac{L^2C - 2LMB + M^2A}{M^2C - 2MNB + N^2A}.$$

Mithin genügen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ der in k quadratischen Gleichung:

$$[L^2C - 2LMB + M^2A] + 2[LMC - (LN + M^2)B + MNA]k$$
$$+ [M^2C - 2MNB + N^2A]k^2 = 0.$$

Führen wir wieder $dv:du$ statt k ein und ordnen wir die Koeffizienten dieser Gleichung nach A, B, C, so ergibt sich also der

Satz 103: Werden zwei einfach unendliche Kurvenscharen auf einer Fläche durch eine Differentialgleichung

$$A(u,v)\,du^2 + 2B(u,v)\,du\,dv + C(u,v)\,dv^2 = 0$$

definiert, so bestimmt die Differentialgleichung

$$[AM^2 - 2BLM + CL^2]\,du^2$$
$$+ 2[AMN - B(LN + M^2) + CLM]\,du\,dv$$
$$+ [AN^2 - 2BMN + CM^2]\,dv^2 = 0$$

diejenigen beiden einfach unendlichen Kurvenscharen auf der Fläche, die zu jenen beiden Scharen konjugiert sind.

Diesen Satz wenden wir auf die Minimalkurven der Flache (1) an. Nach Satz 18, S. 46, ist

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0$$

ihre Differentialgleichung, so daß A, B, C hier gleich E, F, G sind. Demnach ergibt sich als Differentialgleichung der beiden zu den Scharen von Minimalkurven konjugierten Kurvenscharen:

$$[EM^2 - 2FLM + GL^2]\,du^2$$
$$+ 2[EMN - F(LN + M^2) + GLM]\,du\,dv$$
$$+ [EN^2 - 2FMN + GM^2]\,dv^2 = 0.$$

Dies aber ist nach (6) die Differentialgleichung:

(21) $$\mathfrak{E}\,du^2 + 2\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{G}\,dv^2 = 0,$$

die sich nach (5) auch so schreiben läßt:

(22) $$H(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2) - K(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2) = 0.$$

Zunächst also haben wir den

Satz 104: Die beiden einfach unendlichen Kurvenscharen, die zu den beiden Scharen von Minimalkurven einer Fläche konjugiert sind, werden durch die Differentialgleichung

$$H(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2) - K(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2) = 0$$

definiert.

Da die Differentialgleichung auch in der Form (21) geschrieben werden kann und da (21) die Minimalgeraden der Bildkugel definiert, wird bestätigt, daß diejenigen Kurven der Fläche (1), die bei der sphärischen Abbildung die Minimalgeraden der Bildkugel liefern, zu den Scharen von Minimalkurven der Fläche (1) konjugiert sind.

Nehmen wir an, daß die Fläche (1) keine Schar von Minimalgeraden enthält, so hat sie nach Satz 69, S. 215, zwei verschiedene Scharen von Krümmungskurven, die wir also als die Parameterlinien (v) und (u) wählen können. Alsdann ist $F = 0$ und $M = 0$ (nach Satz 77, S. 221), und also auch nach S. 135:

$$H = \frac{EN + GL}{EG}, \qquad K = \frac{LN}{EG}.$$

Daher nimmt die Differentialgleichung (22) die Form an:

$$G\,L^2\,du^2 + E\,N^2\,dv^2 = 0.$$

Die beiden durch einen Punkt (u, v) gehenden Kurven, die dieser Gleichung genügen, haben dort Tangenten h_1 und h_2, die mit den beiden Tangenten der hindurchgehenden Krümmungskurven ein Doppelverhältnis $\varDelta$ bilden, das nach Satz 23, S. 51, eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$\varDelta^2 + 2\varDelta + 1 = 0$$

ist und daher den Wert $\varDelta = -1$ hat. Mithin ist dies Doppelverhältnis harmonisch (vgl. I S. 449 und S. 453). Nun aber sind die beiden Tangenten der Krümmungskurven überdies zueinander senkrecht. Zwei Strahlen, die zu ihnen harmonisch sind, müssen deshalb, wie man leicht erkennt, so liegen, daß die beiden Tangenten der Krümmungskurven ihre Winkel halbieren.

Infolgedessen hat sich ergeben:

Satz 105: Diejenigen beiden Scharen von Kurven einer Fläche, die zu ihren Minimalkurven der einen oder anderen Schar konjugiert sind, bilden sich sphärisch als die

Minimalgeraden der Kugel ab. Enthält die Fläche selbst keine Schar von Minimalgeraden, so liegen die beiden Scharen so, daß in jedem Punkte der Fläche ihre Winkel von den beiden hindurchgehenden Krümmungskurven halbiert werden.[1]

§ 16. Allgemeine geradlinige Flächen.

Indem wir daran gehen, die Krümmung der geradlinigen Flächen (I S. 366 u. f.) als Beispiel zu der vorangehenden Theorie zu betrachten, benutzen wir die Gelegenheit, die geradlinigen Flächen etwas eingehender zu besprechen.[2]

Vor allem ist da zu beachten, daß die geradlinigen Flächen in zwei wesentlich verschiedene Arten zerfallen, je nachdem nämlich ihre Geraden, die Erzeugenden, Minimalgeraden sind oder nicht. Denn die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden spielen ja eine besondere Rolle (vgl. z. B. Satz 12, S. 131). Sie sollen nachher für sich betrachtet werden. Demnach setzen wir hier voraus, daß die Erzeugenden der Fläche keine Minimalgeraden seien. Den ausgeschlossenen Fall behandeln wir erst im nächsten Paragraphen.

Sind

$$(1) \qquad x = \varphi(u), \qquad y = \chi(u), \qquad z = \psi(u)$$

die Gleichungen irgend einer Kurve, die keine Minimalkurve sei, ausgedrückt mittels eines Parameters u, als den wir die Bogenlänge der Kurve wählen wollen, so können wir eine allgemeine geradlinige Fläche, die diese Kurve enthält, dadurch konstruieren, daß wir nach einem Gesetze durch die Punkte (u) der Kurve Geraden legen. Unter $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$ seien also drei Funktionen von u verstanden, für die

$$f^2 + g^2 + h^2 = 1$$

ist, so daß sie als die Richtungskosinus der durch den Punkt (u) der Kurve (1) gehenden Erzeugenden der Fläche dienen können. Durch ihre Wahl werden die Erzeugenden zugleich orientiert.

---

[1] Diese Kurven, deren Bilder die Minimalgeraden der Kugel sind, wurden zuerst von Bonnet betrachtet, siehe sein „Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes", Journal de Mathém. pures et appl., 2. Serie, 5. Bd. (1860).

[2] Die systematische Untersuchung der geradlinigen Fläche beginnt wohl bei Monge, vgl. die Anm. zu S. 126.

Wird auf der durch den Punkt (u) der Kurve (1) gehenden Erzeugenden entsprechend dieser Orientierung eine Strecke v zurückgelegt, so ergibt sich der Punkt mit den Koordinaten:

$$(2) \quad x = \varphi(u) + v f(u), \quad y = \chi(u) + v g(u), \quad z = \psi(u) + v h(u).$$

Dies ist demnach eine Darstellung der geradlinigen Fläche mit Hilfe der beiden Parameter u und v, wie in (2), I S. 367. Die Parameterlinien (u) sind die Erzeugenden der Fläche.

Bedeuten α, β, γ die Richtungskosinus der Tangente der Kurve (1), ist nach III (B) also $\alpha = \varphi'$, $\beta = \chi'$, $\gamma = \psi'$, so kommt bei der Fläche (2):

$$x_u = \alpha + v f', \qquad x_v = f,$$

und entsprechende Werte gehen für y_u, y_v und z_u, z_v hervor. Die Fundamentalgrößen erster Ordnung sind somit nach XI (A):

$$(3) \quad E = 1 + 2v \,\mathsf{S}\, \alpha f' + v^2 \,\mathsf{S}\, f'^2, \qquad F = \mathsf{S}\, \alpha f, \qquad G = 1,$$

denn es ist $\mathsf{S}\, \alpha^2 = 1$ und wegen $\mathsf{S}\, f^2 = 1$ auch $\mathsf{S}\, f f' = 0$. Die Summenzeichen beziehen sich hier natürlich auf die zyklische Vertauschung von α, β, γ und f, g, h. Wir wenden nun den Satz 21, S. 50, an, um die orthogonalen Trajektorien der Erzeugenden (u) der Fläche zu bestimmen, die übrigens augenscheinlich keine Minimalkurven sind. Da die Erzeugenden selbst die Gleichung $du = 0$ erfüllen, muß die Differentialgleichung jenes Satzes den Faktor du haben, so daß $C = 0$ zu wählen ist und die Bedingung des Satzes $GA = 2FB$ liefert oder wegen (3) einfach $A = 2B \,\mathsf{S}\, \alpha f$. Die Differentialgleichung des Satzes, nämlich

$$A\, du^2 + 2B\, du\, dv + C\, dv^2 = 0,$$

lautet demnach so:

$$du \,.\, (\mathsf{S}\, \alpha f \,.\, du + dv) = 0\,.$$

Der Faktor $du = 0$ definiert die Erzeugenden, der andere Faktor

$$\mathsf{S}\, \alpha f \,.\, du + dv = 0$$

ihre orthogonalen Trajektorien. Da

$$\mathsf{S}\, \alpha f = \varphi' f + \chi' g + \psi' h$$

eine Funktion von u allein ist, ergibt sich durch Integration

$$\int \mathsf{S}\, \alpha f \,.\, du + v = \text{konst.}$$

als die endliche Gleichung der orthogonalen Trajektorien der Erzeugenden.

Zu zwei verschiedenen Werten a und b der Konstanten gehören zwei verschiedene orthogonale Trajektorien:

$$v = a - \int \mathbf{S}\, \alpha f . du \quad \text{und} \quad v = b - \int \mathbf{S}\, \alpha f . du .$$

Das zwischen ihnen gelegene Stück auf der Erzeugenden (u) hat die Länge $b - a$, ist somit konstant. Wir kommen daher zu dem

Satz 106: Auf einer geradlinigen Fläche, deren Erzeugende keine Minimalgeraden sind, schneiden zwei orthogonale Trajektorien der Erzeugenden auf allen Erzeugenden gleichlange Strecken ab.

Eine der orthogonalen Trajektorien der Erzeugenden wollen wir nun als die Kurve (1), die sogenannte Leitkurve, wählen. Wir legen also durch alle Punkte (u) einer Kurve (1) Geraden, die zu den jeweiligen Tangenten senkrecht sind und deren Richtungskosinus f, g, h also solche Funktionen von u sein sollen, für die nicht nur $\mathbf{S} f^2 = 1$, sondern auch $\mathbf{S}\, \alpha f = 0$ ist. Dann wird F nach (3) gleich Null; dies war nach Satz 15, S. 44, voraus zu sehen, weil jetzt nach Satz 106 jede Parameterlinie (v) eine orthogonale Trajektorie der Erzeugenden (u) ist.

Nach Satz 5, I S. 370, ist die geradlinige Fläche abwickelbar, wenn die Determinante

$$(4) \qquad \Omega = \begin{vmatrix} \varphi' & f & f' \\ \chi' & g & g' \\ \psi' & h & h' \end{vmatrix}$$

den Wert Null hat. Diesen Fall wollen wir ausschließen. Wir setzen also voraus, daß die Fläche weder die Tangentenfläche einer Kurve, noch ein Kegel oder ein Zylinder sei. Dann sind auch die orthogonalen Trajektorien (v) der Erzeugenden nicht lauter Geraden, weil die Fläche sonst, wie man leicht sieht, nur eine Ebene wäre. Daß die Trajektorien keine Minimalkurven erster Ordnung sind, wissen wir; aber man kann auch erkennen, daß sie nicht lauter Minimalkurven zweiter Ordnung sind.

Sonst nämlich liegt jede Kurve (v) in einer Minimalebene

$$(5) \qquad A(v)x + B(v)y + C(v)z = D(v),$$

wo also $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ ist (siehe Satz 15, I S. 243). Einsetzen der Werte (2) liefert dann eine Gleichung

$$(6) \qquad \mathbf{S}\, A(v)\,[\varphi(u) + v f(u)] = D(v),$$

die für alle Werte von u und v gilt. Das Summenzeichen bezieht sich dabei auch auf die zyklische Vertauschung von A, B, C. Zweimalige Differentiation nach u gibt nun:

$$\mathsf{S}\, A(\varphi' + v f') = 0, \qquad \mathsf{S}\, A(\varphi'' + v f'') = 0.$$

Dies sind zwei verschiedene lineare homogene Gleichungen für A, B, C, weil sonst alle Trajektorien (v) Geraden wären. Mithin verhalten sich A, B, C zueinander wie drei ganze Funktionen zweiten Grades von v. Weil ein gemeinsamer Faktor von A, B, C in (5) auf die rechte Seite gebracht werden kann, dürfen wir daher setzen:

$$A = a_0 + a_1 v + a_2 v^2, \quad B = b_0 + b_1 v + b_2 v^2, \quad C = c_0 + c_1 v + c_2 v^2,$$

wobei die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 usw. Konstanten sind. Einsetzen in (6) lehrt, daß D eine ganze Funktion dritten Grades von v sein muß:

$$D = k_0 + k_1 v + k_2 v^2 + k_3 v^3,$$

wo k_0, k_1, k_2, k_3 Konstanten sind. Nunmehr zerfällt (6), weil φ, χ, ψ und f, g, h nur von u abhängen, in die vier Gleichungen:

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathsf{S}\, a_0 \varphi = k_0, \\ \mathsf{S}\, a_1 \varphi + \mathsf{S}\, a_0 f = k_1, \\ \mathsf{S}\, a_2 \varphi + \mathsf{S}\, a_1 f = k_2, \\ \mathsf{S}\, a_2 f = k_3. \end{cases}$$

Die Summenzeichen beziehen sich dabei auch auf die zyklische Vertauschung von a, b, c, während die Indizes 0, 1, 2 bei allen Gliedern einer Summe dieselben sind. Aus $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ ergibt sich noch:

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathsf{S}\, a_0^2 = 0, \quad \mathsf{S}\, a_0 a_1 = 0, \quad \mathsf{S}\, a_1^2 + 2\mathsf{S}\, a_0 a_2 = 0, \\ \mathsf{S}\, a_1 a_2 = 0, \quad \mathsf{S}\, a_2^2 = 0. \end{cases}$$

Ist nun die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden, so gilt dasselbe, wie man leicht durch Quadrieren von Δ sieht, wegen (8) von $\mathsf{S}\, a_0 a_2$. Bezeichnen wir diese konstante Summe mit n und setzen wir für den Augenblick

$$\mathsf{S}\, a_1 \varphi = P(u), \qquad \mathsf{S}\, a_2 \varphi = Q(u),$$

so ergibt sich aus (7) mit Rücksicht auf (8):

$$n \varphi = k_0 a_2 - \tfrac{1}{2} a_1 P + a_0 Q, \qquad n f = a_2 (k_1 - P) - \tfrac{1}{2} a_1 (k_2 - Q) + a_0 k_3,$$

und entsprechende Werte gehen für $n\chi$, $n\psi$ und ng, nh hervor. Da nun $\mathbf{S}\,\varphi'^2 = 1$ sein muß, wird $P'^2 = -2n$, und da $\mathbf{S}\,\varphi' f = 0$, $\mathbf{S}\,f^2 = 1$ sein muß, erkennt man leicht, daß das Quadrat der Determinante Ω, die unter (4) angegeben wurde, gleich Null wird, die Fläche somit gegen die Voraussetzung abwickelbar ist.

Wir nahmen vorhin $\Delta \neq 0$ an. Ist $\Delta = 0$, so gibt es, da a_0, b_0 und c_0 nicht alle drei gleich Null sind, zwei Konstanten p und q derart, daß

$$a_0 + a_1 p + a_2 q = 0, \quad b_0 + b_1 p + b_2 q = 0, \quad c_0 + c_1 p + c_2 q = 0$$

ist. Infolge hiervon vereinfachen sich jetzt die Bedingungen (7). Man erkennt nun leicht, daß sich, da die Leitkurve ($v = 0$) keine Gerade sein soll, auch in diesem Falle ergibt, daß die Determinante Ω verschwindet, also die Fläche gegen die Voraussetzung abwickelbar ist. Wir überlassen es jedoch dem Leser, dies auf Grund der angegebenen Formeln nachzuweisen.

Hiernach gilt der

Satz 107: Wenn eine geradlinige Fläche, deren Erzeugende keine Minimalgeraden sind, nicht-abwickelbar ist, sind auch nicht alle orthogonalen Trajektorien ihrer Erzeugenden Geraden oder Minimalkurven erster oder zweiter Ordnung.

Deshalb gehört die Leitkurve (1) zu denjenigen Kurven, denen ein begleitendes Dreikant sowie Krümmung und Torsion zukommt. Da nun die Erzeugenden der Fläche die Leitkurve senkrecht schneiden sollen, liegen sie in den Normalebenen der Leitkurve. Sind l, m, n und λ, μ, ν die Richtungskosinus der Haupt- und Binormale der Leitkurve, und bildet die durch den Punkt (u) der Leitkurve gehende Erzeugende mit der Hauptnormale dieses Punktes den Winkel ω, so wird also

$$(9) \quad f = l\cos\omega + \lambda\sin\omega, \quad g = m\cos\omega + \mu\sin\omega, \quad h = n\cos\omega + \nu\sin\omega,$$

wie sich durch eine Überlegung ähnlich der in I S. 397 ergibt. Wird nun ω irgendwie als Funktion von u gewählt, so geben die Gleichungen (9) die Werte der Richtungskosinus f, g, h der durch den Punkt (u) der Leitkurve (1) gehenden Erzeugenden, so daß nach (2)

$$(10) \quad \begin{cases} x = \varphi(u) + v(l\cos\omega + \lambda\sin\omega), \\ y = \chi(u) + v(m\cos\omega + \mu\sin\omega), \\ z = \psi(u) + v(n\cos\omega + \nu\sin\omega) \end{cases}$$

die Gleichungen der zu betrachtenden geradlinigen nichtabwickelbaren Fläche sind. Dabei bedeutet u die Bogenlänge der Leitkurve ($v = 0$).

Sind $1:r$ und $1:\varrho$ Krümmung und Torsion der Leitkurve, so gibt die Differentiation der ersten Gleichung (9) nach u infolge von III(C):

$$f' = -\frac{\cos\omega}{r}\alpha - \left(\omega' - \frac{1}{\varrho}\right)(l\sin\omega - \lambda\cos\omega).$$

Wird zur Abkürzung

(11) $$p = \frac{\cos\omega}{r}, \qquad q = \omega' - \frac{1}{\varrho}$$

gesetzt, so daß auch p und q Funktionen von u sind, so kommt also:

(12) $$f' = -p.\alpha - q\sin\omega.l + q\cos\omega.\lambda.$$

Entsprechende Formeln gelten für g' und h'. Mithin gibt (3) mit Rücksicht auf II(A):

(13) $$E = (1 - vp)^2 + v^2 q^2, \qquad F = 0, \qquad G = 1.$$

Somit wird D^2 oder $EG - F^2$ gleich E.

Zur Berechnung der Richtungskosinus X, Y, Z der Flächennormale ist XI(F) zu benutzen. Dabei ist nach (10) wegen (11) III(B) und (C):

(14) $$x_u = (1 - vp)\alpha - vq\sin\omega.l + vq\cos\omega.\lambda, \quad x_v = l\cos\omega + \lambda\sin\omega$$

usw., so daß mit Benutzung von II(C) hervorgeht:

(15) $$DX = -vq.\alpha - (1 - vp)\sin\omega.l + (1 - vp)\cos\omega.\lambda.$$

Zyklische Vertauschung gibt die Werte von DY und DZ.

Schließlich sollen noch die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L, M, N der Fläche berechnet werden. Zunächst gibt (14), nach u differenziert, mit Rücksicht auf III(C) und (11):

$$x_{uu} = v\left(q\frac{\sin\omega}{r} - p'\right)\alpha + \left(\frac{1 - vp}{r} - vq^2\cos\omega - vq'\sin\omega\right)l + (vq'\cos\omega - vq^2\sin\omega)\lambda.$$

Nach (8), S. 122, ist nun DL gleich der Summe $\mathbf{S}\,DXx_{uu}$. Daher gibt die letzte Formel und (15) mit Rücksicht auf II(A):

(16) $$DL = -[(1 - vp)^2 + v^2q^2]\frac{\sin\omega}{r} + v^2p'q + (1 - vp)vq'$$

Nach (14) wird ferner

$$x_{uv} = -p.\alpha - q\sin\omega.l + q\cos\omega.\lambda, \qquad x_{vv} = 0,$$

so daß auf demselben Wege hervorgeht:

(17) $$DM = q, \qquad DN = 0.$$

Nunmehr können wir auch das Krümmungsmaß der geradlinigen Fläche berechnen. Nach (18), S. 265, hat es den Wert

(18) $$K = -\frac{q^2}{[(1 - vp)^2 + v^2 q^2]^2}.$$

Wie nach dem 4. Beispiele, S. 151, vorauszusehen, ist die Krümmung im Falle reeller Erzeugender niemals positiv, da die Fläche keine elliptischen Punkte hat. Nach Satz 101, S. 266, ist die Fläche dann und nur dann abwickelbar, wenn K überall gleich Null, also $q = 0$ ist, was nach (11) bedeutet, daß dann

$$\omega = \int \frac{du}{\varrho} + \text{konst.}$$

sein muß. Diese Formel hat dieselbe Bedeutung wie die Formel

$$\operatorname{arc\,tg} u = \int_0^s \frac{ds}{\varrho} + a \quad (a = \text{konst.})$$

in I S. 409. Die Geraden der Fläche sind in diesem Falle solche Normalen der Leitkurve (1), die eine Kurve auf der Polarfläche der Leitkurve einhüllen. Da wir von den abwickelbaren Flächen absehen, setzen wir in der Folge $q \neq 0$ voraus.

Das Krümmungsmaß K ist nach (18) eine Funktion von u und v, die nicht von v unabhängig ist. Gewiß gibt es also unter den nicht-abwickelbaren geradlinigen Flächen, deren Erzeugende keine Minimalgeraden sind, keine Fläche von konstanter Krümmung.

Die Größe v bedeutet die Entfernung des Punktes (u, v) einer Erzeugenden (u) der Fläche von dem zugehörigen Punkte der Leitkurve (1), und da v in dem Werte (18) von K in besonderer Art vorkommt, kann man Schlüsse machen darüber, wie sich die Krümmung ändert, wenn ein Punkt (u, v) eine Erzeugende der Fläche durchläuft: Strebt v nach Unendlich, so strebt K nach Null. Man kann also mit Rücksicht auf Satz 101, S. 266, sagen, daß die geradlinige Fläche im Unendlichfernen den Charakter einer abwickelbaren Fläche hat, was man sich auch leicht geometrisch erklärt.

Die Ableitung von K nach v ist gleich Null für denjenigen Wert von v, für den die Ableitung von

$$(1 - v p)^2 + v^2 q^2$$

verschwindet, d. h. für den Wert:

(19)
$$v_0 = \frac{p}{p^2 + q^2}.$$

Im reellen Falle ist für diesen Wert die Ableitung zweiter Ordnung von $-K$ nach v negativ, d. h. von allen Punkten einer Erzeugenden (u) hat der Punkt (u, v_0) die absolut gemessene größte Krümmung. Die Stelle (u, v_0) heißt (auch im imaginären Falle) der Mittelpunkt der Erzeugenden (u).[1] In ihm hat die Krümmung den Wert:

(20)
$$K_0 = -\left(\frac{p^2 + q^2}{q}\right)^2.$$

Nach Einsetzen der aus (19) und (20) hervorgehenden Werte

(21)
$$p = \frac{v_0 K_0}{v_0^2 K_0 - 1}, \qquad q = \frac{\sqrt{-K_0}}{v_0^2 K_0 - 1}$$

in (18) stellt sich das Krümmungsmaß K der Stelle (u, v) so dar:

(22)
$$K = \frac{K_0}{[1 - (v - v_0)^2 K_0]^2},$$

also als Funktion des Krümmungsmaßes K_0 des Mittelpunktes (u, v_0) der Erzeugenden (u) und der Entfernung $v - v_0$ des Punktes (u, v) vom Mittelpunkte. Da $v - v_0$ nur im Quadrate vorkommt, haben symmetrisch zum Mittelpunkte einer Erzeugenden gelegene Stellen der Erzeugenden gleich großes Krümmungsmaß.

Zum Mittelpunkte der Erzeugenden (u) kommt man auch, wenn man die Stelle dieser Geraden bestimmt, von der diejenige Gerade ausgeht, die sowohl die Erzeugende (u) als auch eine unendlich benachbarte Erzeugende $(u + du)$ senkrecht schneidet. Dies gemeinsame Lot muß nämlich eine Tangente einer der orthogonalen Trajektorien (v) sein, und diese Tangente hat Richtungskosinus proportional x_u, y_u, z_u. Da nun die unendlich benachbarte Erzeugende $(u + du)$ die Richtungskosinus $f + f' du$, $g + g' du$, $h + h' du$ hat, ist zu fordern, daß nicht nur $\mathbf{S}\, x_u f = 0$, sondern auch

$$\mathbf{S}\, x_u (f + f' du) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \mathbf{S}\, x_u f' = 0$$

sei. Diese Bedingung aber führt nach (12), (14) und II $(\acute{A})$ zu dem schon unter (19) berechneten Werte v_0 von v.

Somit gilt der

[1] Nach Chasles, „Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite“, Correspondance math. et phys. de Quetelet, 11. Bd. (1839).

Satz 108: Auf einer nicht-abwickelbaren geradlinigen Fläche, deren Erzeugende keine Minimalgeraden sind, ist das Krümmungsmaß K der Fläche längs einer Erzeugenden eine Funktion der auf der Geraden gemessenen Abszisse v, und die Ableitung dieser Funktion nach v wird gleich Null für den Fußpunkt des gemeinsamen Lotes dieser Erzeugenden und einer unendlich benachbarten Erzeugenden. Solchen Stellen auf der betrachteten Erzeugenden, die zu diesem Mittelpunkte symmetrisch liegen, kommt gleiches Krümmungsmaß zu. Strebt der Punkt auf der Erzeugenden nach dem Unendlichfernen, so strebt sein Krümmungsmaß nach Null.

Außerdem gilt für den reellen Fall der

Satz 109: Auf einer nicht-abwickelbaren geradlinigen Fläche mit reellen Erzeugenden erreicht der absolute Betrag des Krümmungsmaßes auf einer bestimmten Erzeugenden sein Maximum im Fußpunkte des kürzesten Abstandes der Erzeugenden von einer unendlich benachbarten Erzeugenden.



Fig. 91.

Untersuchen wir jetzt, wie die Tangentenebenen aller Punkte einer Erzeugenden gegeneinander gelegen sind. Sie enthalten sämtlich die Erzeugende selbst. Bewegt sich also ein Punkt P längs einer Erzeugenden, so dreht sich seine Tangentenebene um diese Gerade selbst. In Fig. 91 sollen AP und BQ unendlich benachbarte Erzeugende sein, AB sei ihr gemeinsames Lot, also A der Mittelpunkt der Erzeugenden AP. Es sei $PC \parallel AB$ und $BC \parallel AP$ gezogen. Ferner sei PQ ein Element der durch P gehenden orthogonalen Trajektorie der Erzeugenden, also $PQ \perp PA$. Dann ist die Tangentenebene von P die Ebene der drei Punkte P, Q und A. Rückt P nach A, so geht als Tangentenebene von A die Ebene $PABC$ hervor. Daher ist $\sphericalangle CPQ$ der Winkel der Tangentenebene von P und der Tangentenebene des Mittelpunktes A. Wird $AB = d\sigma$ gesetzt und ist $d\tau$ der Winkel der beiden unendlich benachbarten Erzeugenden AP und BQ, so ist CQ gleich $BC\,d\tau$ oder $AP\,d\tau$ und daher

$$\operatorname{tg} CPQ = AP\frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Bewegt sich P längs der Erzeugenden AP, so behält $d\tau : d\sigma$ seinen Wert, während sich AP oder $v - v_0$ ändert. Der Tangens von $\sphericalangle CPQ$ ist somit proportional zum Abstande $v - v_0$ des Punktes P vom Mittelpunkte A.

Dies ist leicht auch analytisch darzutun: Nach (15) und (13) geht wegen $D = \sqrt{E}$ hervor:

$$X = \frac{-vq \,.\, \alpha - (1 - vp) \sin\omega \,.\, l + (1 - vp)\cos\omega \,.\, \lambda}{\sqrt{(1 - vp)^2 + v^2 q^2}}$$

und wird hierin v durch v_0 ersetzt, so geht der zum Mittelpunkte (u, v_0) gehörige Wert X_0 des Richtungskosinus der Flächennormale hervor. Bezeichnet ϑ den Winkel der Tangentenebenen der Punkte (u, v) und (u, v_0), also auch den ihrer Flächennormalen, so ist $\cos\vartheta$ gleich $\mathbf{S}\, X X_0$. Mit Rücksicht auf II (A) finden wir daher:

$$\cos\vartheta = \frac{v v_0 q^2 + (1 - vp)(1 - v_0 p)}{\sqrt{(1 - vp)^2 + v^2 q^2}\sqrt{(1 - v_0 p)^2 + v_0^2 q^2}}.$$

Hier aber ist der Zähler nach (19) gleich dem zweiten Radikanden. Beide sind gleich $1 - v_0 p$. Es kommt:

$$\cos^2\vartheta = \frac{1 - v_0 p}{(1 - vp)^2 + v^2 q^2},$$

sodaß (21) gibt:

$$\cos^2\vartheta = \frac{1}{1 - K_0 (v - v_0)^2}.$$

Mithin wird:

$$(23) \qquad \operatorname{tg}^2\vartheta = -K_0 (v - v_0)^2.$$

Das Minuszeichen war zu erwarten, da K_0 im reellen Falle negativ ist. Die Formel (23) bestätigt, daß $\operatorname{tg}\vartheta$ zu $v - v_0$ proportional ist. Es hat sich daher aufs neue ergeben:

Satz 110: Bewegt sich ein Punkt längs einer Erzeugenden einer nicht-abwickelbaren geradlinigen Fläche, deren Erzeugende keine Minimalgeraden sind, so dreht sich seine Tangentenebene so um diese Erzeugende, daß der Tangens des Winkels, den sie mit der Tangentenebene des Mittelpunktes der Erzeugenden bildet, zum Abstande des Punktes vom Mittelpunkte proportional ist.[1]

Betrachten wir vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 der Erzeugenden (u); sie gehören zu vier Werten v_1, v_2, v_3, v_4 von v. Auf die Tangentenebene des Mittelpunktes A oder (u, v_0) sei irgendwo ein Lot errichtet.

[1] Die Sätze 110 bis 112 von Chasles, siehe die Anm. zu S. 279.

Die Tangentenebenen jener vier Punkte schneiden auf dem Lote Strecken ab, die zu den zugehörigen Werten von $\operatorname{tg}\vartheta$ proportional sind, also auch zu $v_1 - v_0$, $v_2 - v_0$, $v_3 - v_0$ und $v_4 - v_0$. Nach Satz 57, I S. 452, und Satz 54, I S. 450, folgt daraus der

Satz 111: Auf einer nicht-abwickelbaren geradlinigen Fläche, deren Erzeugende keine Minimalgeraden sind, ist das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Erzeugenden gleich dem Doppelverhältnisse des von ihren Tangentenebenen gebildeten Büschels.

Für $\lim v = \infty$ gibt (23) für $\operatorname{tg}\vartheta$ einen unendlich großen Wert. Dies bedeutet:

Satz 112: Strebt ein Punkt längs einer Erzeugenden einer nicht-abwickelbaren geradlinigen Fläche, deren Erzeugende keine Minimalgeraden sind, ins Unendlichferne, so strebt seine Tangentenebene nach der zur Tangentenebene des Mittelpunktes der Erzeugenden senkrechten Ebene durch die Erzeugende.

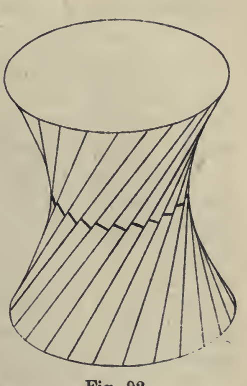
Der Ort der Mittelpunkte A aller Erzeugenden der geradlinigen Fläche heißt ihre Striktionskurve[1]. Im reellen Falle ist sie nach Satz 109 der Ort derjenigen Punkte der Erzeugenden, in denen der absolute Betrag des Krümmungsmaßes längs jeder einzelnen Erzeugenden sein Maximum hat.

1. Beispiel: Da alle Erzeugenden einer gemeinen Schraubenfläche (vgl. das 2. Beispiel auf S. 73 u. f.) die Achse der Fläche senkrecht schneiden, ist diese Achse die Striktionskurve. Der Punkt der Fläche, in dem eine Erzeugende die Achse trifft, hat als Tangentenebene die Ebene der Erzeugenden und der Achse. Entfernt sich ein Punkt auf jener Erzeugenden bis ins Unendlichferne, so strebt seine Tangentenebene nach derjenigen Ebene durch die Erzeugende, die zur Achse senkrecht ist.

In dem soeben besprochenen Beispiele ist die Striktionskurve eine orthogonale Trajektorie der Erzeugenden. Im allgemeinen dagegen ist sie es nicht, denn die Strecke v_0, die sie auf den Erzeugenden abschneidet, ist ja nach (19) im allgemeinen eine Funktion von u und nicht konstant. Dies leuchtet auch geometrisch ein: Die Fußpunkte A der gemeinsamen Lote je zweier unendlich benachbarter Erzeugenden bilden zwar die Striktionskurve, aber es ist nicht zu erwarten, daß diese Lote selbst die Bogenelemente der Kurve enthalten. Deutlich sieht man den Unterschied z. B. beim

[1] Ebenfalls nach Chasles.

reellen einschaligen Rotations-Hyperboloid in Fig. 92, wo die kürzesten Abstände benachbarter Erzeugender eingezeichnet sind. Die Striktionskurve dieser Fläche ist ihr kleinster Kreis, aber die kürzesten Abstände zwischen unendlich benachbarten Erzeugenden kreuzen den Kreis unter einem gewissen Winkel.


Fig. 92.

2. Beispiel: Ein zweites Beispiel einer geradlinigen Fläche, auf der die Striktionslinie eine orthogonale Trajektorie der Erzeugenden ist, gibt die Fläche aller Binormalen einer Kurve (1). Sie wird durch (10) dargestellt, wenn man $\cos\omega = 0$ und $\sin\omega = 1$ wählt. Nach (11) ist dann $p = 0$ und $q = -1:\varrho$, also nach (19) auch $v_0 = 0$, d. h. diese Fläche hat die Leitkurve (1) selbst zur Striktionskurve.

Schließlich erwähnen wir noch die asymptotische abwickelbare Fläche einer geradlinigen Fläche. Sie geht so hervor: Nach Satz 112 hat eine geradlinige Fläche, deren Geraden keine Minimalgeraden sind, ganz bestimmte Tangentenebenen, die sie in den unendlich fernen Punkten ihrer Erzeugenden berühren. Die Gesamtheit dieser besonderen Tangentenebenen wird im allgemeinen eine einfach unendliche Schar sein, die von einer abwickelbaren Fläche eingehüllt wird, und die geradlinige Fläche wird sich dieser abwickelbaren Fläche überall im unendlichfernen asymptotisch nähern. Allerdings kann die abwickelbare Fläche ausarten (vgl. I, § 3 des 3. Abschnittes). Im Falle einer gemeinen Schraubenfläche z. B. sind die Tangentenebenen der unendlich fernen Punkte der Erzeugenden die zur Schraubenachse senkrechten Ebenen, die keine Fläche einhüllen. Die asymptotische abwickelbare Fläche eines einschaligen Hyperboloids ist sein Asymptotenkegel.

§ 17. Flächen von Minimalgeraden.

Im vorhergehenden Paragraphen wurden diejenigen nichtabwickelbaren geradlinigen Flächen behandelt, deren Erzeugende keine Minimalgeraden sind. Ganz anders gestaltet sich die Theorie der Flächen, die von einer einfach unendlichen Schar von Minimalgeraden erzeugt werden. Zu ihrer Untersuchung gehen

wir jetzt über. Auf sie bezieht sich Satz 12, S. 131, neben Satz 11, S. 129. Ihr analytisches Merkmal ist das Bestehen der Gleichung

$$(GL - EN)^2 - 4(EM - FL)(FN - GM) = 0,$$

die nach Satz 14, S. 135, kürzer geschrieben werden kann:

$$H^2 - 4K = 0.$$

Nach S. 159 handelt es sich also um die Flächen mit lauter außergewöhnlichen Punkten. Das sind diejenigen Flächen, bei denen die Gleichung (24), S. 134, für die beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 gleiche Wurzeln $R_1 = R_2$ hat.[1]

Weist eine Fläche mit einer Schar von Minimalgeraden noch eine zweite Geradenschar auf, so ist sie entweder bloß eine Ebene oder nach Satz 30, S. 158, eine nicht-abwickelbare Fläche zweiter Ordnung. Aber alle Geraden einer derartigen Fläche sind bekanntlich parallel zu den Erzeugenden eines nicht zerfallenden Kegels zweiter Ordnung, so daß, wenn die eine Geradenschar aus Minimalgeraden besteht, dasselbe von der anderen Schar gelten muß. Also handelt es sich dann um Kugeln, vgl. Satz 11, S. 129.

Wir fassen demnach eine nicht-abwickelbare Fläche mit einer und nur einer Schar von Minimalgeraden ins Auge. Offenbar ist sie imaginär. Ihre Minimalgeraden bilden nach Satz 82, S. 234, die eine Schar von Haupttangentenkurven; daher ist die andere Schar krummlinig. Sie besteht nicht aus Minimalkurven, denn sonst würden die Gleichungen XI (*O*) und (1), S. 232, übereinstimmen, was nur bei Ebenen und Kugeln der Fall ist (nach Satz 8, S. 128). Auch besteht sie nicht aus Minimalkurven zweiter Ordnung, nach S. 234. Eine der krummen Haupttangentenkurven kann nun ganz beliebig angenommen werden. Die Minimalgeraden der zugehörigen Fläche müssen ja von ihren Punkten ausgehen und in ihren Schmiegungsebenen liegen, weil diese Ebenen nach Satz 81, S. 234, Tangentenebenen sein müssen. In jeder Schmiegungsebene der Kurve gehen in der Tat vom Berührungspunkte zwei verschiedene Minimalgeraden aus. Mithin gibt es zwei verschiedene Flächen von Minimalgeraden, auf denen die angenommene Kurve eine Haupttangentenkurve ist. Die laufenden Koordinaten der Kurven seien ξ, η, ζ, und ihre Bogenlänge sei u. Im übrigen benutzen wir die gewohnten Zeichen $1:r$ und $1:\varrho$ für ihre

[1] Monge gab in dem „Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles", Mém. de l'Acad. des Sciences, Paris 1787 (lu 1784), die analytische Bedingung für $R_1 = R_2$ bei der Darstellung $z = f(x, y)$ der Fläche an.

Krümmung und Torsion sowie $\alpha, \beta, \gamma, l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ für die Richtungskosinus ihres begleitenden Dreikants. Dann sind

$$x = \xi + v\alpha + wl, \quad y = \eta + v\beta + wm, \quad z = \zeta + v\gamma + wn$$

die Gleichungen der Schmiegungsebene des Kurvenpunktes (u), ausgedrückt mittels zweier Parameter u und v. Die Bedingung $\mathbf{S}\, dx^2 = 0$ für Minimalgeraden überhaupt liefert nun für die in dieser Ebene gelegenen Minimalgeraden nach II (A):

$$dv^2 + dw^2 = 0,$$

so daß für sie $w = \pm iv +$ konst. sein muß. Insbesondere ergeben sich die Minimalgeraden durch den Punkt (u) oder (ξ, η, ζ) selbst, wenn $w = \pm iv$ ist. Demnach stellen sich die durch den Punkt (u) der Kurve gehenden Minimalgeraden in der Schmiegungsebene dieses Punktes mittels eines Parameters v so dar:

(1) $$x = \xi + v(\alpha \pm il), \quad y = \eta + v(\beta \pm im), \quad z = \zeta + v(\gamma \pm in).$$

Wird auch u veränderlich gelassen, so liegen die Gleichungen der beiden Flächen vor, ausgedrückt mittels der Parameter u und v. Für die eine Fläche gelten die oberen, für die andere die unteren Vorzeichen, und dies gilt auch im Folgenden. Insbesondere sind die Parameterlinien (u) die Minimalgeraden der Flächen.[1]

Nach III (B) und (C) ist

$$x_u = \left(1 \mp i\frac{v}{r}\right)\alpha + \frac{v}{r}l \mp i\frac{v}{\varrho}\lambda, \qquad x_v = \alpha \pm il$$

usw., so daß nach XI (A) und II (A) die Fundamentalgrößen erster Ordnung F und G gleich 1 und 0 sind. Daher wird $D^2 = -1$, so daß $D = \pm i$ gesetzt werden darf. Nach XI (F) und II (C) sind die Richtungskosinus der Flächennormale

(2) $$X = \pm i\frac{v}{\varrho}(\alpha \pm il) + \lambda$$

und die entsprechenden Werte Y und Z. Somit verhalten sich X_v, Y_v, Z_v wie x_v, y_v, z_v. Dies steht nach Satz 68, S. 214, damit im Einklange, daß die Flächen bloß je eine Schar von Krümmungskurven, nämlich die Minimalgeraden (u), haben (vgl. S. 215). Nach (12), S. 122, berechnet man die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung $M = \pm i : \varrho$ und $N = 0$. Nach Satz 14, S. 135, haben folg-

[1] In den früheren Auflagen wurde zur analytischen Darstellung der Flächen von einer ihrer krummen Minimalkurven als Leitkurve (vgl. S. 274) ausgegangen. Daß es viel zweckmäßiger ist, von einer krummen Haupttangentenkurve auszugehen, wurde brieflich von Engel bemerkt. Ihm ist die sehr einfache Darstellung (1) der Flächen zu verdanken.

lich beide Flächen das von v unabhängige Krümmungsmaß $K = -1:\varrho^2$, das somit längs jeder Minimalgeraden (u) konstant ist. Wenn insbesondere die Torsion $1:\varrho$ der gewählten Haupttangentenkurve konstant ist, kommt beiden Flächen konstante Krümmung $-1:\varrho^2$ zu, und dann haben alle krummen Haupttangentenkurven dieselbe konstante Torsion wie die gewählte.[1]

Der vom Flächenpunkte (x, y, z) um t entfernte Punkt seiner Normale hat die Koordinaten $x + Xt$, $y + Yt$, $z + Zt$, und diese sind, wie (1) und (2) zeigen, für den von v unabhängigen Wert $t = \pm i\varrho$ ebenfalls von v unabhängig, nämlich:

$$(3) \qquad \mathfrak{x} = \xi \pm i\varrho\lambda, \quad \mathfrak{y} = \eta \pm i\varrho\mu, \quad \mathfrak{z} = \zeta \pm i\varrho\nu.$$

Dies besagt: Die Kugel mit dem Mittelpunkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und dem Radius $\pm i\varrho$ berührt die betreffende Fläche überall längs der zum gewählten u gehörigen Minimalgeraden (u). Nun hat aber jede der beiden Flächen eine Schar von Minimalgeraden. Also ergibt sich für jede Fläche eine einfach unendliche Schar von Kugeln, die von der Fläche längs der Minimalgeraden der Fläche berührt werden. Die Flächen heißen deshalb Einhüllende der Kugelscharen.

Übrigens handelt es sich hier um Kugelscharen von besonderer Art: Die Differenzen der Mittelpunktskoordinaten der zu u und $u + du$ gehörigen unendlich benachbarten Kugeln sind nach (3) und III (B) und (C):

$$d\mathfrak{x} = (\alpha \pm il \pm i\varrho'\lambda)du$$

usw., so daß $\mathbf{S}\, d\mathfrak{x}^2$, das Quadrat der Entfernung ihrer Mittelpunkte, nach II (A) gleich $d(\pm i\varrho)^2$, d. h. gleich dem Quadrat der Differenz ihrer Radien, ist. Dies bedeutet, daß unendlich benachbarte Kugeln der Schar einander berühren.[2]

---

[1] Das Vorhandensein dieser geradlinigen Flächen konstanter Krümmung bemerkte zuerst J. A. Serret in seiner „Note sur une équation aux dérivées partielles", Journal de Mathém. p. et appl., 1. Serie 13. Bd. 1848.

[2] Nachdem Monge a. a. O. die Bedingung $R_1 = R_2$ für die Darstellung $z = f(x, y)$ der Flächen aufgestellt hatte, ist er auch der erste gewesen, der versucht hat, alle Flächen zu bestimmen, auf denen $R_1 = R_2$ ist, und zwar in seiner „Application etc.", § 19. Er bemerkte, daß diese Flächen, falls sie keine Kugeln sind, nur eine Schar von Krümmungskurven haben, und zeigte umgekehrt, daß für die Flächen mit nur einer Schar von Krümmungskurven $R_1 = R_2$ ist. Auch gelangte er zu jenen einfach unendlichen Kugelscharen, deren Einhüllende diese Flächen sind; da er aber das Imaginäre mied, fand er als Einhüllungsgebilde der Kugelscharen schließlich doch nur Kurven, nämlich die Örter der Berührungspunkte unendlich benachbarter Kugeln. Auch

Ehe wir diese Betrachtung fortsetzen, ist es angebracht, allgemein über Einhüllende einfach unendlicher Flächenscharen zu sprechen:

Eine einfach unendliche Flächenschar wird durch eine Gleichung

$$F(x, y, z, u) = 0 \tag{4}$$

dargestellt, die außer den laufenden Koordinaten x, y, z eine willkürliche Konstante u enthält, so daß zu jedem Werte von u (innerhalb eines gewissen Bereiches) eine Fläche der Schar gehört. Diese Fläche heiße die Fläche (u). Man muß voraussetzen, daß die Gleichung (4) nicht unabhängig von u sei, d. h. daß die Gleichung $F_u = 0$ nicht infolge von $F = 0$ allein bestehe. Nun heißt eine Fläche eine Einhüllende der Schar, wenn sie jede Fläche (u) der Schar längs einer Kurve berührt und diese Kurven nicht zusammenfallen. Gibt es eine Einhüllende, so kann man sich ihre laufenden Koordinaten x, y, z als Funktionen zweier Parameter u und v denken und dabei annehmen, daß die Parameterlinie (u) diejenige sei, längs deren die Fläche (u) der Schar berührt wird. Dann muß die Gleichung (4) für jeden konstanten Wert von u bei beliebigem v durch die laufenden Koordinaten x, y, z der Einhüllenden befriedigt werden, d. h. für alle Werte von u und v. Außerdem muß die Tangentenebene der Einhüllenden in jedem gemeinsamen Punkte mit der Tangentenebene der Fläche (u) zusammenfallen. Aber die Einhüllende hat nach (3), S. 32, die Tangentenebene:

Serret hat a. a. O. noch nicht erkannt, daß die von ihm entdeckten imaginären Flächen konstanter Krümmung Einhüllende von Kugelscharen sind. Aus einer Angabe bei Stäckel, „Beiträge zur Flächentheorie: I. Zur Theorie der Krümmungslinien", Leipziger Berichte 1896, S. 484, ist zu entnehmen, daß Lie schon etwa 1870 die Flächen von Minimalgeraden getrachtet hat. Sie kommen bei Lie gelegentlich 1872 und 1896 vor, sowie bei Darboux in seinen „Leçons sur la théorie générale des surfaces" 1. Bd. Paris 1887, S. 84, und 3. Bd. Paris 1894, S. 294 und 315. Dann traten sie bei Lie in der Abhandlung „Zur Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen", Leipziger Berichte 1896, auf, und fast gleichzeitig erschien die obengenannte Arbeit von Stäckel, in der dieser, ohne das frühere Vorkommen der Flächen zu kennen, sie aufs neue behandelte. Sie wurden dann wechselsweise in den früheren Auflagen dieses Buches 1902 und 1910 und von Stäckel in der Abhandlung „Beiträge zur Flächentheorie: VIII. Über die Flächen, die nur eine Schar von Krümmungslinien besitzen", Leipziger Berichte 1902, genauer untersucht. Wegen der neueren Literatur seit 1902 verweisen wir außerdem auf Berwald, „Über die Flächen mit einer einzigen Schar zueinander windschiefer Minimalgeraden", Sitzungsberichte der bayr. Akademie 1913. Hier werden die Flächen auf synthetischem Wege gründlich untersucht und insbesondere auch die algebraischen behandelt.

$(y_u z_v - z_u y_v)(\mathfrak{x} - x) + (z_u x_v - x_u z_v)(\mathfrak{y} - y) + (x_u y_v - y_u x_v)(\mathfrak{z} - z) = 0,$
und die Fläche (u) hat nach I S. 310 die Tangentenebene:

$$F_x(\mathfrak{x} - x) + F_y(\mathfrak{y} - y) + F_z(\mathfrak{z} - z) = 0,$$

jedesmal in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$. Mithin müssen F_x, F_y, F_z zu den Determinanten

(5) $$y_u z_v - z_u y_v, \quad z_u x_v - x_u z_v, \quad x_u y_v - y_u x_v$$

proportional sein. Da aber diese Determinanten, multipliziert mit x_u, y_u, z_u, die Summe Null haben, ist alsdann

$$\mathsf{S}\, F_x x_u = 0.$$

Andererseits ergibt sich durch Differentiation der Gleichung (4), die wie gesagt für die Einhüllende gilt, nach dem Parameter u die Gleichung

$$\mathsf{S}\, F_x x_u + F_u = 0.$$

Zieht man hiervon die vorhergehende Gleichung ab, so kommt:

(6) $$F_u = 0.$$

Umgekehrt: Gibt es Funktionen x, y, z von u und v, von denen die Gleichungen (4) und (6) befriedigt werden und für die nicht alle drei Determinanten (5) verschwinden (vgl. S. 6), so stellen sie eine Einhüllende dar. Zum Beweise genügt es zu bemerken, daß aus (4) durch Differentiation $\mathsf{S}\, F_x x_u = - F_u$ und $\mathsf{S}\, F_x x_v = 0$ folgt, so daß wegen (6) sowohl $\mathsf{S}\, F_x x_u$ als auch $\mathsf{S}\, F_x x_v$ gleich Null ist und daher F_x, F_y, F_z zu den Determinanten (5) proportional sind.

Für jeden Wert von u stellen (4) und (6) zusammen diejenige Parameterlinie (u) dar, längs deren die Einhüllende die zugehörige Fläche (u) der Schar berührt. Man kommt zu dieser Kurve auch so: Für jeden gemeinsamen Punkt zweier benachbarter Flächen (u) und $(u + \Delta u)$ der Schar ist $F(x, y, z, u)$ und $F(x, y, z, u + \Delta u)$ gleich Null, daher auch

$$\frac{F(x, y, z, u + \Delta u) - F(x, y, z, u)}{\Delta u} = 0,$$

und hieraus geht für $\lim \Delta u = 0$ die Bedingung (6) hervor. Mithin ist die Kurve, längs deren die Einhüllende die Fläche (u) der Schar berührt, die Schnittkurve dieser Fläche (u) mit einer unendlich benachbarten Fläche der Schar.

Da der Schnitt unendlich benachbarter Flächen in mehrere Kurven zerfallen kann, ist es möglich, daß sich mehrere Einhüllende ergeben. Auch kann es vorkommen, daß die Schnitte unendlich benachbarter Flächen der Schar sämtlich zusammenfallen,

so daß alle Flächen der Schar eine oder einige Kurven gemein haben und gar keine einhüllende Fläche zulassen. Dieser Fall liegt z. B. dann vor, wenn die Gleichung der vorgelegten Flächenschar in u linear ist, also die Form $\varphi u + \psi = 0$ hat, wo φ und ψ nur x, y, z enthalten, da dann (4) und (6) zusammen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, die Gleichungen einer Kurve, liefern.

Wir sagen zusammenfassend:

Satz 113[1]: Wenn die Gleichung

$$F(x, y, z, u) = 0$$

mit einer willkürlichen Konstante u eine einfach unendliche Flächenschar darstellt, indem die Gleichung $F_u = 0$ nicht infolge von $F = 0$ allein besteht, kommen der Schar einhüllende Flächen zu, sobald die durch

$$F = 0 \quad \text{und} \quad F_u = 0$$

bestimmten Schnittkurven unendlich benachbarter Flächen der Schar als geometrische Örter Flächen erzeugen, die alsdann die Einhüllenden sind. Diese Einhüllenden berühren die einzelnen Flächen der Schar längs jener Schnittkurven.

Wir wenden nun diese allgemeinen Betrachtungen auf die Flächenscharen an, die uns vorhin begegneten, nämlich auf einfach unendliche Kugelscharen, die insbesondere so beschaffen sind, daß unendlich benachbarte Kugeln der Schar einander berühren. Wären die Kugeln Nullkugeln (I S. 454), so hätten die Einhüllenden wie diese als Tangentenebenen lauter Minimalebenen, was nach S. 23 auszuschließen ist. Die Mittelpunkte der Kugeln fallen nicht zusammen, denn konzentrische Kugeln mit verschiedenen Radien können einander nicht berühren. Nach S. 78 haben nun zwei einander berührende Kugeln diejenigen beiden verschiedenen Minimalgeraden gemein, die in der gemeinsamen Tangentenebene vom Berührungspunkte ausgehen. Also ergeben sich nach Satz 113 zwei Einhüllende als die geometrischen Örter dieser Geraden, d. h. zwei Flächen mit je einer Schar von Minimalgeraden, wo-

[1] Siehe MONGES „Application etc.", § 6. Die Kurven, längs derer die Einhüllende die einzelnen Flächen der Schar berührt, nennt MONGE die Charakteristiken. Sie spielen eine hervorragende Rolle in seiner geometrischen Theorie der Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Der Sonderfall, in dem die Flächenschar aus Ebenen besteht, wurde in I S. 376 u. f. ausführlich behandelt.

mit wir zum Ausgangspunkte unserer Betrachtungen im gegenwärtigen Paragraphen zurückkommen.

Gar keine Einhüllende ergibt sich nur dann, wenn jene beiden Minimalgeraden für die ganze Schar fest sind, d. h. wenn alle Kugeln einen Punkt und seine Tangentenebene gemein haben. Dann liegen ihre Mittelpunkte auf einer Geraden.

Dieser Schluß läßt sich, wie wir zeigen wollen, umkehren: Wenn eine einfach unendliche Schar von Kugeln vorliegt, in der unendlich benachbarte Kugeln einander berühren, und wenn die Mittelpunkte der Kugeln eine Gerade bilden, haben alle Kugeln der Schar zwei verschiedene Minimalgeraden gemein, so daß ihnen keine Einhüllende zukommt. In der Tat, wir dürfen annehmen, daß jene Gerade, die der Ort der Kugelmitten ist, durch den Anfangspunkt gehe, so daß längs ihrer die Koordinaten zu drei Konstanten a, b, c proportional sind. Dann stellt sich die Kugelschar so dar:

$$(x - au)^2 + (y - bu)^2 + (z - cu)^2 = R^2,$$

wobei man unter dem Radius R eine Funktion des Parameters u zu verstehen hat. Da das Quadrat des Abstandes der Mittelpunkte der zu u und $u + du$ gehörigen Kugeln gleich $(a^2 + b^2 + c^2)\,du^2$ ist, berühren unendlich benachbarte Kugeln der Schar einander, sobald

$$(a^2 + b^2 + c^2)\,du^2 = dR^2$$

ist. Zunächst wollen wir annehmen, daß $a^2 + b^2 + c^2$ nicht gleich Null sei, d. h. daß die Gerade, auf der die Kugelmitten liegen, keine Minimalgerade sei. Dann ergibt sich, daß man nach geeigneter Verschiebung des Achsenkreuzes längs der Geraden annehmen darf, daß

$$(a^2 + b^2 + c^2)\,u^2 = R^2$$

sei. Nunmehr hat die Kugelschar die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(ax + by + cz)u = 0.$$

Da diese Gleichung in u linear ist, gibt es keine einhüllende Fläche; vielmehr haben alle Kugeln das durch die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad ax + by + cz = 0$$

zusammen dargestellte Gebilde gemein. Man beachte, daß alle Kugeln durch den Anfangspunkt gehen. Dort berühren sie sämtlich die zur Mittelpunktsgeraden senkrechte Ebene, und diese Ebene wird durch die letzte Gleichung dargestellt. Beide Gleichungen zusammen bestimmen die in dieser Ebene gelegenen und vom Anfangspunkte ausgehenden Minimalgeraden, die demnach jeder Kugel der Schar angehören. Nunmehr wollen wir annehmen, daß $a^2 + b^2 + c^2$

gleich Null sei, d. h. daß die Mittelpunkte der Kugeln eine Minimalgerade erfüllen. Die vorhin für die Berührung unendlich benachbarter Kugeln aufgestellte Bedingung liefert in diesem Falle $dR = 0$, so daß alle Kugeln denselben Radius R haben müssen. Jetzt wird die Kugelschar durch

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - 2(ax + by + cz)u = 0$$

dargestellt, und da R konstant ist, tritt hier u wieder nur linear auf, so daß es keine einhüllende Fläche gibt. Vielmehr haben alle Kugeln das durch die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \qquad ax + by + cz = 0$$

zusammen dargestellte Gebilde gemein. Es besteht aus den beiden durch

$$bx - ay = \pm icR, \qquad ax + by + cz = 0$$

ausgedrückten parallelen Minimalgeraden der Ebene

$$ax + by + cz = 0,$$

die wegen $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ eine Minimalebene ist. Man erkennt leicht, daß alle Kugeln diese Ebene in dem gemeinsam unendlich fernen Punkte der beiden parallelen Minimalgeraden berühren.

Eine und nur eine Einhüllende gibt es, wenn alle Kugeln eine und nur eine Minimalgerade gemein haben. Längs dieser Minimalgeraden, auf der man den Anfangspunkt annehmen darf, mögen die Koordinaten zu den Konstanten A, B, C proportional sein, wobei also

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0$$

sein soll Diese Minimalgerade gehört nun einer Kugel

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

an, wenn $R^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ist und außerdem die Bedingung

$$Aa + Bb + Cc = 0$$

erfüllt ist. Diese Bedingung sagt aus, daß der Mittelpunkt der Kugel der Ebene

$$Ax + By + Cz = 0$$

angehören muß, die wegen $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ eine Minimalebene ist. Mithin folgt: Wenn alle Kugeln einer einfach unendlichen Kugelschar jene Minimalgerade und sonst keine zweite Minimalgerade gemein haben, ist der Ort ihrer Mittelpunkte eine in dieser Minimalebene gelegene krumme Kurve und keine Gerade, weil ja sonst der vorher erledigte Fall vorläge. Der Ort der Mittelpunkte ist somit eine Minimalkurve zweiter Ordnung (I S. 242).

Auch dieser Schluß läßt sich umkehren: Wenn eine einfach unendliche Schar von Kugeln vorliegt, in der unendlich benachbarte Kugeln einander berühren, und wenn der Ort der Kugelmitten eine Minimalkurve zweiter Ordnung ist, haben alle Kugeln der Schar eine, aber auch nur eine Minimalgerade gemein, so daß ihnen außerdem nur eine einhüllende Fläche zukommt. Nehmen wir nämlich an, der Ort der Kugelmitten sei eine in einer Minimalebene

$$Ax + By + Cz = 0$$

gelegene krumme Kurve $\mathfrak{x} = \varphi(u)$, $\mathfrak{y} = \chi(u)$, $\mathfrak{z} = \psi(u)$, ausgedrückt mittels eines Parameters u, so stellt sich die Kugelschar so dar:

$$(x-\varphi)^2 + (y-\chi)^2 + (z-\psi)^2 = R^2,$$

und dabei muß unter R ebenfalls eine Funktion von u verstanden werden. Die Bedingung dafür, daß unendlich benachbarte Kugeln der Schar einander berühren, ist jetzt:

$$\varphi'^2 + \chi'^2 + \psi'^2 = R'^2.$$

Ferner ist:

$$A\varphi + B\chi + C\psi = 0.$$

Wegen $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ setzen wir $A = iC\cos\gamma$, $B = iC\sin\gamma$, indem wir unter γ eine Konstante verstehen, so daß dann

$$\psi = -i(\varphi\cos\gamma + \chi\sin\gamma)$$

ist, also die Berührungsbedingung übergeht in:

$$(\varphi'\sin\gamma - \chi'\cos\gamma)^2 = R'^2.$$

Da es auf das Vorzeichen von R nicht ankommt, dürfen wir also R' gleich $\varphi'\sin\gamma - \chi'\cos\gamma$ annehmen, d. h. setzen:

$$R = (\varphi - a)\sin\gamma - (\chi - b)\cos\gamma,$$

indem wir unter a und b Konstanten verstehen. Nunmehr hat die Kugelschar die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\varphi x - 2\chi y + 2i(\varphi\cos\gamma + \chi\sin\gamma)z +$$
$$+ 2(\varphi\sin\gamma - \chi\cos\gamma)(a\sin\gamma - b\cos\gamma) - (a\sin\gamma - b\cos\gamma)^2 = 0$$

Diese Gleichung wird aber befriedigt, wenn man

$$x = ivC\cos\gamma + a, \quad y = ivC\sin\gamma + b,$$
$$z = vC - ia\cos\gamma - ib\sin\gamma$$

setzt, wie auch immer der Parameter v gewählt sein mag. Diese drei Gleichungen stellen mittels des Parameters v in der Tat eine Minimalgerade dar, wie zu beweisen war.[1]

[1] Dieser Fall wird von WEICKMANN in seiner Dissertation „Beiträge zur Theorie der Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden“, München 1912, erwähnt.

Schließlich kommen wir noch einmal auf den Fall zurück, wo sich Flächen konstanter Krümmung ergeben. Nach S. 286 sind derartige Einhüllende nur dann zu erwarten, wenn alle Kugeln denselben Radius R haben und ihre Mittelpunkte keine Gerade bilden (da sonst gar keine Einhüllende vorkäme). Weil unendlich benachbarte Kugeln einander nur dann berühren, wenn das Quadrat der Entfernung ihrer Mittelpunkte gleich dem Quadrat der Differenz ihrer Radien ist, hier aber diese Differenz den Wert Null hat, muß das Quadrat jener Entfernung gleich Null sein, d. h. der Ort der Kugelmitten muß eine krumme Minimalkurve (erster Ordnung) sein. Sie kann nach Satz 65, I S. 460, mittels eines Parameters u so dargestellt werden:

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \frac{1}{2}(1-u^2)f''' + uf'' - f', \\ \mathfrak{y} = \frac{i}{2}(1+u^2)f''' - iuf'' + if', \\ \mathfrak{z} = uf''' - f'', \end{cases}$$

wobei f eine Funktion von u bedeutet, deren Ableitung dritter Ordnung $f''' \neq 0$ ist. Die Kugelschar wird durch

$$(8)\qquad \mathbf{S}(x-\mathfrak{x})^2 = R^2$$

dargestellt, und diese Gleichung ist nach Satz 113 hinsichtlich u zu differenzieren, wodurch $\mathbf{S}(x-\mathfrak{x})\mathfrak{x}' = 0$, d. h. nach (7)

$$(9)\qquad (1-u^2)(x-\mathfrak{x}) + i(1+u^2)(y-\mathfrak{y}) + 2u(z-\mathfrak{z}) = 0$$

hervorgeht. Dies ist in den laufenden Koordinaten x, y, z nach (8), I S. 461, die Gleichung der Schmiegungsebene der Minimalkurve (7). Der Schnitt der Kugel (u) der Schar mit einer unendlich benachbarten, von dem wir wissen, daß er aus zwei Minimalgeraden besteht, ist also der Schnitt der Kugel (u) mit dieser Ebene (9). Um die Schnittgerade zu bestimmen, wird man zweckmäßig die Kugel (8) mittels zweier Parameter v und w so darstellen, daß ihre Parameterlinien ihre Minimalgeraden sind, d. h. nach (11), S. 78, so:

$$(10)\qquad x = \mathfrak{x} + \frac{1-vw}{v-w}R, \quad y = \mathfrak{y} + i\frac{1+vw}{v-w}R, \quad z = \mathfrak{z} + \frac{v+w}{v-w}R.$$

Einsetzen dieser Werte in (9) gibt nun entweder $v = u$ oder $w = u$, d. h. die eine Minimalgerade wird durch (10) mittels des Parameters w dargestellt, wenn man $v = u$ annimmt, die andere ebenfalls durch (10), aber mittels des Parameters v, wenn man $w = u$ annimmt. Wird der Parameter auch im ersten Falle mit v bezeichnet, so

stellen sich also die beiden Minimalgeraden mittels des Parameters v so dar, wie es sich aus (10) nach Einsetzen der Werte (7) ergibt:

$$(11)\quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1-u^2)f''(u) + uf'(u) - f(u) \pm \frac{1-uv}{u-v}R, \\ y = \frac{i}{2}(1+u^2)f''(u) - iuf'(u) - if(u) \pm i\frac{1+uv}{u-v}R, \\ z = \qquad uf''(u) - f'(u) \qquad \pm \frac{u+v}{u-v}R. \end{cases}$$

Lassen wir hierin auch u veränderlich, so liegen die Gleichungen der beiden Einhüllenden mit den Parametern u und v vor. Für die eine gelten die oberen, für die andere die unteren Vorzeichen. Man bestätigt leicht, daß beide Flächen das konstante Krümmungsmaß $K = 1 : R^2$ haben.[1]

Die allgemeinen Ergebnisse fassen wir so zusammen:

Satz 114: Die nicht-abwickelbaren Flächen mit einer und nur einer Schar von Minimalgeraden sind die Einhüllenden einfach unendlicher Kugelscharen mit einander berührenden unendlich benachbarten Kugeln. Jedesmal sind zwei verschiedene Einhüllende vorhanden, es sei denn, daß der Ort der Kugelmitten eine Minimalkurve zweiter Ordnung ist, in welchem Falle nur eine Einhüllende auftritt, oder daß er eine Gerade ist, in welchem Fall es gar keine Einhüllende gibt. Die Minimalgeraden, längs derer die Einhüllenden die Kugeln berühren, sind die einzigen Krümmungskurven der Einhüllenden. Ferner ist längs jeder von ihnen das Krümmungsmaß der betreffenden Einhüllenden konstant und zwar gleich dem negativen Quadrat der Torsion der krummen Haupttangentenkurven der Einhüllenden, indem alle diese Haupttangentenkurven in den Schnittpunkten mit irgend einer jener Minimalgeraden dieselbe Torsion aufweisen.

Wenn man beachtet, daß die Gleichungen (11) in dem vorhin ausgeschlossenen Falle $f''' = 0$ beliebige Kugeln darstellen, kann man die auf die Flächen konstanter Krümmung bezüglichen Ergebnisse so aussprechen:

---

[1] Nachdem Stäckel a. a. O. 1896 gezeigt hatte, daß man die geradlinigen Flächen konstanter Krümmung durch Integration einer gewissen gewöhnlichen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung finden kann, wurden sie in der ersten Auflage dieses Buches 1902 explizite mittels zweier Parameter dargestellt. Jedoch traten dabei noch einige Quadraturen auf. Diese beseitigte alsdann Stäckel a. a. O. 1910, indem er die Darstellung (11) gab.

Satz 115: Hat eine geradlinige Fläche eine konstante Krümmung $1:R^2 \neq 0$, so weist sie entweder zwei oder eine Schar von Minimalgeraden auf. Im ersten Fall ist sie eine Kugel. Im zweiten Falle haben alle krummen Haupttangentenkurven der Fläche dieselbe Torsion, und das Quadrat dieser Torsion ist gleich $-1:R^2$. Jede Fläche von dieser Art ist eine Einhüllende von einfach unendlich vielen Kugeln vom Radius R, deren Mittelpunkte eine krumme Minimalkurve (erster Ordnung) bilden. Umgekehrt: Jede Einhüllende einer derartigen Kugelschar ist eine geradlinige Fläche von der konstanten Krümmung $1:R^2$ und hat eine Schar von Minimalgeraden.

§ 18. Die mittlere Krümmung der Flächen.

Das in § 15 aufgestellte Krümmungsmaß entspricht nicht in allen Beziehungen denjenigen Erwartungen, die man von vornherein, ehe man an eine strenge Definition geht, an diesen Begriff zu knüpfen geneigt ist. Man muß sich z. B. erst darein finden, daß die augenscheinlich krummen abwickelbaren Flächen nach Satz 101, S. 266, das Krümmungsmaß Null haben. Später wird sich zeigen, daß das Krümmungsmaß bei einer Verbiegung der Fläche ohne Dehnung ungeändert bleibt. So bedeutsam dieser Umstand an sich ist, so wenig entspricht er doch den Erwartungen, denn bei einer Verbiegung der Fläche ist man geneigt, anzunehmen, daß sich ihre Krümmung ändere. Verschiedene andere Größen sind deshalb als Maß der Krümmung vorgeschlagen worden, so auch diejenige, die wir jetzt betrachten wollen und zu der eine physikalische Frage geführt hat. Man zeigt nämlich in der Physik, daß ein materielles Teilchen an einer Stelle P der Oberfläche einer Flüssigkeit von denjenigen materiellen Teilchen, die in einer Normalschnittebene der Fläche durch den Punkt P gelegen sind, eine Anziehung erfährt, die, abgesehen von einem gewissen Faktor, gleich der Krümmung $1:r$ des Normalschnittes ist. Dabei hat dieser Faktor für alle Normalschnitte des Punktes P einerlei Wert. Will man also die Gesamtanziehung von P, die sogenannte Oberflächenspannung in P ermitteln, so hat man den Mittelwert der Krümmungen aller Normalschnitte von P zu berechnen. Dies geschieht so: Durch die Normale des Punktes P werden lauter Ebenen gelegt, von denen je zwei aufeinander folgende denselben Winkel mit ein-

ander bilden. Alsdann ist das arithmetische Mittel aus den Krümmungen $1:r$ aller dieser Normalschnitte zu bilden für den Fall, wo der erwähnte Winkel unendlich klein wird. Es ist also die Summe alle Krümmungen $1:r$ mit ihrer Anzahl zu dividieren. Dies ist nach Satz 32, S. 161, für einen gewöhnlichen Flächenpunkt P ohne weiteres zu erledigen: Wir bilden die Summe, indem wir paarweise die beiden Krümmungen zusammenfassen, die in zwei zueinander senkrechten Normalschnitten auftreten. Dieses Paar liefert nach jenem Satze den Mittelwert:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),$$

wenn R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien von P sind. Da dieser Wert für alle Paare derselbe ist, muß auch das gesamte arithmetische Mittel gleich diesem Werte sein, der also das Maß der Oberflächenspannung darstellt. Es gilt mithin der

Satz 116: Legt man durch die Normale eines Flächenpunktes P, dessen Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 sind, lauter Schnittebenen, von denen je zwei benachbarte denselben unendlich kleinen Winkel miteinander bilden, so ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

das arithmetische Mittel der Krümmungen aller dieser Normalschnitte.

Die hier auftretende Summe der beiden Hauptkrümmungen, die wir in (27), S. 135, mit H bezeichnet haben, nennt man die mittlere Krümmung der Stelle P der Fläche.[1] Nach (26), ebenda, drückt sie sich durch die Fundamentalgrößen so aus:

$$(1) \qquad H=\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2},$$

und diese Formel soll als Definition der mittleren Krümmung auch für den Fall gelten, wo P kein gewöhnlicher Flächenpunkt ist.

Zur mittleren Krümmung H führt auch die Beantwortung der Frage, wie sich der Inhalt eines unendlich kleinen Flächen-

[1] Übrigens herrscht in dieser Beziehung keine volle Übereinstimmung. Ursprünglich hat man wohl $2H$ als mittlere Krümmung bezeichnet, wie es auch Darboux tut. Wir schließen uns an Bianchi und Stahl-Kommerell an. Vielleicht würde es sich empfehlen, im Hinblicke auf das physikalische Problem die mittlere Krümmung H als die Flächenspannung in P zu bezeichnen.

stückes ändert, wenn man die Fläche selbst einer unendlich kleinen Änderung unterwirft. Wenn man nämlich eine Fläche

(2) $$x = \varphi(u,v), \qquad y = \chi(u,v), \qquad z = \psi(u,v)$$

unendlich wenig ändert, so daß sie in eine unendlich benachbarte Fläche übergeht, wird auf der Normale eines jeden Flächenpunktes (u, v) ein Punkt der unendlich benachbarten Fläche liegen. Wir können daher die Änderung dadurch erzielen, daß wir jeden Punkt (u, v) der Fläche (2) längs seiner Normale um ein unendlich kleines Stück verschieben. Die Größe der Verschiebung wird von Punkt zu Punkt eine andere und daher eine Funktion von u und v sein. Sie habe den Wert

$$\nu(u,v)\,\varepsilon,$$

wobei ε eine nach Null strebende Größe vorstelle, die für alle Punkte (u, v) dieselbe sein soll. Bedeuten X, Y, Z die Richtungskosinus der Flächennormale, so sind

(3) $$\bar{x} = x + X\nu\varepsilon, \qquad \bar{y} = y + Y\nu\varepsilon, \qquad \bar{z} = z + Z\nu\varepsilon$$

die Gleichungen der neuen Fläche, ausgedrückt mittels der Parameter u und v. Jedem Wertepaare u, v gehört ein Punkt der Fläche (2) und ein Punkt der neuen Fläche (3) zu; der zweite Punkt liegt auf der Normale des ersten. Die Fundamentalgrößen erster Ordnung seien auf der neuen Fläche mit $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ bezeichnet. Sie werden sich nur unendlich wenig von den entsprechenden Fundamentalgrößen E, F, G der alten Fläche unterscheiden. Wir wollen sie berechnen.

Zunächst gibt (3):

(4) $$\bar{x}_u = x_u + X_u\nu\varepsilon + X\nu_u\varepsilon, \qquad \bar{x}_v = x_v + X_v\nu\varepsilon + X\nu_v\varepsilon$$

und entsprechende Werte für $\bar{y}_u$, $\bar{y}_v$ sowie $\bar{z}_u$, $\bar{z}_v$. Folglich ist nach XI(A)

$$\bar{E} = \mathsf{S}x_u^2 + 2(\nu\mathsf{S}x_uX_u + \nu_u\mathsf{S}x_uX)\varepsilon + (\nu^2\mathsf{S}X_u^2 + 2\nu\nu_u\mathsf{S}XX_u + \nu_u^2\mathsf{S}X^2)\varepsilon^2.$$

Hierin aber ist $\mathsf{S}x_u^2$ gleich E und $\mathsf{S}x_uX_u$ nach (12), S. 122, gleich $-L$, während $\mathsf{S}x_uX$ und $\mathsf{S}XX_u$ nach XI(H) und (I) gleich Null sind, aber $\mathsf{S}X^2$ gleich Eins ist. Der Wert von $\mathsf{S}X_u^2$ wurde schon in (6), S. 197, gefunden. Danach ergibt sich, indem wir die ebenso für $\bar{F}$ und $\bar{G}$ hervorgehenden Formeln sofort hinzufügen:

(5) $$\begin{cases} \bar{E} = E - 2L\nu\varepsilon + (HL - KE)\nu^2\varepsilon^2 + \nu_u^2\varepsilon^2, \\ \bar{F} = F - 2M\nu\varepsilon + (HM - KF)\nu^2\varepsilon^2 + \nu_u\nu_v\varepsilon^2, \\ \bar{G} = G - 2N\nu\varepsilon + (HN - KG)\nu^2\varepsilon^2 + \nu_v^2\varepsilon^2. \end{cases}$$

Hieraus kann man nun $\bar{D}^2$ oder $\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2$ leicht berechnen. Dabei treten die Ausdrücke

$$EN - 2FM + GL \quad \text{und} \quad LN - M^2$$

auf, die nach Satz 14, S. 135, die Werte $D^2 H$ und $D^2 K$ haben. Setzt man außerdem zur Abkürzung

$$(6) \qquad \begin{cases} P = \frac{1}{D^2}(E v_v^2 - 2F v_u v_v + G v_u^2), \\ Q = \frac{1}{D^2}(L v_v^2 - 2M v_u v_v + N v_u^2), \end{cases}$$

so kommt:

$$(7) \qquad \begin{aligned} \bar{D}^2 = D^2(1 - Hv\varepsilon + Kv^2\varepsilon^2)^2 \\ + D^2[P - 2Qv\varepsilon + (HQ - KP)v^2\varepsilon^2]\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Wenn der absolute Betrag von ε hinreichend klein gewählt wird, kann man die Quadratwurzel hieraus als konvergente unendliche Reihe nach ganzen positiven Potenzen von ε entwickeln. Dabei ist die Wurzel einwertig, weil sie ja für $\varepsilon = 0$ den Wert $\bar{D} = D$ haben muß. Somit kommt:

$$(8) \qquad \bar{D} = D(1 - Hv\varepsilon + \ldots),$$

wobei die Punkte eine konvergente Reihe andeuten.

Nach Satz 16, S. 45, sind

$$dJ = D\,du\,dv, \qquad d\bar{J} = \bar{D}\,du\,dv$$

die Flächendifferentiale der von den Parameterlinien (v), $(v + dv)$ und (u), $(u + du)$ eingeschlossenen Maschen auf der Urfläche (2) und der benachbarten Fläche (3). Aus (8) folgt somit:

$$(9) \qquad \frac{d\bar{J}}{dJ} = 1 - Hv\varepsilon + \ldots$$

oder auch:

$$(10) \qquad \frac{d\bar{J} - dJ}{dJ} = -Hv\varepsilon + \ldots$$

Die linke Seite hierin ist als der Bruchteil zu bezeichnen, um den sich der Inhalt dJ beim Übergange von der Urfläche zur benachbarten Fläche ändert. Strebt ε nach Null, so ergibt sich also der

Satz 117: Ändert sich eine Fläche unendlich wenig, indem jeder Flächenpunkt (u, v) eine Strecke $v(u, v)\varepsilon$ auf seiner Normale zurücklegt, wobei ε eine für alle Punkte gleiche und nach Null strebende Größe bedeute, so ist der Bruchteil, um den sich der Flächeninhalt der an der Stelle (u, v) befindlichen Masche des Netzes der Para-

meterlinien ändert, entgegengesetzt gleich dem Produkte aus der Verschiebungstrecke $\nu\varepsilon$ und der mittleren Krümmung H dieser Stelle.

Ist die Fläche reell, so kann man deshalb durch Annahme passender reeller Verschiebungsstrecken stets erreichen, daß sich die Masche verkleinert, abgesehen von einem Ausnahmefalle, von dem wir sogleich sprechen. Denn man braucht zu diesem Zwecke nur die Strecke $\nu\varepsilon$ mit demselben Vorzeichen wie die mittlere Krümmung H der Stelle zu wählen. Nehmen wir also überall auf der Fläche z. B. $\nu = H$ an, so wird jede Masche des Netzes der Parameterlinien verkleinert; dasselbe gilt, wenn wir allgemeiner

$$(11) \qquad \nu = \varrho H$$

wählen und unter ϱ eine Funktion von u und v verstehen, die überall positiv ist. Nur an solchen Stellen, wo die mittlere Krümmung H gleich Null ist, versagt der Schluß, weil dann in (10) auf der rechten Seite das mit ε behaftete Glied verschwindet und daher für das Vorzeichen das Glied mit ε^2 in Betracht kommt.

Auf der reell gedachten Urfläche (2) sei nun eine reelle geschlossene und sich selbst nicht schneidende Kurve l gezogen. Durch dieselbe Kurve l kann man unzählig viele unendlich benachbarte Flächen legen, indem man die Verschiebungsstrecken im Innern von l beliebig wählt und für die Punkte auf dem Rande l selbst gleich Null annimmt. Wenn man also unter ϱ eine reelle Funktion von u und v versteht, die für alle Punkte (u, v) im Innern von l positiv ist, dagegen auf dem Rande l des Bereiches überall verschwindet, und wenn man dann die Annahme (11) macht, geht eine solche unendlich benachbarte Fläche durch dieselbe Kurve l hervor, die kleineren Flächeninhalt innerhalb l hat als die Urfläche, vorausgesetzt, daß nicht überall im Innern von l auf der Urfläche die mittlere Krümmung H gleich Null wird. Man wird nun eine durch l gelegte Fläche eine Fläche kleinsten Flächeninhaltes in l nur dann nennen, wenn man durch l keine unendlich benachbarte Fläche legen kann, die kleineren Flächeninhalt in l hat. Daraus geht das zunächst nur negative Ergebnis hervor, daß auf einer Fläche kleinsten Flächeninhaltes durch l nirgends die mittlere Krümmung H innerhalb l von Null verschieden sein kann. Flächen kleinsten Flächeninhaltes durch l sind also höchstens unter denjenigen Flächen enthalten, die überall innerhalb l die mittlere Krümmung Null haben. Man nennt deshalb eine

Fläche, die überall die mittlere Krümmung $H = 0$ hat, eine Minimalfläche.[1]

Zu dieser Betrachtung ist allerdings noch mehreres hinzuzufügen: Wir haben nicht untersucht, ob es eine Funktion $\varrho(u, v)$ von der verlangten Eigenschaft gibt. Wir haben ferner vom Flächeninhalte innerhalb l gesprochen, der, wie auf S. 45 bemerkt wurde, in der Integralrechnung als Doppelintegral definiert wird, jedoch unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen für die Kurve l, auf die wir nicht eingehen wollen. Außerdem ist zu beachten, daß unser Ergebnis nur eine notwendige, nicht auch eine hinreichende Bedingung für eine Fläche kleinsten Inhaltes liefert. Schließlich ist zu bemerken, daß wir hier absichtlich, entgegen unserem Brauche, statt einer analytischen eine geometrische Schlußfolgerung angewandt haben. Eine völlig strenge Behandlung der Aufgabe, die Flächen kleinsten Flächeninhaltes zu bestimmen, kann nur in der Variationsrechnung gegeben werden[2]; wir sind gezwungen, darauf zu verzichten.

Wir werden auch künftig von diesen geometrischen Schlüssen gar keinen Gebrauch machen. Sie hatten nur den Zweck, zu erklären, weshalb man diejenigen Flächen, auf denen überall die mittlere Krümmung H gleich Null ist, Minimalflächen nennt. Unsere geometrischen Schlüsse setzten als wesentlich voraus, daß die zu betrachtenden Flächen und ihre Randkurven l reell seien. Man braucht dagegen den Namen Minimalflächen auch für alle imaginären Flächen mit der mittleren Krümmung Null. Ist eine Minimalfläche reell, so kommen von außergewöhnlichen Punkten nur Nabelpunkte in Betracht, in denen jedoch $H \neq 0$ ist, falls nicht insbesondere Flachpunkte vorliegen. Hätte die Fläche lauter Flachpunkte, so wäre sie nach Satz 23, S. 146, eine Ebene. Die Ebenen gehören daher zu den Minimalflächen. Auf einer reellen krummen Minimalfläche hat ein jeder Punkt, der kein Flach-

[1] Lagrange hat die Aufgabe der Bestimmung der Flächen kleinsten Inhaltes zuerst behandelt und zwar als Beispiel bei der Grundlegung der Variationsrechnung in seinem „Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales définies", Miscellanea Taurinensia, 2. Bd., 1760, 61, Turin, siehe auch Oeuvres, 1. Bd. Er nahm die Fläche in der Darstellung $z = f(x, y)$ an und gelangte zu der Bedingungsgleichung

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0,$$

die, wie die Formeln (15) und (16) auf S. 124 zeigen, nach (1) nichts anderes als die Gleichung $H = 0$ ist.

[2] Wir verweisen z. B. auf Bolza, „Vorlesungen über Variationsrechnung", Leipzig 1909, S. 657.

punkt ist, Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2, und die Bedingung $H = 0$ besagt wegen

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

daß diese beiden Hauptkrümmungsradien einander entgegengesetzt gleich sind.[1]

Da die mittlere Krümmung H, abgesehen von einer Konstante, nach S. 296 die Oberflächenspannung einer krummflächig begrenzten Flüssigkeit bedeutet, folgt: Taucht man eine aus einem Drahte hergestellte Kurve l in eine hinreichend zähe Flüssigkeit, so wird diese nach dem Herausnehmen des Drahtes eine in l eingespannte Haut zurücklassen, auf der überall die Spannung möglichst klein, also gleich Null, sein wird, so daß die Haut eine Fläche kleinsten Flächeninhaltes darstellt.[2]

Mit den Minimalflächen werden wir uns im nächsten Paragraphen eingehender beschäftigen.

Jetzt wenden wir uns zurück zu den Formeln (5) und (7), die sich auf die Fundamentalgrößen $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ und auf die Größe $\bar{D}$ bei denjenigen Flächen beziehen, die aus der Urfläche (2) hervorgehen, wenn man auf ihren Normalen die Strecken $v(u, v)\varepsilon$ abträgt. Wählt man die Strecken alle gleich groß, etwa gleich a, so gelangt man zu einer Parallelfläche der Urfläche (vgl. S. 268). Da dann $v = a:\varepsilon$ konstant ist, gibt (5) als die Fundamentalgrößen erster Ordnung der Parallelfläche

$$\bar{x} = x + Xa, \quad \bar{y} = y + Ya, \quad \bar{z} = z + Za \tag{12}$$

die Werte:

[1] Diese geometrische Eigenschaft fand erst Meusnier 1776 in seiner in der Anm. zu S. 120 genannten Abhandlung, allerdings auf Grund nicht strenger geometrischer Betrachtungen.

[2] Siehe Plateau, „Statique expérimentale et théorique des liquides", Gent und Leipzig, 1873. Plateau hat ein Glyzerinseifenwasser angegeben, mittels dessen der Versuch gut gelingt. Eine andere Anweisung ist diese: Man pulverisiere zusammen 10 g reines Kolophonium und 10 g kohlensaures Kali, setze 100 g Wasser zu und koche bis zur vollständigen Lösung; diese Lösung kann man aufbewahren. Vor dem Gebrauche ist sie auf das Vier- bis Fünffache zu verdünnen. Geeignete Drahtgestelle findet man im Modellverlage von Schilling in Leipzig. Wir machen darauf aufmerksam, daß man durch Auflösen von Hausenblase in heißem Wasser mit Zusatz von Spiritus eine Flüssigkeit bekommt, die in hinreichend kleinen Drahtgestellen Häute hinterläßt, die fest werden und monatelang halten. Allerdings sind sie Feuchtigkeitseinflüssen zugänglich und werfen daher nach einiger Zeit Falten, die jedoch nicht allzusehr stören.

$$(13)\quad \begin{cases} \bar{E} = E - 2La + (HL - KE)a^2, \\ \bar{F} = F - 2Ma + (HM - KF)a^2, \\ \bar{G} = G - 2Na + (HN - KG)a^2. \end{cases}$$

Ferner sind jetzt die mit P und Q bezeichneten Größen (6) gleich Null, so daß (7) liefert:

$$\bar{D}^2 = D^2(1 - aH + a^2K)^2$$

also ein vollständiges Quadrat. Beim Ausziehen der Wurzel ergibt sich, da $\bar{D}$ für $a = 0$ gleich D sein muß:

$$(14)\quad \bar{D} = D(1 - aH + a^2K).$$

Statt (13) können wir auch schreiben:

$$(15)\quad \begin{cases} \bar{E} = (1 - a^2K)E - a(2 - aH)L, \\ \bar{F} = (1 - a^2K)F - a(2 - aH)M, \\ \bar{G} = (1 - a^2K)G - a(2 - aH)N, \end{cases}$$

Wir benutzen diese Gelegenheit, um auch die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$ der Parallelfläche (12) zu berechnen. Aus (12) folgt:

$$\bar{x}_u = x_u + X_u a, \quad \bar{y}_u = y_u + Y_u a, \quad \bar{z}_u = z_u + Z_u a,$$

ferner

$$\bar{x}_{uu} = x_{uu} + X_{uu} a, \quad \bar{x}_{uv} = x_{uv} + X_{uv} a, \quad \bar{x}_{vv} = x_{vv} + X_{vv} a$$

usw. Also ist nach (11), S. 122:

$$\bar{D}\bar{L} = \begin{vmatrix} x_{uu} + aX_{uu} & x_u + aX_u & x_v + aX_v \\ y_{uu} + aY_{uu} & y_u + aY_u & y_v + aY_v \\ z_{uu} + aZ_{uu} & z_u + aZ_u & z_v + aZ_v \end{vmatrix}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit D, so kann dies nach XI (L) rechts geschehen, indem wir dort mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix}$$

multiplizieren und dabei Reihe mit Reihe kombinieren. Alsdann ergibt sich zunächst der umständliche Ausdruck:

$$\bar{L}D\bar{D} = \begin{vmatrix} \mathsf{S}\, x_{uu}x_u + a\,\mathsf{S}\, X_{uu}x_u & \mathsf{S}\, x_u^2 + a\,\mathsf{S}\, X_u x_u & \mathsf{S}\, x_v x_u + a\,\mathsf{S}\, X_v x_u \\ \mathsf{S}\, x_{uu}x_v + a\,\mathsf{S}\, X_{uu}x_v & \mathsf{S}\, x_u x_v + a\,\mathsf{S}\, X_u x_v & \mathsf{S}\, x_v^2 + a\,\mathsf{S}\, X_v x_v \\ \mathsf{S}\, x_{uu}X + a\,\mathsf{S}\, X_{uu}X & \mathsf{S}\, x_u X + a\,\mathsf{S}\, X_u X & \mathsf{S}\, x_v X + a\,\mathsf{S}\, X_v X \end{vmatrix}$$

Nach XI (A), (H) und (I) und nach (8) und (12) auf S. 122 vereinfacht sich die Determinante bedeutend. Insbesondere findet man, daß die beiden letzten Elemente der letzten Zeile gleich Null sind, so daß kommt:

$$\bar{L}\,D\,\bar{D} = (L + a\,\mathsf{S}\,X_{uu}\,X)\begin{vmatrix} E - aL & F - aM \\ F - aM & G - aN \end{vmatrix}.$$

Aus $\mathsf{S}\,X_u\,X = 0$ geht durch Differentiation nach u hervor:

$$\mathsf{S}\,X_{uu}\,X = -\,\mathsf{S}\,X_u^2,$$

daher nach (6), S. 197:

$$\mathsf{S}\,X_{uu}\,X = -\,HL + KE,$$

so daß mit Rücksicht auf S. 135 und auf (14) schließlich $\bar{L}$, ausgedrückt durch E, F, G, L, M, N, H, K und a, hervorgeht. Ebenso berechnet man $\bar{M}$ und $\bar{N}$. So ergibt sich:

$$(16)\qquad \begin{cases} \bar{L} = aKE + (1 - aH)L, \\ \bar{M} = aKF + (1 - aH)M, \\ \bar{N} = aKG + (1 - aH)N. \end{cases}$$

Nunmehr kann man auch leicht auf Grund der Formeln des Satzes 14, S. 135, das Krümmungsmaß $\bar{K}$ und die mittlere Krümmung $\bar{H}$ der Parallelfläche berechnen. Es ergibt sich:

$$(17)\qquad \begin{cases} \bar{K} = \dfrac{K}{1 - aH + a^2K}, \\[2ex] \bar{H} = \dfrac{H - 2aK}{1 - aH + a^2K}. \end{cases}$$

Mittels der Formeln (15), (16) und (17) werden die auf die Parallelfläche bezüglichen Größen

$$\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{L}, \bar{M}, \bar{N}, \bar{K}, \bar{H}$$

durch die auf die Urfläche bezüglichen Größen

$$E, F, G, L, M, N, K, H$$

und durch die Konstante a, den Abstand von der Urfläche bis zur Parallelfläche, ausgedrückt.[1] Stillschweigend ist dabei voraus-

[1] Wenn man zur Parallelfläche abermals die Parallelfläche in einem Abstande b konstruiert, gelangt man zu einer Fläche, die sich auch als Parallelfläche der Urfläche im Abstande $a + b$ ergibt. Aus dieser Tatsache geht eine Reihe bemerkenswerter Eigenschaften der Formeln (15), (16) und (17) hervor, von denen wir hier nur eine erwähnen wollen: Wird $b = -a$ gewählt, so kommt man zur Urfläche zurück. Dies bedeutet: Die Auflösungen der Gleichungen (15), (16) und (17) nach den nicht-überstrichenen Größen ergeben sich, wenn man in diesen Gleichungen die überstrichenen Buchstaben mit den entsprechenden nicht-überstrichenen vertauscht und a durch $-a$ ersetzt.

gesetzt, daß sich wirklich eine Fläche ergibt, wenn man alle Punkte der Urfläche auf ihren Normalen um die Strecke a weiterrücken läßt. Es könnte ja sein, daß sich nur einzelne Kurven oder gar nur Punkte ergeben. Beispielsweise hat eine Röhrenfläche, siehe das 2. Beispiel auf S. 220, statt einer gewissen Parallelfläche nur eine Kurve (die mit c bezeichnete Kurve in Fig. 79 daselbst), und eine Kugel vom Radius a führt sogar bloß zu einem Punkte, ihrem Mittelpunkte, wenn man auf ihren Normalen die Strecke a nach innen abträgt.

Die Division der zweiten Gleichung (17) mit der ersten gibt:

$$a = \frac{H\bar{K} - K\bar{H}}{2K\bar{K}}$$

und die Substitution dieses Wertes in die erste Gleichung (17):

$$(18) \qquad \frac{\bar{H}^2 - 4\bar{K}}{\bar{K}^2} = \frac{H^2 - 4K}{K^2},$$

d. h. es ergibt sich der

Satz 118: Ist K das Krümmungsmaß und H die mittlere Krümmung einer Fläche, so bleibt die Funktion

$$\frac{H^2 - 4K}{K^2}$$

der Flächenparameter u und v beim Übergange zu den Parallelflächen ungeändert, falls man allen Punkten einer Normale der Urfläche immer dieselben Parameter u, v zuschreibt.

Nach Satz 14, S. 135, ist

$$H^2 - 4K = \frac{(GL - EN)^2 - 4(EM - FL)(FN - GM)}{D^4}.$$

Der rechts stehende Zähler trat schon öfters auf. Sein Verschwinden ist ja nach S. 159 das Kennzeichen für einen außergewöhnlichen Punkt. Wie schon auf S. 284 gesagt wurde, läßt sich dies Kennzeichen in der Form $H^2 - 4K = 0$ darstellen, d. h. die außergewöhnlichen Flächenpunkte sind diejenigen, für die das Quadrat der mittleren Krümmung gleich dem vierfachen Krümmungsmaße ist. Die Flächen, die eine Schar von Minimalgeraden enthalten, können also auch als diejenigen bezeichnet werden, auf denen überall das Quadrat der mittleren Krümmung gleich dem vierfachen Krümmungsmaße ist.

Kehren wir nun zu Satz 118 zurück, so folgt: Wenn eine Fläche eine Schar von Minimalgeraden hat und auf ihr $K \neq 0$ ist, gilt dasselbe von ihren Parallelflächen. Da K nur auf den abwickelbaren Flächen und Ebenen überall verschwindet, vgl. Satz 101, S. 266, ergibt sich demnach:

Satz 119: Enthält eine nicht-abwickelbare Fläche eine Schar von Minimalgeraden, so gilt dasselbe von ihren Parallelflächen.[1]

Aus den Formeln (17), nämlich

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{K} &= \frac{K}{1 - aH + a^2 K}, \\ \bar{H} &= \frac{H - 2aK}{1 - aH + a^2 K} \end{aligned} \right.$$

können wir noch einige wichtige Schlüsse ziehen: Wir betrachten eine Fläche von konstanter mittlerer Krümmung H und wählen die Konstante

$$a = \frac{1}{H},$$

was möglich ist, sobald die mittlere Krümmung $H \neq 0$ ist. Alsdann geht eine Parallelfläche hervor, die nach der ersten Formel (19) das Krümmungsmaß

$$\bar{K} = H^2$$

hat, also ein konstantes Krümmungsmaß. Daher:

Satz 120: Verschiebt man alle Punkte einer Fläche von konstanter von Null verschiedener mittlerer Krümmung H um die konstante Strecke $1:H$ längs ihrer Normalen, so bilden sie, falls überhaupt dabei eine Fläche hervorgeht, eine Parallelfläche mit dem konstanten Krümmungsmaße H^2.

Wie man sieht, ist der Satz auf die Minimalflächen nicht anwendbar, da bei ihnen H gleich Null ist.

---

[1] WEICKMANN hat in seiner schon früher erwähnten Dissertation von 1912 bemerkt, daß sich dieser Satz des Verf. noch verallgemeinern läßt: Trägt man auf den Normalen einer Fläche mit einer Schar von Minimalgeraden solche Strecken ab, die für alle Flächenpunkte längs einer Minimalgeraden konstant sind, aber von Gerade zu Gerade variieren können, so bilden die Endpunkte wieder eine Fläche mit einer Schar von Minimalgeraden.

Man kann auch umgekehrt verfahren: Es liege eine Fläche von konstantem Krümmungsmaße K vor. Da die rechte Seite der zweiten Formel (19) in H linear gebrochen ist, kann man dann versuchen, a so zu bestimmen, daß sie von H frei wird. Die Bedingung dafür ist:

$$1 : -2aK = -a : (1 + a^2 K)$$

und gibt

$$a^2 = \frac{1}{K}, \quad \text{also} \quad a = \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Diese Annahme ist statthaft, sobald $K \neq 0$ ist. Dann ergibt die zweite Formel (19):

$$\bar{H} = -\sqrt{K}.$$

Da $\sqrt{K}$ zweiwertig ist, gehen somit zwei Parallelflächen von konstanter mittlerer Krümmung hervor. Wir haben also noch den

Satz 121:[1] Verschiebt man alle Punkte einer Fläche von konstantem und von Null verschiedenem Krümmungsmaße K auf ihren Normalen um die Strecke $1:\sqrt{K}$ oder um die Strecke $-1:\sqrt{K}$, so bilden sie, falls überhaupt dabei Flächen hervorgehen, zwei Parallelflächen mit den konstanten mittleren Krümmungen $-\sqrt{K}$ und $\sqrt{K}$.

Die Formeln (17) oder (19) kann man auch, soweit es sich um gewöhnliche Flächenpunkte handelt, unmittelbar aus der Tatsache gewinnen, daß Parallelflächen die Normalen gemein haben (nach Satz 102, S. 268). Sind also R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien eines Flächenpunktes und $\bar{R}_1$ und $\bar{R}_2$ die des entsprechenden Punktes der Parallelfläche im Abstande a, so ist:

$$\bar{R}_1 = R - a, \quad \bar{R}_2 = R_2 - a.$$

Während

(20) $$K = \frac{1}{R_1 R_2}, \quad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ist, kommt also:

$$\bar{K} = \frac{1}{(R_1 - a)(R_2 - a)}, \quad \bar{H} = \frac{1}{R_1 - a} + \frac{1}{R_2 - a}.$$

Elimination von R_1 und R_2 aus diesen Gleichungen vermöge (20) liefert die Formeln (17).

---

[1] Siehe Bonnet, „Sur une propriété de maximum relative à la sphère"; Nouv. Ann. de Mathém. (1. Serie) 12. Bd. (1853).

§ 19. Minimalflächen.

Im vorigen Paragraphen, auf S. 300, wurden die Minimalflächen als diejenigen Flächen definiert, deren mittlere Krümmung H überall gleich Null ist. Wir wollen diese Flächen jetzt etwas eingehender behandeln.

Vorweg beantworten wir die Frage nach allen denjenigen Minimalflächen, die eine Schar von Minimalgeraden enthalten, weil die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden überhaupt eine besondere Stellung einnehmen. Nach S. 304 ist das Krümmungsmaß einer Fläche mit einer Schar von Minimalgeraden gleich $\frac{1}{4}H^2$; es muß daher gleich Null sein, wenn die Fläche eine Minimalfläche sein soll. Mithin handelt es sich nach Satz 101, S. 266, um eine abwickelbare Fläche (vgl. S. 260), also um einen Zylinder, dessen Erzeugende Minimalgeraden sind, und der nicht etwa in eine Minimalebene ausartet. Nach I S. 389 stellen wir einen derartigen Zylinder in der Form

$$(1) \qquad x = \varphi(u) + av, \quad y = \chi(u) + bv, \quad z = \psi(u) + cv$$

dar, wobei die Konstanten a, b, c die Bedingung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

erfüllen müssen. Hier ist $G = 0$ und nach (11), S. 122, auch $M = N = 0$, mithin die mittlere Krümmung H nach (1), S. 296, in der Tat gleich Null. Daher gilt der

Satz 122: Eine Fläche mit einer Schar von Minimalgeraden ist dann und nur dann eine Minimalfläche, wenn die Geraden einander parallel sind, die Flache also ein Zylinder von Minimalgeraden ist.

Zu denselben Flächen kommt man, wenn man fragt, welche Zylinder überhaupt Minimalflächen sind. Da (1) einen allgemeinen Zylinder darstellt, wenn man die drei Konstanten a, b, c irgendwie wählt, und da infolge von (1) die Fundamentalgrößen M und N gleich Null sind, geht die Bedingung $H = 0$ über in $GL = 0$. Ist $L \neq 0$, so muß also $G = 0$, d. h. $a^2 + b^2 + c^2$ gleich Null sein, sodaß man zu den Zylindern von Minimalgeraden kommt. Ist $L = 0$, so artet der Zylinder nach Satz 23, S. 146, in eine Ebene aus. Von den Minimalebenen ist jedoch abzusehen, da auf ihnen $D = 0$ ist. Demnach haben wir den

Satz 123: Ein Zylinder ist dann und nur dann eine Minimalfläche, wenn seine Erzeugenden Minimalgeraden sind, er aber nicht in eine Minimalebene ausartet.[1]

Aus Satz 122 folgt, daß eine nicht-zylindrische Minimalfläche keine Schar von Minimalgeraden enthält. Ihre Punkte allgemeiner Lage sind deshalb gewöhnliche Punkte mit Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2. Wegen

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

und wegen $H = 0$ kann man sie daher als eine Fläche definieren, die an jeder Stelle entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat, vgl. S. 301. Im reellen Falle ist die Fläche somit hyperbolisch gekrümmt; ihre Indikatrix-Kegelschnitte sind gleichseitige Hyperbeln. Daraus wie auch aus Satz 86, S. 240, folgt:

Satz 124: Die nicht-zylindrischen Minimalflächen sind diejenigen Flächen, auf denen die Haupttangentenkurven ein Orthogonalsystem bilden[2].

Den Satz 98, S. 261, können wir jetzt so aussprechen:

Satz 125: Die sphärische Abbildung ist nur für die Kugeln und für die nicht-zylindrischen Minimalflächen konform.

Wir betrachten nun zunächst einige Beispiele.

1. Beispiel: Fragen wir nach den Rotationsflächen, die Minimalflächen sind, so sind zunächst die Ebenen zu nennen. Daß dabei von den Minimalebenen abzusehen ist, brauchen wir künftig nicht hervorzuheben, da wir grundsätzlich alle Flächen ausschließen, auf denen $D = 0$ ist (nach S. 18). Im Übrigen wird die Frage durch den Satz 20, S. 143, beantwortet. Wir finden also:

Satz 126: Rotationsflächen und zugleich Minimalflächen sind nur die Ebenen und die Katenoide.[3]

---

[1] Vgl. Study, „Über einige imaginäre Minimalflächen", Leipziger Berichte 1911.

[2] Dies bemerkte Bonnet 1860 in der in der Anm. zu S. 272 genannten Abhandlung.

[3] Läßt man entgegen unserer Annahme auf S. 48 als Rotationen auch solche Bewegungen zu, bei denen alle Punkte einer Minimalgeraden (als Rotationsachse) in Ruhe bleiben, so treten allerdings noch gewisse imaginäre Minimalflächen hinzu, die Geiser bestimmte. Siehe: „Zur Erzeugung von Minimalflächen durch Scharen von Kurven vorgeschriebener Art", Sitzungsberichte d. Akad. zu Berlin, 1904. Vgl. hierzu die in der ersten Anm. erwähnte Arbeit von Study sowie die Abhandlung von Beck: „Die Gruppe der Minimalgeraden", Leipziger Berichte 1912.

2. Beispiel: Wir fragen nach den geradlinigen Minimalflächen. Nach unserm Satze 122 gehören dazu die Zylinder von Minimalgeraden. Wenn von Zylindern abgesehen wird, können die Erzeugenden der Fläche keine Minimalgeraden sein. Nun sind die Erzeugenden aber nach Satz 82, S. 234, Haupttangentenkurven. Ihre orthogonalen Trajektorien müssen daher nach Satz 124 ebenfalls Haupttangentenkurven sein. Sie sind aber keine Geraden, denn sonst wäre die Fläche eine Ebene, die zu den soeben ausgeschlossenen zylindrischen Minimalflächen gehört. Die orthogonalen Trajektorien haben daher Hauptnormalen, und diese Hauptnormalen müssen nach Satz 81, S. 234, die Erzeugenden der Fläche sein. Ebene Kurven können die Trajektorien deshalb nicht sein, weil sonst alle Erzeugenden in einer Ebene liegen würden, wir also abermals zum ausgeschlossenen Falle der Ebenen zurückkämen. Auch sind sie keine Minimalkurven, weil sonst die Erzeugenden Minimalgeraden sein müßten. Mithin bilden die orthogonalen Trajektorien der Erzeugenden eine Kurvenschar mit lauter gemeinsamen Hauptnormalen, so daß nach Satz 42, I S. 438, nur zwei Möglichkeiten übrig bleiben: Entweder sind die orthogonalen Trajektorien gemeine Schraubenlinien oder solche Kurven konstanter Krümmung und konstanter Torsion, bei denen das Verhältnis aus Torsion und Krümmung gleich i oder $-i$ ist. Die Hauptnormalen einer gemeinen Schraubenlinie treffen ihre Achse nach dem Beispiele in I S. 253 senkrecht und bilden daher eine gemeine Schraubenfläche, von der wir schon wissen, daß sie eine Minimalfläche ist, weil wir in dem 3. Beispiele auf S. 136 sahen, daß für sie die mittlere Krümmung $H = 0$ ist.[1]

Außerdem ist nun noch die Annahme zu machen, daß die Fläche von den Hauptnormalen einer imaginären Kurve konstanter Krümmung $1:r$ und konstanter Torsion mit dem Verhältnisse i oder $-i$ aus Torsion und Krümmung erzeugt wird, deren Gleichungen wir nach Satz 37, I S. 306, so ansetzen können:

$$x = \frac{s^3}{6r^2} - s, \qquad y = -\frac{is^3}{6r^2}, \qquad z = -\frac{s^2}{2r}.$$

Doch kann statt i auch $-i$ gewählt werden. Hier ist s die Bogenlänge, r der konstante Krümmungsradius, so daß die Richtungskosinus der Hauptnormale nach III (B) die Werte

$$l = \frac{s}{r}, \qquad m = -\frac{is}{r}, \qquad n = -1$$

haben und also

$$x = \frac{u^3}{6r^2} - u + \frac{u}{r}v, \qquad y = -\frac{iu^3}{6r^2} - \frac{iu}{r}v, \qquad z = -\frac{u^2}{2r} - v \tag{2}$$

die Gleichungen der Fläche der Hauptnormalen sind, ausgedrückt mittels der beiden Parameter u und v. Nach XI (A) ist hier $F = 0$, d. h. die Parameterlinien (v) sind die orthogonalen Trajektorien der Hauptnormalen, wie nach Satz 106, S. 274, zu erwarten war. Ferner sind L und N nach (11), S. 122, gleich Null, so daß $H = 0$ wird, die Fläche also in der Tat eine Minimalfläche ist. Man erkennt, wie wiederum nach Satz 42, I S. 438, zu erwarten war, daß jede Parameterlinie (v) ebenso wie die Kurve ($v = 0$) konstante Krümmung und kon-

[1] Die ersten reellen krummen Minimalflächen fand Meusnier 1776, siehe die Anm. zu S. 120, und zwar waren es die gemeinen Schraubenflächen und die Katenoide.

stante Torsion mit dem Verhältnisse i aus Torsion und Krümmung hat, und zwar hat sie den Krümmungsradius $r - 2v$. Daraus ist zu schließen, daß die Konstante r in (2) keine wesentliche Rolle spielt, d. h. daß zwei Flächen (2) mit verschiedenen Werten der Konstante r mit einander kongruent sind. Dies bestätigen wir so: Bedeutet a irgend eine Konstante, so stellen die in x, y, z linearen Gleichungen

$$\bar{x} = \frac{(r-a)x + iay}{\sqrt{r(r-2a)}}, \quad \bar{y} = \frac{-iax + (r-a)y}{\sqrt{r(r-2a)}}, \quad \bar{z} = z + a$$

eine Bewegung dar, weil die Koeffizienten von x, y, z die in Tafel I angegebenen Bedingungen erfüllen. Führt man hierin die Werte (2) von x, y, z ein und benutzt man dann als neue Parameter die Funktionen

$$\bar{u} = \frac{r-2a}{\sqrt{r(r-2a)}}u, \quad \bar{v} = v - a,$$

so gehen wieder die Gleichungen (2) hervor, geschrieben in den überstrichenen Buchstaben und mit dem Unterschiede, daß nunmehr $r - 2a$ an der Stelle von r steht. Damit ist der Beweis geführt. Insbesondere können wir a so wählen, daß $r - 2a$ den Wert Eins bekommt, d. h. die Fläche (2) ist kongruent mit der Fläche:

$$(3) \qquad x = \frac{1}{6}u^3 - u + uv, \quad y = -\frac{i}{6}u^3 - iuv, \quad z = -\frac{1}{2}u^2 - v.$$

Jetzt hat die orthogonale Trajektorie (v) der Erzeugenden (u) den Krümmungsradius $1-2v$, sodaß ihre Krümmung und damit auch ihre Torsion für $\lim v = \infty$ nach Null strebt. Man kann also sagen, daß die unendlich ferne Trajektorie $(v = \infty)$ eine Gerade ist. Deshalb kann die Fläche als Ausartung einer gemeinsamen Schraubenfläche, nämlich für den Fall einer unendlich fernen Schraubenachse, angesehen werden. Elimination von u und v aus (3) zeigt, daß die Fläche eine algebraische Fläche dritter Ordnung

$$(4) \qquad (x - iy)^3 + 3(x - iy)z - 3iy = 0$$

ist. Man muß sich daran erinnern, daß i durch $-i$ ersetzt werden darf. Somit kommt

Satz 127: Außer den Ebenen, gemeinen Schraubenflächen und Zylindern von Minimalgeraden gibt es noch solche geradlinige Minimalflächen, deren Erzeugende die imaginären Hauptnormalen irgend einer solchen Kurve konstanter Krümmung und Torsion sind, bei der das Verhältnis aus Torsion und Krümmung gleich i oder $-i$ ist. Alle diese Flächen sind kongruent mit einer der beiden durch

$$(x \mp iy)^3 + 3(x \mp iy)z \mp 3iy = 0$$

dargestellten Flächen dritter Ordnung. Dabei gilt überall entweder das obere oder das untere Vorzeichen.[1]

[1] Daß eine Fläche mit einer reellen Geradenschar nur dann zu den Minimalflächen gehört, wenn sie eine Ebene oder gemeine Schraubenfläche ist, bewies CATALAN: „Sur les surfaces réglées dont l'aire est un minimum", Journ. de Math. p. et appl. 1. Serie, 7. Bd. (1842). Die imaginären

Wir nehmen jetzt die Aufgabe in Angriff, alle Minimalflächen zu bestimmen.[1] Als Parameterlinien (u) und (v) wählen wir dabei die beiden Scharen von Minimalkurven, sodaß nach Satz 14, S. 44, $E = G = 0$ wird. Damit die mittlere Krümmung H gleich Null sein soll, ist darum nach (1), S. 296, notwendig und hinreichend, daß $M = 0$ wird. Das Verschwinden von M besagt aber nach Satz 88, S. 242:

Satz 128: Eine nicht-zylindrische Fläche ist dann und nur dann eine Minimalfläche, wenn ihre Minimalkurven ein Netz von konjugierten Kurven bilden.

Nach Satz 89, S. 243, besteht also eine Gleichung von der Form

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\, \partial v} = A(u, v)\frac{\partial \vartheta}{\partial u} + B(u, v)\frac{\partial \vartheta}{\partial v},$$

sobald man darin für ϑ irgend eine der drei rechtwinkligen Koordinaten x, y, z der Fläche einsetzt. Es gibt demnach zwei Funktionen A und B von u und v derart, daß

$$x_{uv} = A x_u + B x_v, \quad y_{uv} = A y_u + B y_v, \quad z_{uv} = A z_u + B z_v$$

ist. Da $E = 0$, d. h. $\mathbf{S}\, x_u^2 = 0$ ist, woraus man $\mathbf{S}\, x_u x_{uv} = 0$ durch Differentiation nach v folgert, ergibt sich durch Multiplikation der drei Gleichungen mit x_u, y_u, z_u und Addition, daß $BF = 0$ ist. Ebenso kommt $AF = 0$. Wegen $E = G = 0$ ist aber $F \neq 0$ (nach S. 15), daher $A = B = 0$. Mithin ist

$$x_{uv} = 0, \quad y_{uv} = 0, \quad z_{uv} = 0.$$

---

geradlinigen Minimalflächen dritter Ordnung entdeckte Lie: „Beiträge zur Theorie der Minimalflächen, I", Math. Annalen 14. Bd. (1879). Study wies in der in der 1. Anm. zu S. 308 genannten Arbeit darauf hin, daß die auftretende willkürliche Konstante r unwesentlich ist.

[1] Wie in der 1. Anm. zu S. 300 gesagt wurde, stellte Lagrange die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für alle Minimalflächen $z = f(x, y)$ auf; aber er integrierte sie nicht. Monge beging bei ihrer Integration Irrtümer in dem „Mémoire etc." von 1784 (siehe die Anm. zu S. 284). Darauf machte Legendre in seinem „Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux dérivées partielles", Mém. de l Acad., Paris 1787, aufmerksam. Er bemerkte darin zugleich, daß Monge mittlerweile die wahre Lösung gefunden und ihm mitgeteilt habe, und zeigte, wie er selbst sie alsdann ebenfalls gefunden habe. Die Formeln von Legendre sind im Gegensatze zu denen von Monge frei von Integrationszeichen. Die richtige Methode von Monge steht in seiner „Application etc.", § XX. Eine andere Methode, die auch von Monge herrührt, findet sich im 9. Kapitel des „Traité du calcul differéntiel et du calcul intégral" von Lacroix, 2. Aufl., 2. Bd., Paris 1814. Dort steht der wichtige Satz 129 des Textes.

Dies bedeutet, daß x, y, z die Formen haben:

(5) $$x = U_1(u) + V_1(v), \quad y = U_2(u) + V_2(v), \quad z = U_3(u) + V_3(v),$$

wo U_1, U_2, U_3 Funktionen von u allein und V_1, V_2, V_3 Funktionen von v allein sind. Daß die Parameterlinien Minimalkurven sein sollen, wird durch die beiden Bedingungen

(6) $$U_1'^2 + U_2'^2 + U_3'^2 = 0, \quad V_1'^2 + V_2'^2 + V_3'^2 = 0$$

ausgedrückt.

Umgekehrt: Wenn bei der Fläche (5) die Bedingungen (6) bestehen, ist $E = G = 0$, aber auch $M = 0$, weil x_{uv}, y_{uv}, z_{uv} verschwinden, daher auch $H = 0$, so daß eine Minimalfläche vorliegt, vorausgesetzt, daß $D \neq 0$ ist. Wegen $E = G = 0$ wird nun $D^2 = -F^2$, d. h. $D \neq 0$, sobald

$$F = U_1' V_1' + U_2' V_2' + U_3' V_3' \neq 0$$

ist. Zunächst sind also die Fälle auszuschließen, wo U_1', U_2', U_3' oder V_1', V_2', V_3' gleich Null sind, wo also U_1, U_2, U_3 oder V_1, V_2, V_3 Konstanten sind. Sind sie es nicht, so würde nach (6) aus $F = 0$ folgen, daß sich U_1', U_2', U_3' und auch V_1', V_2', V_3' wie die drei zweireihigen Determinanten

$$U_2' V_3' - U_3' V_2', \quad U_3' V_1' - U_1' V_3', \quad U_1' V_2' - U_2' V_1'$$

zu einander verhielten. Da jedoch U_1, U_2, U_3 nur von u und V_1, V_2, V_3 nur von v abhängen, müßten also sowohl U_1', U_2', U_3' als auch V_1', V_2', V_3' zu denselben drei Konstanten proportional sein. Dieser Fall ist somit auch auszuschließen. Also gilt der

Satz 129: Jede nicht-zylindrische Minimalfläche läßt sich in jeder Lage so darstellen:

$$x = U_1(u) + V_1(v), \quad y = U_2(u) + V_2(v), \quad z = U_3(u) + V_3(v).$$

Dabei sind U_1, U_2, U_3 Funktionen von u allein und V_1, V_2, V_3 Funktionen von v allein, die den Bedingungen

$$U_1'^2 + U_2'^2 + U_3'^2 = 0, \quad V_1'^2 + V_2'^2 + V_3'^2 = 0$$

genügen. Außerdem dürfen weder U_1, U_2, U_3 noch V_1, V_2, V_3 sämtlich Konstanten sein, und überdies darf es keine drei Konstanten c_1, c_2, c_3 derart geben, daß U_1', U_2', U_3' und zugleich V_1', V_2', V_3' zu c_1, c_2, c_3 proportional wären.

Nach dem Beispiele auf S. 243 u. f. besagen die Gleichungen (5), daß die Parameterlinien (u) kongruent und gleichgestellt sind und ebenso die Parameterlinien (v), d. h. daß die Minimalflächen Schiebungsflächen sind, entstehend durch Verschiebung einer Minimal-

kurve[1] längs einer anderen. Diese Minimalkurven können auch geradlinig sein, was eintritt, wenn sich U_1', U_2', U_3' oder V_1', V_2', V_3' wie Konstanten zu einander verhalten. Die Bedingungen des Satzes 129 schließen nur den Fall aus, wo alle Parameterlinien (u) und (v) parallele Minimalgeraden sind, was ja auch geometrisch einleuchtet. Denn durch Schiebung einer Minimalgeraden längs einer anderen entsteht ja nur dann eine Fläche, nämlich eine Ebene, wenn beide Geraden verschiedene Richtungen haben. Das Ergebnis läßt sich also geometrisch etwas allgemeiner so fassen:

Satz 130: Jede Minimalfläche ist eine Schiebungsfläche, indem sie dadurch hervorgeht, daß sich eine Minimalkurve mit einem ihrer Punkte längs einer zweiten Minimalkurve verschiebt. Die Minimalkurven können auch geradlinig sein, aber wenn beide gerade sind, müssen sie verschiedene Richtung haben. Im Übrigen sind die Minimalkurven keiner weiteren Bedingung unterworfen.

3. Beispiel: Um die im zweiten Beispiele gewonnene imaginäre Minimalfläche dritter Ordnung

$$(7) \qquad x = \frac{1}{6}u^3 - u + uv, \qquad y = -\frac{i}{6}u^3 - iuv, \qquad z = -\frac{1}{2}u^2 - v$$

als Schiebungsfläche von Minimalkurven zu konstruieren, bedenken wir, daß hier $E = 1 - 2v$, $F = 0$, $G = 1$ und also

$$(1 - 2v)\,du^2 + dv^2 = 0$$

die Differentialgleichung der Minimalkurven ist, vgl. Satz 18, S. 46. Da sich die Gleichung in

$$du + \frac{dv}{\sqrt{2v-1}} = 0 \qquad \text{und} \qquad du - \frac{dv}{\sqrt{2v-1}} = 0$$

zerlegen läßt, ist längs der Minimalkurven der einen bezw. anderen Schar

$$u + \sqrt{2v-1} = \text{konst.} \qquad \text{bzw.} \qquad u - \sqrt{2v-1} = \text{konst.}$$

Um die Minimalkurven als Parameterlinien einzuführen, nehmen wir deshalb die neuen Parameter

$$\bar{u} = \frac{1}{2}\left(u + \sqrt{2v-1}\right), \qquad \bar{v} = \frac{1}{2}\left(u - \sqrt{2v-1}\right)$$

an, d. h. wir setzen:

$$u = \bar{u} + \bar{v}, \qquad v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\bar{u} - \bar{v})^2.$$

---

[1] Diese einfache geometrische Deutung gab erst Lie der Mongeschen Darstellung der Minimalflächen. Siehe die Anm. zu S. 244.

Dann gehen die Gleichungen (7) über in:

$$(8)\qquad \begin{cases} x = \frac{2}{3}\bar{u}^3 - \frac{1}{2}\bar{u} + \frac{2}{3}\bar{v}^3 - \frac{1}{2}\bar{v}, \\ y = -\frac{2i}{3}\bar{u}^3 - \frac{i}{2}\bar{u} - \frac{2i}{3}\bar{v}^3 - \frac{i}{2}\bar{v}, \\ z = -\bar{u}^2 - \bar{v}^2 - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

In der Tat sind jetzt x, y, z Summen von Funktionen von nur je einem der beiden neuen Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$.

Die zylindrischen Minimalflächen sind uns nach Satz 123 schon bekannt; sie werden nach dem Verfahren in Satz 130 gewonnen, wenn man eine der beiden Minimalkurven geradlinig wählt. Sehen wir also von den zylindrischen Minimalflächen ab, so werden wir beide Minimalkurven krummlinig zu wählen haben.

Wir haben in Satz 130 oder Satz 129 ein Mittel gewonnen, die Gleichungen einer beliebigen nicht-zylindrischen Minimalfläche aufzustellen, denn die krummen Minimalkurven

$$x = U_1(u), \quad y = U_2(u), \quad z = U_3(u)$$

und

$$x = V_1(v), \quad y = V_2(v), \quad z = V_3(v),$$

die wir dabei gebrauchen, können nach Satz 64, I S. 459, so dargestellt werden:

$$(9)\quad x = \frac{1}{2}\int(1-u^2)U(u)du, \quad y = \frac{i}{2}\int(1+u^2)U(u)du, \quad z = \int u\,U(u)du$$

und:

$$(10)\quad x = \frac{1}{2}\int(1-v^2)V(v)dv, \quad y = \frac{i}{2}\int(1+v^2)V(v)dv, \quad z = \int v\,V(v)\,dv,$$

wobei U eine von Null verschiedene Funktion von u allein und V eine von Null verschiedene Funktion von v allein bedeutet. Wir ziehen es aber vor, in (10) den Faktor i durch $-i$ zu ersetzen. Daß dies erlaubt ist, folgt aus der Herleitung des angeführten Satzes, leuchtet aber auch so ein: Führt man in (10) den Bruch $-1:v$ statt v als Parameter ein und bezeichnet man zugleich $-v^4 V$ als neue Funktion V, so gehen wieder die Gleichungen (10) hervor mit dem einzigen Unterschiede, daß $-i$ an der Stelle von i steht.

Nun haben wir mithin den

Satz 131: Jede nicht-zylindrische Minimalfläche läßt sich in jeder Lage mittels zweier Parameter u und v in der Form

$$x = \frac{1}{2}\int(1-u^2)\,U(u)\,du + \frac{1}{2}\int(1-v^2)\,V(v)\,dv,$$

$$y = \frac{i}{2}\int(1+u^2)\,U(u)\,du - \frac{i}{2}\int(1+v^2)\,V(v)\,dv,$$

$$z = \int u\,U(u)\,du + \int v\,V(v)\,dv$$

darstellen. Dabei bedeutet U eine von Null verschiedene Funktion von u allein und V eine von Null verschiedene Funktion von v allein. Sonstige Bedingungen bestehen nicht für die Funktionen U und V.[1]

Nach XI (A) und XI (C) ist hier:

(11) $$E = 0, \quad F = \frac{1}{2}(uv+1)^2\,UV, \quad G = 0,$$

so daß $D^2 = -F^2$ ist und also $D = iF$ gesetzt werden darf. Für die Richtungskosinus der Flächennormale ergibt sich nach XI (F):

(12) $$X = \frac{u+v}{uv+1}, \quad Y = -i\frac{u-v}{uv+1}, \quad Z = \frac{uv-1}{uv+1},$$

und nach (8) oder (12), S. 122, ist:

(13) $$L = -U, \quad M = 0, \quad N = -V.$$

Gerade so, wie sich durch (12) die Richtungskosinus X, Y, Z durch u und v ausdrücken, stellten sich unter (10), S. 78, die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z der Punkte der Kugel vom Radius Eins um den Anfangspunkt als Funktionen von u und v dar; damals waren die Parameterlinien (u) und (v) auf der Kugel die Minimalgeraden der Kugel. Dieser Zusammenhang ist nicht überraschend, denn die sphärische Abbildung der Minimalfläche ist nach Satz 125 konform, und dabei bildet sich nach Satz 43, S. 88, jede Minimalkurve der Fläche als Minimalgerade der Kugel ab. Die Richtungskosinus X, Y, Z sind ja gerade die rechtwinkligen Koordinaten des sphärischen Bildes des Flächenpunktes (u, v), vgl. S. 256.

[1] Diese Darstellung der Minimalflächen verdankt man ENNEPER, „Analytisch-geometrische Untersuchungen", Zeitschr. f. Math. u. Phys. 9. Jahrg. (1864), und WEIERSTRASS, „Über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist", Monatsber. d. Berliner Akad. 1866. Man muß zur richtigen Würdigung beachten, daß der Begriff der Minimalflächen älter als der Begriff der Minimalkurven ist, der eben in allen Arbeiten über Minimalflächen vor LIE nur versteckt auftrat. Vgl. die Anm. zu I S. 457.

Wenn man die Bildkugel vom Nordpol ($X = Y = 0$, $Z = 1$) stereographisch auf die Äquatorebene projiziert, vgl. S. 96, geht aus dem Kugelpunkte (X, Y, Z) der Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten

$$\mathfrak{x} = \frac{X}{1 - Z}, \quad \mathfrak{y} = \frac{Y}{1 - Z},$$

d. h. nach (12) der Punkt

$$(14) \qquad \mathfrak{x} = \frac{1}{2}(u + v), \quad \mathfrak{y} = -\frac{i}{2}(u - v)$$

hervor. Da die stereographische Projektion ebenfalls nach Satz 49, S. 96, eine konforme Abbildung ist, wird somit die Minimalfläche des Satzes 131 vermöge der Gleichungen (14) konform auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene abgebildet. Nach Satz 40, S. 86, sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ thermische Parameter der Minimalfläche. Das allgemeinste thermische Parameterpaar $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ geht deshalb nach Satz 34, S. 79, hervor, wenn man $\mathfrak{u} + i\mathfrak{v}$ gleich einer Funktion von $\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{u} - i\mathfrak{v}$ gleich einer Funktion von $\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$ setzt, d. h. nach (14), wenn man $\mathfrak{u} + i\mathfrak{v}$ gleich einer Funktion von u allein und $\mathfrak{u} - i\mathfrak{v}$ gleich einer Funktion von v allein setzt.

Zu einem ausgezeichneten thermischen Parameterpaar kommen wir nun, wenn wir die Krümmungskurven der Minimalfläche betrachten. Sie haben nach (1), S. 211, mit Rücksicht auf (11) und (13) die Differentialgleichung

$$(15) \qquad U du^2 - V dv^2 = 0.$$

Dies legt es uns nahe, neue thermische Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ dadurch einzuführen, daß wir

$$(16) \qquad \mathfrak{u} + i\mathfrak{v} = \int \sqrt{U}\, du, \quad \mathfrak{u} - i\mathfrak{v} = \int \sqrt{V}\, dv$$

setzen, da dann die Differentialgleichung (15) die Gestalt

$$(d\mathfrak{u} + i\, d\mathfrak{v})^2 - (d\mathfrak{u} - i\, d\mathfrak{v})^2 = 0$$

oder

$$d\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v} = 0$$

annimmt, so daß jetzt die Parameterlinien $(\mathfrak{u})$ und $(\mathfrak{v})$ die Krümmungskurven sind.

Nach Satz 39, S. 86, entsteht nun eine neue konforme Abbildung der Minimalfläche des Satzes 131 auf die Ebene, wenn man $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene deutet. Die Bilder der Krümmungskurven sind dann die zu einander rechtwinkligen Geradenscharen $\mathfrak{u} =$ konst. und $\mathfrak{v} =$ konst. in der Ebene. Daraus folgt, daß die Krümmungskurven ein Isothermennetz bilden. Übrigens kann man noch etwas Genaueres

über diese konforme Abbildung[1] aussagen: Die beiden Hauptkrümmungsradien des Flächenpunktes (u, v) sind nach S. 308 einander entgegengesetzt gleich. Einer von ihnen sei mit R, also der andere mit $-R$ bezeichnet. Nach (11) und (13) ist dann das Krümmungsmaß (vgl. S. 265):

$$K = -\frac{1}{R^2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{4}{(uv+1)^4 UV},$$

so daß wir

(17) $$R = \frac{1}{2}(uv+1)^2 \sqrt{U}\sqrt{V}$$

setzen können. Das Quadrat des Bogenelements, das nach (11) so lautet:

$$ds^2 = (uv+1)^2 UV du\, dv = (uv+1)^2 \sqrt{U}\sqrt{V} . \sqrt{U} du . \sqrt{V} dv,$$

nimmt in den neuen Parametern $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ nach (16) und (17) die Form an:

(18) $$ds^2 = 2R(d\mathfrak{u}^2 + d\mathfrak{v}^2).$$

Nun ist $d\mathfrak{u}^2 + d\mathfrak{v}^2$ das Quadrat des Bogenelements in der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinanten $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$. Die konforme Abbildung auf diese Ebene ist also so beschaffen, daß jede Stelle der Minimalfläche im linearen Maßstabe $1 : \sqrt{2R}$ ähnlich vergrößert wird (vgl. S. 84). Da die Haupttangentenkurven der Minimalfläche ein Orthogonalsystem bilden, also die Winkel der Krümmungskurven halbieren, sind die Bilder der Haupttangentenkurven diejenigen Geraden in der $\mathfrak{u}\mathfrak{v}$-Ebene, die die geradlinigen Bilder der Krümmungskurven unter $\pm 45^0$ schneiden. Deshalb bilden auch die Haupttangentenkurven auf der Minimalfläche ein Isothermennetz. Somit gilt der

Satz 132: Auf einer nicht-zylindrischen Minimalfläche bilden die Krümmungskurven und ebenso die Haupttangentenkurven ein Isothermennetz. Man kann also die Fläche konform so auf eine Ebene abbilden, daß die Krümmungskurven als zwei zu einander senkrechte Geradenscharen erscheinen. Dabei ist an jeder Stelle der lineare Maßstab der ähnlichen Vergrößerung gleich $1 : \sqrt{2R}$, wenn R einen der beiden Hauptkrümmungsradien der betrachteten Stelle der Fläche bedeutet.[2]

---

[1] Daß die Krümmungskurven Isothermen sind, sprach zuerst Bonnet aus in der „Note sur la théorie générale des surfaces", Comptes Rendus 37. Bd. (1853).

[2] Bei H. A. Schwarz in seinen „Miszellen aus dem Gebiete der Minimalflächen", Gesammelte mathem. Abhdlgn., 1. Bd. Berlin (1890), zuerst

Wenn wir in den Gleichungen der Minimalfläche des Satzes 131 die Funktionen $U(u)$ und $V(v)$ irgendwie wählen, werden wir nicht gerade eine reelle Fläche erhalten. Wir fragen daher, unter welchen Umständen die Minimalfläche reell ist. Es ist von vornherein gar nicht gesagt, daß zu reellen Punkten auch reelle Werte der Parameter u und v gehören, und dies trifft auch gar nicht zu.

Wohl aber müssen die Richtungskosinus X, Y, Z der Normale eines reellen Punktes der Fläche reell sein. Die Funktionen (12) sind nun dann und nur dann reell, wenn u und v konjugiert komplexe Werte haben, vgl. z. B. (9) auf S. 77. Es ist aber nach (14):

$$u = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}, \quad v = \mathfrak{x} - i\mathfrak{y}. \tag{19}$$

Demnach müssen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ reell sein. Zerlegen wir nun die Funktionen $U(u)$ und $V(v)$ oder $U(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})$ und $V(\mathfrak{x} - i\mathfrak{y})$ in ihren reellen und rein imaginären Teil:

$$U = A(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + iB(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad V = C(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + iD(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \tag{20}$$

so hat z. B. die dritte Koordinate z der Fläche nach Satz 131 den Wert:

$$\int [(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})(A + iB)(d\mathfrak{x} + i\,d\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x} - i\mathfrak{y})(C + iD)(d\mathfrak{x} - i\,d\mathfrak{y})],$$

und der rein imaginäre Teil des Integranden ist, abgesehen vom Faktor i:

$$(A\mathfrak{y} + B\mathfrak{x} - C\mathfrak{y} + D\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x} + (A\mathfrak{x} - B\mathfrak{y} - C\mathfrak{x} - D\mathfrak{y})\,d\mathfrak{y}.$$

Er soll also gleich Null sein. Daher muß einzeln

$$(A - C)\mathfrak{y} + (B + D)\mathfrak{x} = 0, \quad (A - C)\mathfrak{x} - (B + D)\mathfrak{y} = 0$$

sein. Dies sind zwei in $A - C$ und $B + D$ lineare homogene Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante. Deshalb muß einzeln

$$A - C = 0, \quad B + D = 0$$

sein, also nach (20):

$$U = A + iB, \quad V = A - iB.$$

Demnach müssen U und V konjugiert komplexe Funktionen der beiden konjugiert komplexen Veränderlichen $\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$

---

veröffentlicht in der Vierteljahrsschrift der naturf. Ges. in Zürich, 19. Jahrg. (1874), dann auch im Journ. f. d. r. u. a. Math. 80. Bd. (1875), findet sich diese Formulierung des Bonnetschen Satzes mit dem Unterschiede, daß $\sqrt{R}$ an Stelle von $\sqrt{2R}$ steht. Diese Änderung läßt sich leicht durch passende ähnliche Vergrößerung der Bildebene erreichen.

und $\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$ sein. Dies reicht nun aber auch aus, denn dann heben sich auch in den Summen von je zwei Integralen, durch die x und y in Satz 131 ausgedrückt werden, die rein imaginären Glieder fort, vorausgesetzt, daß man bei der Auswertung der Integrale auch jedesmal die additiven Integrations-Konstanten konjugiert komplex wählt.

Bevor wir das Ergebnis als Satz formulieren, sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß eine zylindrische Minimalfläche nach Satz 123 nur dann reell ist, wenn sie in eine Ebene ausartet. Deshalb dürfen wir das Ergebnis so aussprechen:

Satz 133: Jede reelle Minimalfläche mit Ausnahme der Ebenen läßt sich in jeder Lage in der Form

$$x = \frac{1}{2}\int(1 - u^2)\,U(u)\,du + \frac{1}{2}\int(1 - v^2)\,V(v)\,dv,$$

$$y = \frac{i}{2}\int(1 + u^2)\,U(u)\,du - \frac{i}{2}\int(1 + v^2)\,V(v)\,dv,$$

$$z = \int u\,U(u)\,du + \int v\,V(v)\,dv$$

darstellen, worin u und v konjugiert komplexe Veränderliche $\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$ bedeuten und $U(u)$ und $V(v)$ von Null verschiedene konjugiert komplexe Funktionen von ihnen sind. Im Übrigen sind keinerlei Bedingungen vorgeschrieben, abgesehen davon, daß man die in jeder Formel bei der Auswertung der Integrale auftretenden beiden Integrationskonstanten jedesmal konjugiert komplex wählen muß. Die Veränderlichen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind thermische Parameter der Minimalfläche.[1]

Übrigens wird die Fläche des Satzes 133 bloß verschoben, wenn man die Integrationskonstanten anders wählt.

Da jetzt jede der drei Koordinaten x, y, z als Summe von zwei Summanden gewonnen wird, die konjugiert komplex sind, ist jede Summe gleich dem doppelten reellen Teile des ersten Summanden allein. Wenn wir also durch den vorgesetzten Buchstaben $\mathfrak{R}$ andeuten, daß von dem nachfolgenden Ausdrucke nur der reelle Teil genommen werden soll[2], können wir das Ergebnis so aussprechen:

[1] Hiernach ist es jetzt leicht, beliebig viele reelle Minimalflächen zu bestimmen, während es früher ein Problem war, die mit imaginären Größen behafteten Formeln von Monge so anzuwenden, daß sich reelle Flächen ergaben.

[2] Nach Weierstrass, vgl. die Anm. zu S. 315.

Satz 134: Jede reelle Minimalfläche mit Ausnahme der Ebenen ist in jeder Lage in der Form

$$x = \Re\int(1-u^2)\,U(u)\,du, \quad y = \Re\int i(1+u^2)\,U(u)\,du,$$
$$z = \Re\int 2\,u\,U(u)\,du$$

darstellbar. Dabei bedeutet u eine komplexe Veränderliche $\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ und U eine von Null verschiedene Funktion von ihr, die sonst keinerlei Bedingung unterworfen ist. Die beiden reellen Veränderlichen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind thermische Parameter der Fläche.

4. Beispiel: Um die gemeine Schraubenfläche

(21) $$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = qv,$$

vgl. (20), S. 73, und das 2. Beispiel, auf Grund des Satzes 134 darzustellen, berechnen wir nach XI (*F*) die Richtungskosinus ihrer Normale:

$$X = \frac{q\sin v}{D}, \quad Y = -\frac{q\cos v}{D}, \quad Z = \frac{u}{D}.$$

Wir haben nun neue Parameter einzuführen, in denen sich die Richtungskosinus in den Formen (12) darstellen; zur Vermeidung von Verwechslungen müssen wir die neuen Parameter anders bezeichnen, etwa mit $\bar{u}$ und $\bar{v}$. Wir setzen demnach:

$$\frac{q\sin v}{D} = \frac{\bar{u}+\bar{v}}{\bar{u}\bar{v}+1}, \quad \frac{q\cos v}{D} = i\,\frac{\bar{u}-\bar{v}}{\bar{u}\bar{v}+1}, \quad \frac{u}{D} = \frac{\bar{u}\bar{v}-1}{\bar{u}\bar{v}+1},$$

woraus folgt:

(22) $$\frac{q\sin v}{u} = \frac{\bar{u}+\bar{v}}{\bar{u}\bar{v}-1}, \quad \frac{q\cos v}{u} = i\,\frac{\bar{u}-\bar{v}}{\bar{u}\bar{v}-1}$$

so daß die dritte Gleichung (21) gibt:

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{u}} = -\frac{iq}{2\bar{u}}.$$

Nach Satz 133, den wir statt des Satzes 134 zunächst heranziehen, müßte aber

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{u}} = \bar{u}\,U(\bar{u})$$

sein. Somit ist

(23) $$U = -\frac{iq}{2\bar{u}^2}$$

zu setzen. Nun gibt Satz 134, worin $\bar{u}$ und $\bar{v}$ statt u und v zu schreiben ist:

$$x = -\frac{q}{2}\Re\int i\frac{1-\bar{u}^2}{\bar{u}^2}\,d\bar{u}, \quad y = \frac{q}{2}\Re\int\frac{1+\bar{u}^2}{\bar{u}^2}\,d\bar{u}, \quad z = -q\Re\int\frac{i}{\bar{u}}\,d\bar{u},$$

denn die Konstante q in (21) soll natürlich reell sein. Abgesehen von additiven Konstanten haben hier die Integrale die Werte:

$$-i\left(\bar{u}+\frac{1}{\bar{u}}\right), \quad \bar{u}-\frac{1}{\bar{u}}, \quad i\log\bar{u}.$$

Setzen wir jetzt $\bar{u} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$, und wählen wir die beiden ersten additiven Konstanten gleich Null, während wir bei z noch $\frac{1}{2}\pi q$ addieren, so kommt:

$$x = \frac{q}{2}\frac{\mathfrak{y}(1-\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2)}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}, \qquad y = \frac{q}{2}\frac{\mathfrak{x}(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2-1)}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}, \qquad z = -q \operatorname{arc\,tg}\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}.$$

Diese Formeln stellen in der Tat die gemeine Schraubenfläche (21) mittels der beiden reellen Parameter $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ dar, da sie aus (21) hervorgehen, wenn man darin $\bar{u}$ und $\bar{v}$ vermöge (22) einführt und dann $\bar{u}$ und $\bar{v}$ durch $\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$ ersetzt, d. h. wenn man geradezu setzt:

$$\frac{q \sin v}{u} = \frac{2\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2-1}, \qquad \frac{q\cos v}{u} = -\frac{2\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2-1}.$$

5. **Beispiel:** Die Formel (23) des letzten Beispiels zeigt, daß der Satz 134 bei der Annahme

$$U(u) = -\frac{iq}{2u^2}$$

eine gemeine Schraubenfläche gibt. Sehen wir jetzt zu, was die Annahme

$$U(u) = \frac{q}{2u^2} \tag{24}$$

liefert, die sich von jener nur durch den fehlenden Faktor $-i$ unterscheidet. In diesem Falle sind die Integrale des Satzes 134, abgesehen von additiven Konstanten, gleich

$$-\frac{q}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right), \qquad \frac{iq}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right), \qquad q\log u,$$

und nach Einsetzen von $u = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ werden ihre reellen Teile diese:

$$x = -\frac{q}{2}\frac{\mathfrak{x}(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+1)}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}, \qquad y = -\frac{q}{2}\frac{\mathfrak{y}(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+1)}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}, \qquad z = \frac{q}{2}\log(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2).$$

Führen wir neue Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ vermöge der Substitution

$$\mathfrak{x} = -e^{\mathfrak{u}}\cos\mathfrak{v}, \qquad \mathfrak{y} = -e^{\mathfrak{u}}\sin\mathfrak{v}$$

ein, so kommt:

$$x = \frac{q}{2}(e^{\mathfrak{u}} + e^{-\mathfrak{u}})\cos\mathfrak{v}, \qquad y = \frac{q}{2}(e^{\mathfrak{u}} + e^{-\mathfrak{u}})\sin\mathfrak{v}, \qquad z = q\mathfrak{u}.$$

Diese Fläche ist das **Katenoid**, das durch Rotation der in der xz-Ebene gelegenen Kettenlinie

$$x = \frac{q}{2}\left(e^{\frac{z}{q}} + e^{-\frac{z}{q}}\right)$$

um die z-Achse entsteht. Vgl. S. 142, 143.

6. **Beispiel:** Die Annahme

$$U = \frac{2}{1-u^4}$$

gibt, wenn man den hier etwas bequemeren Satz 133 benutzt, also auch

$$V = \frac{2}{1-v^4}$$

setzt und die additiven Konstanten passend wählt:

$$x = \operatorname{arc\,tg} \frac{u+v}{1-uv}, \quad y = \operatorname{arc\,tg} \frac{i(u-v)}{1-uv}, \quad z = \frac{1}{2} \log \frac{(1+u^2)(1+v^2)}{(1-u^2)(1-v^2)},$$

also, wenn man u und v durch $\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$ ersetzt:

$$x = \operatorname{arc\,tg} \frac{2\mathfrak{x}}{1-\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2}, \quad y = \operatorname{arc\,tg} \frac{-2\mathfrak{y}}{1-\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2}, \quad z = \frac{1}{2} \log \frac{(1-\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2)^2+4\mathfrak{x}^2}{(1-\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2)^2+4\mathfrak{y}^2},$$

mithin bedeutend einfacher:

$$(25) \qquad z = \log \frac{\cos y}{\cos x} \quad \text{oder} \quad e^z = \frac{\cos y}{\cos x}.$$

Reell ist diese Minimalfläche[1] augenscheinlich nur in dem Gebiete, wo $\cos x$ und $\cos y$ dasselbe Zeichen haben. Wir teilen daher die xy-Ebene vermöge der Parallelen zu den Axen

$$x = \frac{2n+1}{2}\pi \quad \text{und} \quad y = \frac{2n+1}{2}\pi \qquad (n \text{ eine ganze Zahl})$$

in Quadrate von der Seitenlänge π ein. Werden die Quadrate schachbrettartig in zwei Scharen zerlegt, so kommen für reelle Punkte der Fläche nur solche Werte von x und y in Betracht, deren Fußpunkte (x, y) in den Quadraten der einen Schar liegen, und zwar gehört zu dieser Schar dasjenige Quadrat, dessen Mitte der Anfangspunkt ist. Wenn x um π wächst oder abnimmt und y gleichzeitig um π wächst oder abnimmt, ändern $\cos x$ und $\cos y$ zugleich ihr Zeichen, so daß z ungeändert bleibt. Die Fläche ist daher doppelt-periodisch: das Stück, das über dem Quadrate um den Anfangspunkt liegt, wiederholt sich kongruent über allen in den Diagonalen anstoßenden Quadraten.

Stellt man die Fläche, indem man x und y als Parameter u und v benutzt, in der Form

$$(26) \qquad x = u, \quad y = v, \quad z = -\log\cos u + \log\cos v$$

dar, so erkennt man, daß sie auch dadurch entsteht, daß die Kurve

$$(27) \qquad x = u, \quad y = 0, \quad z = -\log\cos u$$

mit ihrem Punkte $(u = 0)$ längs der Kurve

$$(28) \qquad x = 0, \quad y = v, \quad z = \log\cos v,$$

verschoben wird. Sie ist daher nicht nur hinsichtlich ihrer Minimalkurven als Minimalfläche eine Schiebungsfläche, sondern außerdem hinsichtlich dieser Kurven, vgl. S. 244.

Leicht sind die Haupttangentenkurven der Fläche zu finden. Wir berechnen zunächst die Verhältnisse der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung nach (11), S. 122. Es kommt, wenn die Gleichungen (26) benutzt werden:

---

[1] Sie heißt die Scherksche Minimalfläche nach ihrem Entdecker Scherk, der als Erster aus den Formeln von Monge und Legendre außer den gemeinen Schraubenflächen und den Katenoiden neue Beispiele von reellen Minimalflächen zu gewinnen wußte, vgl. hierzu die Anm. zu S. 319. Die betreffenden Abhandlungen von Scherk sind: „De proprietatibus superficiei, quae hac continetur aequatione:

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

disquisitiones analyticae“, Acta Soc. Jablonovianae 4. Bd. (1830), „Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen“, Journ. f. d. r. u. a. Mathem. 13. Bd. (1835).

$$LD = \frac{1}{\cos^2 u}, \qquad MD = 0, \qquad ND = -\frac{1}{\cos^2 v},$$

so daß die Haupttangentenkurven der Fläche nach (1), S. 232, der Differentialgleichung

$$\frac{du^2}{\cos^2 u} - \frac{dv^2}{\cos^2 v} = 0$$

oder also einer der beiden Differentialgleichungen:

$$\frac{du}{\cos u} \pm \frac{dv}{\cos v} = 0$$

genügen. Ihre endlichen Gleichungen sind somit:

$$\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \pm \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right) = \text{konst.}$$

Die Projektionen der Haupttangentenkurven auf die xy-Ebene haben die Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) = \text{konst.}$$

und:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) = \text{konst.}$$

Wir haben gesehen, daß die Fläche in doppelter Weise als Schiebungsfläche aufgefaßt werden kann. Man kann beweisen, daß sie sogar auf unendlich viele Arten als Schiebungsfläche aufgefaßt werden kann und daher ein Seitenstück zur gemeinen Schraubenfläche (vgl. S. 247) ist. Wenn man nämlich irgend eine Haupttangentenkurve der Fläche herausgreift und den Ort der Mitten ihrer Sehnen bestimmt, findet man stets wieder Punkte der Fläche. (Vgl. S. 246). Die Fläche entsteht daher, wenn eine Kurve, die zu einer Haupttangentenkurve der Fläche im halben Maßstabe ähnlich ist, mit einem ihrer Punkte an einer mit ihr kongruenten und gleichgestellten Kurve entlang geschoben wird.[1]

Die Gleichungen des Satzes 134 lassen sich von den Integralzeichen durch Anwendung der Methode der teilweisen Integration wie in I S. 460 befreien. Wenn man unter $F(u)$ eine Funktion von u versteht, deren Ableitung dritter Ordnung gleich $U(u)$ ist und also als von Null verschieden vorausgesetzt werden muß, kommt entsprechend dem Satze 65, I S. 460:

Satz 135:[2] Jede reelle Minimalfläche mit Ausnahme der Ebenen ist in jeder Lage in der Form

$$\begin{aligned}
x &= \Re\,[\,(1 - u^2) F''(u) + 2u F'(u) - 2F(u)],\\
y &= \Re\,[i(1 + u^2) F''(u) - 2iu F'(u) + 2i F(u)],\\
z &= \Re\,[\quad - 2u F''(u) - 2F'(u)]
\end{aligned}$$

[1] Diese Eigenschaft der Scherk'schen Minimalfläche fand Lie; vgl. die Anm. zu S. 247.

[2] Nach Weierstrass, siehe die Anm. zu S. 315.

darstellbar. Dabei bedeutet F eine Funktion der komplexen Veränderlichen $u = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$, und $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind die Parameter der Fläche und zwar thermische Parameter. Die Funktion $F(u)$ ist nur der einen Bedingung unterworfen, daß ihre Ableitung dritter Ordnung nicht verschwindet.

Die bei den Integralen in Satz 133 vorkommenden additiven Konstanten konnten (wie schon in Satz 134) fortgelassen werden, da sie auftreten, wenn man F um einen Summanden

$$\text{konst.}\, u^2 + \text{konst.}\, u + \text{konst.}$$

vergrößert. —

Liegt eine reelle Fläche

$$(29) \qquad x = \varphi(\bar{u}, \bar{v}), \quad y = \chi(\bar{u}, \bar{v}), \quad z = \psi(\bar{u}, \bar{v}),$$

ausgedrückt mittels zweier Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$, vor und weiß man, daß sie eine Minimalfläche ist, so kann man sich die Aufgabe stellen, die zugehörigen konjugiert komplexen Parameter u und v und konjugiert komplexen Funktionen $U(u)$ und $V(v)$ zu ermitteln, mittels deren die Fläche in der Form des Satzes 133 dargestellt werden kann. Dies geschieht so, wie es schon im 4. Beispiele für eine gemeine Schraubenfläche ausgeführt wurde. Man berechnet also die Richtungskosinus X, Y, Z der Normale der Fläche (29) auf Grund von XI (F) als Funktionen der in (29) auftretenden Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ und setzt sie gleich den Werten (12) von X, Y, Z, ausgedrückt in u und v. Die drei hervorgehenden Gleichungen widersprechen einander nicht und geben u und v als Funktionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$. Nunmehr setzt man nach (29) und nach Satz 133, indem man die Differentiale dx, dy, dz bildet, die Bedingungen an:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}}\, d\bar{u} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{v}}\, d\bar{v} &= \frac{1}{2}(1 - u^2)\, U du + \frac{1}{2}(1 - v^2)\, V dv, \\
\frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}}\, d\bar{u} + \frac{\partial \chi}{\partial \bar{v}}\, d\bar{v} &= \frac{i}{2}(1 + u^2)\, U du - \frac{i}{2}(1 + v^2)\, V dv, \\
\frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}}\, d\bar{u} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}}\, d\bar{v} &= u\, U du + v\, V dv
\end{aligned}$$

und führt hierin links die sich ergebenden Funktionen $\bar{u}$ und $\bar{v}$ von u und v ein. Indem man dann die Koeffizienten der Differentiale du und dv rechts und links einander gleich setzt, gehen sechs in U und V lineare Gleichungen hervor, die sich nicht widersprechen und gestatten, U und V zu berechnen. — Wenn die Fläche (29) wirklich eine reelle Minimalfläche ist, ergeben sich durch dies Verfahren sowohl für u und v konjugiert komplexe Werte als auch für U und V konjugiert komplexe Funktionen von u bzw. v allein.

Hiernach gehören zu einer bestimmten reellen Minimalfläche (29)

bestimmte Parameter u, v und Funktionen $U(u)$, $V(v)$. Aber dies gilt, da wir die Formeln für die Richtungskosinus X, Y, Z der Normale benutzt haben, nur dann, wenn die Normalen der Fläche bestimmt orientiert worden sind. Von vornherein steht jedoch gar nicht fest, daß die hierfür auf S. 32 getroffene Verabredung bei der vorgelegten Fläche (29) zu derselben Orientierung führt wie bei ihrer Darstellung in der in Satz 133 angegebenen Form. Vielmehr haben wir auch statt u und v noch ein anderes Parameterpaar zu gestatten, das hervorgeht, wenn X, Y, Z alle drei durch $-X, -Y, -Z$ ersetzt werden. Demnach kommen wir zu zwei Darstellungen der vorgelegten Fläche (29) auf Grund des Satzes 133. Um ihren Zusammenhang zu ermitteln, wollen wir die Parameter im zweiten Falle statt mit u und v mit $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ bezeichnen. Es ist dann nach (12)

$$\frac{u+v}{uv+1} = -\frac{\mathfrak{u}+\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}+1}, \quad -i\frac{u-v}{uv+1} = i\frac{\mathfrak{u}-\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}+1}, \quad \frac{uv-1}{uv+1} = -\frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v}-1}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}+1},$$

d. h.

$$(30) \quad \mathfrak{u} = -\frac{1}{v}, \quad \mathfrak{v} = -\frac{1}{u} \quad \text{oder} \quad u = -\frac{1}{\mathfrak{v}}, \quad v = -\frac{1}{\mathfrak{u}}.$$

Da wir bei der zweiten Darstellung die Normalen entgegengesetzt wie zuerst orientiert haben, gehören zu u, v und $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ einander diametral gegenüberliegende Punkte der bei der sphärischen Abbildung zu benutzenden Kugel mit den rechtwinkligen Koordinaten X, Y, Z bzw. $-X, -Y, -Z$. Die zu $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ gehörigen Funktionen sollen zum Unterschiede von $U(u)$ und $V(v)$ mit $\mathfrak{U}(\mathfrak{u})$ und $\mathfrak{V}(\mathfrak{v})$ bezeichnet werden. Nach Satz 133 ist dann, wenn wir aus seiner dritten, weil einfachsten, Formel den Wert von dz entnehmen:

$$u\,U(u)\,du + v\,V(v)\,dv = \mathfrak{u}\,\mathfrak{U}(\mathfrak{u})\,d\mathfrak{u} + \mathfrak{v}\,\mathfrak{V}(\mathfrak{v})\,d\mathfrak{v}.$$

Da aber nach (30)

$$du = \frac{d\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}^2}, \quad dv = \frac{d\mathfrak{u}}{\mathfrak{u}^2}$$

ist, folgt hieraus:

$$-\frac{1}{\mathfrak{v}^3}\,U\left(-\frac{1}{\mathfrak{v}}\right)d\mathfrak{v} - \frac{1}{\mathfrak{u}^3}\,V\left(-\frac{1}{\mathfrak{u}}\right)d\mathfrak{u} = \mathfrak{u}\,\mathfrak{U}(\mathfrak{u})\,d\mathfrak{u} + \mathfrak{v}\,\mathfrak{V}(\mathfrak{v})\,d\mathfrak{v},$$

also, da dies für alle Differentiale $d\mathfrak{u}$ und $d\mathfrak{v}$ gilt, einzeln:

$$-\frac{1}{\mathfrak{v}^3}\,U\left(-\frac{1}{\mathfrak{v}}\right) = \mathfrak{v}\,\mathfrak{V}(\mathfrak{v}), \quad -\frac{1}{\mathfrak{u}^3}\,V\left(-\frac{1}{\mathfrak{u}}\right) = \mathfrak{u}\,\mathfrak{U}(\mathfrak{u}),$$

so daß kommt:

$$(31) \quad \mathfrak{U}(\mathfrak{u}) = -\frac{1}{\mathfrak{u}^4}\,V\left(-\frac{1}{\mathfrak{u}}\right), \quad \mathfrak{V}(\mathfrak{v}) = -\frac{1}{\mathfrak{v}^4}\,U\left(-\frac{1}{\mathfrak{v}}\right).$$

Deshalb gilt der

Satz 136: Eine reelle nicht-ebene Minimalfläche läßt sich auf zwei und nur zwei Arten auf Grund des Satzes 133 darstellen. Sind bei der einen Art wie in jenem Satze u, v und $U(u)$, $V(v)$ die auftretenden Veränderlichen und Funktionen, und treten bei der zweiten Art an ihre Stelle $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ und $\mathfrak{U}(\mathfrak{u})$, $\mathfrak{V}(\mathfrak{v})$, so ist:

$$\mathfrak{u} = -\frac{1}{v}, \qquad \mathfrak{v} = -\frac{1}{u}$$

und

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{u}) = -\frac{1}{\mathfrak{u}^4} V\left(-\frac{1}{\mathfrak{u}}\right), \qquad \mathfrak{V}(\mathfrak{v}) = -\frac{1}{\mathfrak{v}^4} U\left(-\frac{1}{\mathfrak{v}}\right).$$

Außerdem muß man bei der zweiten Art die auftretenden Integrationskonstanten passend wählen.

Dieser letzte Zusatz ist deshalb nötig, weil die additiven Integrationskonstanten in Satz 134 noch willkürlich gelassen sind. Berücksichtigt man sie nicht, so gibt die zweite Art der Darstellung die in Rede stehende Fläche gegenüber ihrer Lage bei der ersten Art unter Umständen verschoben an (nach S. 319).

7. Beispiel: Wir machen von dem letzten Satze eine Anwendung, die zu einem besonders merkwürdigen Ergebnisse führt. Es kann vorkommen, daß sich $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ ebenso durch $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ ausdrücken wie U und V durch u und v.[1] Wenn beispielsweise

(32) $$U = 1 - \frac{1}{u^4}, \qquad V = 1 - \frac{1}{v^4}$$

ist, gibt ja (31)

$$\mathfrak{U} = 1 - \frac{1}{\mathfrak{u}^4}, \qquad \mathfrak{V} = 1 - \frac{1}{\mathfrak{v}^4}.$$

In einem derartigen Falle, wie er z. B. in (32) vorliegt, kann man einen Schluß ziehen, sobald man weiß, daß die in Rede stehende Minimalfläche nicht periodisch ist. In dem vorliegenden Falle nämlich wird die Fläche in u und v analytisch gerade so dargestellt wie in $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$, d. h. die Fläche ist in der Umgebung eines bei der ersten Darstellung gewählten Punktes (u_0, v_0) kongruent und gleichgestellt mit der Umgebung eines bei der zweiten Darstellung gewählten Punktes $(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{v}_0)$, sobald nur entsprechend den Formeln des Satzes

(33) $$\mathfrak{u}_0 = -\frac{1}{v_0}, \qquad \mathfrak{v}_0 = -\frac{1}{u_0}$$

[1] Mit diesem Falle hat sich insbesondere Lie beschäftigt, vgl. die Anm. zu S. 244. Er nannte alle diejenigen Minimalflächen, bei denen sich $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ ebenso durch $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ ausdrücken wie U und V durch u und v, Doppelflächen, und zwar deshalb, weil auf ihnen die beiden Scharen von Minimalkurven nicht zu trennen sind, vielmehr eine einzige die Fläche doppelt bedeckende Schar bilden, wie es ja überhaupt bei Schiebungsflächen vorkommen kann, vgl. S. 245 u. f.

angenommen worden ist. Wäre die Fläche periodisch, so wäre dies so möglich, daß die Umgebung der Stelle $(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{v}_0)$ aus der der Stelle (u_0, v_0) durch Verschiebung um eine oder mehrere Perioden der Fläche hervorginge. Ist sie aber nicht-periodisch, so muß die Stelle $(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{v}_0)$ identisch sein mit der Stelle (u_0, v_0). Diese Stelle sei mit P_0 bezeichnet. Nun mögen die Parameter u und v stetige Wertereihen von u_0 und v_0 an durchlaufen, d. h. P_0 beschreibe eine Kurve c auf der Fläche. Insbesondere mögen sich die Werte u, v stetig ändern, bis sie in $-1 : v_0$ und $-1 : u_0$ übergehen. Nach (33) ist dann die Kurve c zum Punkte P_0 zurückgelangt. Aber dieser Punkt P_0 hat bei der zweiten Darstellung eine entgegengesetzt wie bei der ersten Darstellung orientierte Normale. Man kann also auf der Fläche von P_0 aus eine geschlossene Kurve bis P_0 zurück so einschlagen, daß die Normale schließlich die entgegengesetzte Orientierung bekommt, d. h. die Fläche ist einseitig, vgl. S. 41. Natürlich ist dabei vorauszusetzen, daß keine Unstetigkeit der Fläche eintritt, wenn sich u, v stetig von u_0, v_0 bis $-1 : v_0$ und $-1 : u_0$ ändern.

In zwei oben gegebenen Beispielen tritt der Fall ein, daß sich $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ gerade so durch $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ wie U und V durch u und v ausdrücken, nämlich im 4. und 6. Beispiele. Aber dort ergaben sich periodische Flächen, bei denen der Schluß, wie gesagt, nicht bindend ist. In der Tat sind die damals betrachteten Flächen nicht einseitig. Wohl aber trifft der Schluß zu in dem unter (32) erwähnten Falle, da hier eine nicht-periodische Minimalfläche hervorgeht. Bei der Annahme (32) nämlich werden die in Satz 134 angegebenen Integrale, abgesehen von additiven Konstanten, gleich

$$u - \frac{1}{u} - \frac{1}{3}\left(u^3 - \frac{1}{u^3}\right), \quad i\left(u + \frac{1}{u}\right) + \frac{i}{3}\left(u^3 + \frac{1}{u^3}\right), \quad u^2 + \frac{1}{u^2}.$$

Wird $u = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ gesetzt, so kommt also:

$$x = \mathfrak{x}\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}\right)\left[1 - \frac{1}{3}\left\{\mathfrak{x}^2 - 3\mathfrak{y}^2\right\}\left\{1 + \frac{1}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2} + \frac{1}{(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2)^2}\right\}\right],$$

$$y = -\mathfrak{y}\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}\right)\left[1 - \frac{1}{3}\left\{\mathfrak{y}^2 - 3\mathfrak{x}^2\right\}\left\{1 + \frac{1}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2} + \frac{1}{(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2)^2}\right\}\right],$$

$$z = \left\{\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2\right\}\left\{1 - \frac{1}{(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2)^2}\right\}.$$

Daß diese Fläche nicht periodisch ist, sieht man daraus, daß sie augenscheinlich algebraisch ist. In der Tat liegt hier eine einseitige Fläche vor.[1]

Indem wir hier mit dem Paragraphen auch den zweiten Abschnitt schließen,[2] bemerken wir noch, daß wir wieder eine Reihe

[1] Dies ist die Hennebergsche Minimalfläche, die von Henneberg in der Dissertation „Über solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Kurve zur geodätischen Linie haben“, Zürich 1875, bestimmt wurde.

[2] Da wir hier unseren kurzen Abriß aus der Theorie der Minimalflächen beschließen, indem wir später (insbes. in § 4 des 3. Abschnittes) nur noch kleinere Nachträge dazu bringen, sei noch bemerkt: Eine ausführliche Darstellung der älteren Geschichte der Theorie der Minimalflächen, die wir im Vorhergehenden verwertet haben, findet sich in Beltramis Arbeit „Sulle

von Formeln dieses Abschnittes in Tafeln im Anhange des Bandes zusammengestellt haben. Die Tafel XII enthält die Hauptformeln, die sich auf die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung und die Krümmung beziehen. In der Tafel XIII sind einige dieser Formeln für die besondere Darstellung

$$z = f(x, y)$$

der Fläche, bei der x und y die Parameter sind, wiedergegeben. Einige von diesen Formeln sind im Texte nicht entwickelt worden; sie gehen indes so unmittelbar aus den entsprechenden Formeln der Tafel XII durch Einsetzen der besonderen Werte hervor, daß wir von ihrer ausdrücklichen Ableitung hier füglich absehen dürfen. Die Tafel XIV bezieht sich auf die sphärische Abbildung einer Fläche und die Tafel XV auf die Parallelflächen.

Die Formeln dieser Tafeln werden wir künftig in der üblichen Weise angeben.

---

proprietà generali delle superficie d'area minima", Mem. dell'Accad. di Bologna 2. Serie, 7. Bd. 1868. Auf die Untersuchung der Minimalflächen mit gegebenen Randbedingungen sowie auf die Frage, für welche Umrandungen eine Minimalfläche wirklich eine Fläche kleinsten Inhalts ist (vgl. S. 300), können wir nicht eingehen. Wir verweisen in dieser Hinsicht namentlich auf die grundlegenden Arbeiten von SCHWARZ, von denen die bis 1890 bequem zugänglich gemacht sind in seinen „Gesammelten mathematischen Abhandlungen", 1. Bd., Berlin 1890.

Dritter Abschnitt.

Die Fundamentalgleichungen der Fläche.

§ 1. Die Ableitungen der rechtwinkligen Koordinaten.

Die Betrachtungen des ersten und des zweiten Abschnittes zeigen, daß die drei Fundamentalgrößen erster Ordnung, E, F, G, und die drei Fundamentalgrößen zweiter Ordnung, L, M, N, von der größten Bedeutung für die Flächentheorie sind. Dieser Umstand ist schon durch die Benennung gewürdigt worden.

Wir haben eine Reihe von solchen Eigenschaften der Flächen besprochen, die von ihrer zufälligen Lage gegenüber den Koordinatenaxen unabhängig sind, wie z. B. die Krümmungsverhältnisse in einem Punkte, die Lagerung der zu einer Normale unendlich benachbarten Normalen usw. Wir fanden, daß zu ihrem analytischen Ausdrucke die Fundamentalgrößen völlig ausreichen; so lassen sich z. B. die Hauptkrümmungsradien eines Flächenpunktes durch die Fundamentalgrößen allein ausdrücken, nach XII (K).

Da wir aber nur einen Teil der von der Lage im Raume unabhängigen Eigenschaften der Flächen betrachtet haben, dürfen wir diese Bemerkung nicht ohne weiteres verallgemeinern. Vielmehr führt sie uns zu der Aufgabe, zu untersuchen, wie sich überhaupt die von der Lage im Raume unabhängigen Eigenschaften einer Fläche analytisch ausdrücken.

Die Erledigung dieser Aufgabe ist eines der Hauptziele des gegenwärtigen Abschnittes.

Zur Vorbereitung bedürfen wir einer Reihe von Formeln, die jetzt aufgestellt werden sollen. Erinnern wir uns an die Definitionen der Fundamentalgrößen in XI (A) und XII (B):

$$(1)\qquad \mathsf{S}\, x_u^{\,2} = E, \quad \mathsf{S}\, x_u x_v = F, \quad \mathsf{S}\, x_v^{\,2} = G,$$

$$(2)\quad \begin{vmatrix} x_{uu} & x_u & x_v \\ y_{uu} & y_u & y_v \\ z_{uu} & z_u & z_v \end{vmatrix} = DL, \qquad \begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix} = DM, \qquad \begin{vmatrix} x_{vv} & x_u & x_v \\ y_{vv} & y_u & y_v \\ z_{vv} & z_u & z_v \end{vmatrix} = DN,$$

wo

$$D^2 = EG - F^2$$

ist, so erkennen wir, daß sie die sechs partiellen Ableitungen erster Ordnung und die neun partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z nach den Parametern u und v enthalten. Differenzieren wir die drei Gleichungen (1) einmal partiell nach u und einmal partiell nach v, so gehen aus ihnen die sechs Gleichungen hervor:

$$\mathbf{S}\, x_{uu} x_u = \tfrac{1}{2} E_u, \quad \mathbf{S}\, x_{uu} x_v + \mathbf{S}\, x_u x_{uv} = F_u, \quad \mathbf{S}\, x_{uv} x_v = \tfrac{1}{2} G_u,$$
$$\mathbf{S}\, x_{uv} x_u = \tfrac{1}{2} E_v, \quad \mathbf{S}\, x_{uv} x_v + \mathbf{S}\, x_u x_{vv} = F_v, \quad \mathbf{S}\, x_{vv} x_v = \tfrac{1}{2} G_v,$$

die wir auch so schreiben können:

$$(3)\quad \begin{cases} \mathbf{S}\, x_{uu} x_u = \tfrac{1}{2} E_u, & \mathbf{S}\, x_{uv} x_u = \tfrac{1}{2} E_v, \quad \mathbf{S}\, x_{vv} x_u = F_v - \tfrac{1}{2} G_u, \\ \mathbf{S}\, x_{uu} x_v = F_u - \tfrac{1}{2} E_v, & \mathbf{S}\, x_{uv} x_v = \tfrac{1}{2} G_u, \quad \mathbf{S}\, x_{vv} x_v = \tfrac{1}{2} G_v. \end{cases}$$

Die Gleichungen (2) und (3) sind neun lineare Gleichungen für die neun partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von x, y, z:

$$\begin{matrix} x_{uu}, & x_{uv}, & x_{vv}, \\ y_{uu}, & y_{uv}, & y_{vv}, \\ z_{uu}, & z_{uv}, & z_{vv}. \end{matrix}$$

Dabei enthalten die drei in (2) und (3) links stehenden Gleichungen nur die partiellen Ableitungen der ersten Reihe, ferner die in (2) und (3) in der Mitte stehenden Gleichungen nur die partiellen Ableitungen der mittleren Reihe, und endlich die in (2) und (3) rechts stehenden Gleichungen nur die partiellen Ableitungen der dritten Reihe der soeben angegebenen Tafel. Wir werden nun sehen, daß jedesmal die betreffenden drei Gleichungen hinsichtlich der in ihnen vorkommenden Ableitungen zweiter Ordnung eine von Null verschiedene Determinante haben und daher nach diesen Ableitungen auflösbar sind. Durch die Auflösung ergeben sich diese Ableitungen ausgedrückt durch die Ableitungen erster Ordnung, durch die Fundamentalgrößen und durch die Ableitungen der Fundamentalgrößen erster Ordnung.

Die drei in (2) und (3) links stehenden Gleichungen können so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathsf{S}(y_u z_v - z_u y_v) x_{uu} &= D L, \\ \mathsf{S}\, x_u x_{uu} &= \tfrac{1}{2} E_u, \\ \mathsf{S}\, x_v x_{uu} &= F_u - \tfrac{1}{2} E_v. \end{aligned}$$

Ihre Determinante hinsichtlich x_{uu}, y_{uu}, z_{uu} ist:

$$\begin{vmatrix} y_u z_v - z_u y_v & z_u x_v - x_u z_v & x_u y_v - y_u x_v \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = D^2,$$

nach (12), S. 17. Da $D^2 \neq 0$ ist, sind die Gleichungen in der Tat nach x_{uu}, y_{uu} und z_{uu} auflösbar. Zunächst kommt:

$$x_{uu} = \frac{1}{D^2} \begin{vmatrix} D L & z_u x_v - x_u z_v & x_u y_v - y_u x_v \\ \tfrac{1}{2} E_u & y_u & z_u \\ F_u - \tfrac{1}{2} E_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

oder:

$$x_{uu} = \frac{1}{D^2} [D L (y_u z_v - z_u y_v) + \tfrac{1}{2} E_u (x_u y_v^2 + x_u z_v^2 - x_v y_u y_v - x_v z_u z_v) - \\ - (F_u - \tfrac{1}{2} E_v)(x_u y_u y_v + x_u z_u z_v - x_v y_u^2 - x_v z_u^2)].$$

Wenn wir in der zweiten runden Klammer $x_u x_v^2$ addieren und subtrahieren, bekommt ihr Inhalt nach (1) den Wert $x_u G - x_v F$, und wenn wir in der letzten runden Klammer $x_u^2 x_v$ addieren und subtrahieren, bekommt ihr Inhalt nach (1) den Wert $x_u F - x_v E$. Daher wird:

$$x_{uu} = \frac{1}{D^2} [D L (y_u z_v - z_u y_v) + \tfrac{1}{2} E_u (x_u G - x_v F) - (F_u - \tfrac{1}{2} E_v)(x_u F - x_v E)].$$

Die Werte für y_{uu} und z_{uu} gehen hieraus durch zyklische Vertauschung von x, y, z hervor.

Wenn wir alsdann in den drei Gleichungen u mit v und entsprechend E mit G sowie L mit $-N$ vertauschen, gehen die Werte von x_{vv}, y_{vv}, z_{vv} hervor.

Um x_{uv}, y_{uv}, z_{uv} zu finden, müssen wir die drei mittleren Gleichungen in (2) und (3) benutzen. Hier ist die Rechnung genau so wie vorher durchzuführen.

In dieser Weise kommen wir zu neun Formeln, von denen drei so lauten:

$$
(4) \quad \left\{
\begin{aligned}
x_{uu} &= \frac{L}{D}(y_u z_v - z_u y_v) + \frac{1}{2D^2}(E_u G + E_v F - 2F_u F)x_u + \\
&\qquad + \frac{1}{2D^2}(-E_u F - E_v E + 2F_u E)x_v, \\
x_{uv} &= \frac{M}{D}(y_u z_v - z_u y_v) + \frac{1}{2D^2}(E_v G - G_u F)x_u + \\
&\qquad + \frac{1}{2D^2}(-E_v F + G_u E)x_v, \\
x_{vv} &= \frac{N}{D}(y_u z_v - z_u y_v) + \frac{1}{2D^2}(-G_v F - G_u G + 2F_v G)x_u + \\
&\qquad + \frac{1}{2D^2}(G_v E + G_u F - 2F_v F)x_v,
\end{aligned}
\right.
$$

während die übrigen sechs aus diesen durch zyklische Vertauschung von x, y, z hervorgehen. Also gilt der

Satz 1: Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines Flächenpunktes nach den Parametern u und v lassen sich sämtlich durch die partiellen Ableitungen erster Ordnung von x, y, z nach u und v, durch die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung und durch die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Fundamentalgrößen erster Ordnung ausdrücken.

Hieraus ziehen wir weitere Schlüsse, wobei wir die Rechnungen gar nicht auszuführen brauchen: Wollen wir die partiellen Ableitungen dritter Ordnung der Koordinaten x, y, z nach u und v haben, so differenzieren wir die Formeln noch einmal nach u oder v. So gibt die erste Formel (4) nach u differenziert den Wert von x_{uuu}, und zwar ausgedrückt durch die Ableitungen erster und zweiter Ordnung von x, y, z, durch die Fundamentalgrößen, durch die Ableitungen erster und zweiter Ordnung von E, F, G und durch die Ableitungen erster Ordnung von L, M, N. Aber hierin können wir die Ableitungen zweiter Ordnung von x, y, z mit Hilfe der Formeln (4) und der sechs entsprechenden Formeln durch die Ableitungen erster Ordnung von x, y, z, durch die Fundamentalgrößen und die Ableitungen erster Ordnung von E, F, G ausdrücken, usw. So ergibt sich, wenn wir in derselben Weise weiter schließen:

Satz 2: Die partiellen Ableitungen zweiter und höherer Ordnung der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines Flächenpunktes nach den Parametern u und v lassen sich sämtlich durch die partiellen Ableitungen erster Ordnung

von x, y, z, die Fundamentalgrößen E, F, G, L, M, N und die partiellen Ableitungen der Fundamentalgrößen nach u und v ausdrücken, und zwar treten bei den Ableitungen n^{ter} Ordnung von x, y, z die Ableitungen von E, F, G bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und die von L, M, N bis zur $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung auf.

§ 2. Aufstellung der Fundamentalgleichungen.

Wir sahen, daß sich die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von x, y, z durch die von der ersten Ordnung, durch E, F, G, L, M, N und durch die partiellen Ableitungen erster Ordnung von E, F, G ausdrücken lassen. In den Formeln (4), S. 332, sind die Ausdrücke für x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} ausführlich angegeben worden. Wir zogen hieraus Schlüsse in bezug auf die höheren Ableitungen von x, y, z. Hierbei aber ist nun ein Einwand zu machen:

Wollen wir z. B. x_{uuv} berechnen, so kann dies in zwei Arten geschehen, entweder dadurch, daß wir die Formel für x_{uu} partiell nach v, oder dadurch, daß wir die Formel für x_{uv} partiell nach u differenzieren. Dasselbe gilt bei der Berechnung von x_{uvv}. Jedesmal haben wir zwei Methoden, und wenn wir die nach beiden Methoden berechneten Werte einander gleichsetzen, erhalten wir also zwei Gleichungen. Da wir dieselben Schlüsse für y_{uuv}, y_{uvv} und für z_{uuv}, z_{uvv} machen können, kommen wir so zu sechs Gleichungen.

Wir stellen uns die Aufgabe, diese sechs Gleichungen zu finden. Dabei werden wir sehen, daß sie sich auf nur drei reduzieren, die ihrer großen Wichtigkeit halber die drei Fundamentalgleichungen der Fläche heißen.

Da die Formeln einen größeren Rechenaufwand erfordern, ist es angebracht, sie zunächst unter speziellen Voraussetzungen abzuleiten, für die sie sich einfacher gestalten. Der Leser wird dadurch einen besseren Überblick gewinnen und alsdann ihre allgemeine Berechnung leichter verstehen.

Wir wollen zunächst den Fall betrachten, wo die Parameterkurven (u) und (v) Minimalkurven sind. Nach Satz 14, S. 44, ist dann:

$$E = G = 0,$$

so daß $D^2 = -F^2$ wird und also $D = iF$ angenommen werden darf. Nun bekommen die Gleichungen (4), S. 332, die einfachere Gestalt:

$$(1)\qquad\begin{cases} x_{uu} = -\dfrac{iL}{F}(y_u z_v - z_u y_v) + \dfrac{F_u}{F} x_u, \\ x_{uv} = -\dfrac{iM}{F}(y_u z_v - z_u y_v), \\ x_{vv} = -\dfrac{iN}{F}(y_u z_v - z_u y_v) + \dfrac{F_v}{F} x_v. \end{cases}$$

Wenn wir jetzt x_{uuv} aus der ersten Gleichung durch partielle Differentiation nach v berechnen wollen, haben wir rechts den Ausdruck

$$-\frac{i}{F}(y_u z_v - z_u y_v)$$

oder

$$\frac{y_u z_v - z_u y_v}{D}$$

partiell nach v zu differenzieren. Alsdann treten die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von y und z auf, die wir mit Hilfe der Formeln, die aus (1) durch zyklische Vertauschung von x, y, z hervorgehen, wieder entfernen könnten. Aber wir können dies Geschäft vereinfachen, weil wir nämlich die partiellen Ableitungen des angegebenen Ausdruckes schon früher berechnet haben, denn er ist ja nach XI (F) nichts anderes als X, und die Ableitungen von X sind in XII (R) angegeben. Danach ist, weil jetzt $E = G = 0$, $D = iF$ ist:

$$(2)\qquad\begin{cases} X_u = -\dfrac{M}{F} x_u - \dfrac{L}{F} x_v, \\ X_v = -\dfrac{N}{F} x_u - \dfrac{M}{F} x_v. \end{cases}$$

Wenn wir also statt (1) schreiben:

$$(3)\qquad\begin{cases} x_{uu} = LX + \dfrac{F_u}{F} x_u, \\ x_{uv} = MX, \\ x_{vv} = NX + \dfrac{F_v}{F} x_v \end{cases}$$

und nun die Formeln (2) benutzen, ist es ein leichtes, die Werte von x_{uuv} und x_{uvv} zu berechnen.

Die erste Formel (3) gibt, nach v differenziert, mit Rücksicht auf die zweite Formel (2):

$$x_{uuv} = L_v X - L\left(\frac{N}{F} x_u + \frac{M}{F} x_v\right) + \frac{\partial^2 \log F}{\partial u\, \partial v} x_u + \frac{F_u}{F} x_{uv}.$$

Die zweite Formel (3) dagegen gibt, nach u differenziert, mit Rücksicht auf die erste Formel (3):

$$x_{uuv} = M_u X - M\left(\frac{M}{F} x_u + \frac{L}{F} x_v\right).$$

Setzen wir beide Werte einander gleich und entfernen wir x_{uv} vermöge der zweiten Formel (3), so kommt:

$$L_v X - L\left(\frac{N}{F} x_u + \frac{M}{F} x_v\right) + \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} x_u + \frac{F_u}{F} M X =$$
$$= M_u X - M\left(\frac{M}{F} x_u + \frac{L}{F} x_v\right)$$

oder, geordnet nach X und x_u:

$$(4) \qquad \left(L_v - M_u + \frac{F_u}{F} M\right) X + \left(-\frac{LN}{F} + \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} + \frac{M^2}{F}\right) x_u = 0.$$

Hätten wir in entsprechender Weise aus denjenigen Formeln, die aus (3) durch Vertauschung von x mit y oder z und von X mit Y oder Z hervorgehen, die beiden Werte von y_{uuv} und die beiden Werte von z_{uuv} abgeleitet und jedesmal einander gleichgesetzt, so wären wir zu denjenigen beiden Gleichungen gelangt, die aus der letzten Gleichung durch dieselbe Vertauschung hervorgehen. Multiplizieren wir die drei so sich ergebenden Gleichungen mit X, Y, Z bzw. x_v, y_v, x_v und addieren sie jedesmal, so ergibt sich, weil $\mathbf{S}\,X^2 = 1$, $\mathbf{S}\,X x_u = 0$ und $\mathbf{S}\,X x_v = 0$ nach XI (I) ist, einzeln:

$$(5) \qquad L_v - M_u + \frac{F_u}{F} M = 0, \quad \frac{LN - M^2}{F} - \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} = 0,$$

und diese beiden Gleichungen ziehen umgekehrt die Gleichung (4) nach sich, sowie die aus (4) durch Vertauschung von x mit y oder z und X mit Y oder Z hervorgehenden beiden Gleichungen.

Wenn wir nach derselben Methode statt x_{uuv}, y_{uuv}, z_{uuv} die Größen x_{uvv}, y_{uvv}, z_{uvv} berechnen und jedesmal die beiden hervorgehenden Werte einander gleich setzen, ergeben sich diejenigen Bedingungen, die durch Vertauschung von u mit v hervorgehen, wobei dann auch L mit $-N$ und M mit $-M$ zu vertauschen ist. Es treten also entsprechend (5) die beiden Bedingungen auf:

$$N_u - M_v + \frac{F_v}{F} M = 0, \quad \frac{LN - M^2}{F} - \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} = 0.$$

Von diesen aber ist die zweite Gleichung identisch mit der zweiten Gleichung (5). Mithin ergeben sich insgesamt gerade drei Bedingungen, die wir so schreiben:

$$(6)\qquad \begin{cases} L_v - M_u = -\frac{F_u}{F} M, \\ \frac{LN - M^2}{F} = \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v}, \\ N_u - M_v = -\frac{F_v}{F} M. \end{cases}$$

Wir kehren jetzt wieder zu allgemeinen Parametern u und v zurück. Dabei haben wir die Gleichungen (1) durch die Gleichungen (4), S. 332, zu ersetzen. Da der Übergang von den soeben benutzten besonderen Parametern zu beliebigen Parametern dadurch bewirkt werden kann, daß man Funktionen der alten Parameter als neue einführt, ist es klar, daß sich auch im allgemeinen Falle drei Bedingungen ergeben werden, diejenigen nämlich, die aus (6) durch Einführung beliebiger neuer Parameter hervorgehen. Wir werden dies direkt nachweisen. Die Gleichungen (4), S. 332, lassen sich zunächst wegen XI (F) so schreiben:

$$(7)\qquad \begin{cases} x_{uu} = LX + \frac{1}{2D^2}(E_u G + E_v F - 2F_u F)x_u + \\ \qquad + \frac{1}{2D^2}(-E_u F - E_v E + 2F_u E)x_v, \\ x_{uv} = MX + \frac{1}{2D^2}(E_v G - G_u F)x_u + \\ \qquad + \frac{1}{2D^2}(-E_v F + G_u E)x_v, \\ x_{vv} = NX + \frac{1}{2D^2}(-G_v F - G_u G + 2F_v G)x_u + \\ \qquad + \frac{1}{2D^2}(G_v E + G_u F - 2F_v F)x_v. \end{cases}$$

Dabei nehmen wir Rücksicht auf die Formeln XII (R), mittels deren die Ableitungen von X, Y, Z zu berechnen sind und von denen die auf X bezüglichen so lauten:

$$(8)\qquad \begin{cases} X_u = \frac{1}{D^2}(FM - GL)x_u + \frac{1}{D^2}(FL - EM)x_v, \\ X_v = \frac{1}{D^2}(FN - GM)x_u + \frac{1}{D^2}(FM - EN)x_v. \end{cases}$$

Wir differenzieren also jetzt die erste Gleichung (7) partiell nach v und die zweite partiell nach u. Die dadurch hervorgehenden Werte von x_{uuv} setzen wir einander gleich. So erhalten wir, wenn wir die dabei auftretenden Werte von x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} mittels (7) und

die Werte X_u, X_v mittels (8) entfernen, zunächst die sehr umständliche Gleichung:

$$\begin{aligned}
&L_v X - M_u X + \\
&+ \frac{L}{D^2}(FN - GM)x_u + \frac{L}{D^2}(FM - EN)x_v - \\
&- \frac{M}{D^2}(FM - GL)x_u - \frac{M}{D^2}(FL - EM)x_v + \\
&+ \frac{1}{2D^2}(E_u G + E_v F - 2F_u F)\Big[MX + \frac{1}{2D^2}(E_v G - G_u F)x_u + \\
&\qquad + \frac{1}{2D^2}(-E_v F + G_u E)x_v\Big] + \\
&+ \frac{1}{2D^2}(-E_u F - E_v E + 2F_u E)\Big[NX + \frac{1}{2D^2}(-G_v F - G_u G + 2F_v G)x_u + \\
&\qquad + \frac{1}{2D^2}(G_v E + G_u F - 2F_v F)x_v\Big] - \\
&- \frac{1}{2D^2}(E_v G - G_u F)\Big[LX + \frac{1}{2D^2}(E_u G + E_v F - 2F_u F)x_u + \\
&\qquad + \frac{1}{2D^2}(-E_u F - E_v E + 2F_u E)x_v\Big] - \\
&- \frac{1}{2D^2}(-E_v F + G_u E)\Big[MX + \frac{1}{2D^2}(E_v G - G_u F)x_u + \\
&\qquad + \frac{1}{2D^2}(-E_v F + G_u E)x_v\Big] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial v}\frac{E_u G + E_v F - 2F_u F}{2D^2}\cdot x_u \quad + \frac{\partial}{\partial v}\frac{-E_u F - E_v E + 2F_u E}{2D^2}\cdot x_v - \\
&- \frac{\partial}{\partial u}\frac{E_v G - G_u F}{2D^2}\cdot x_u \quad - \frac{\partial}{\partial u}\frac{-E_v F + G_u E}{2D^2}\cdot x_v = 0.
\end{aligned}$$

Ehe wir an die Ausrechnung gehen, überblicken wir diese lange Gleichung und bemerken, daß sie in bezug auf X, x_u, x_v linear und homogen ist, also die Form hat:

$$\alpha X + \beta x_u + \gamma x_v = 0,$$

wobei α, β, γ Funktionen der Fundamentalgrößen und ihrer partiellen Ableitungen sind.

Wenn wir entsprechend y_{uuv} auf zwei Weisen berechnen und beide Werte einander gleich setzen und dasselbe für z_{uuv} tun, gehen ferner die Gleichungen hervor:

$$\alpha Y + \beta y_u + \gamma y_v = 0,$$
$$\alpha Z + \beta z_u + \gamma z_v = 0,$$

da α, β, γ ungeändert bleiben, wenn x, y, z zyklisch vertauscht werden.

Jetzt liegen drei in α, β, γ lineare homogene Gleichungen vor, deren Determinante nach XI (L) gleich D und daher von Null verschieden ist, so daß notwendig einzeln

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

sein muß. Diese drei Gleichungen ziehen umgekehrt die vorigen nach sich. Also sehen wir:

Die ersten drei Bedingungen ergeben sich dadurch, daß wir den Koeffizienten von X, den von x_u und den von x_v in der langen Gleichung auf der vorhergehenden Seite einzeln gleich Null setzen.

Wir hätten ebenso schließen können, indem wir x_{uvv}, y_{uvv}, z_{uvv} auf je zwei Arten berechneten. Die dadurch hervorgehenden Bedingungen aber ergeben sich offenbar einfacher dadurch, daß wir in den soeben erwähnten drei Bedingungen u mit v und also E mit G, L mit $-N$ und M mit $-M$ vertauschen.

Insgesamt ergeben sich also sechs Bedingungen, doch werden wir wie gesagt sehen, daß sie sich auf nur drei reduzieren.

Zunächst ist die Gleichung $\alpha = 0$, die sich also durch Nullsetzen des Koeffizienten von X aus der langen Gleichung auf S. 337 ergibt, diese:

$$(9)\quad \begin{cases} L_v - M_u = \dfrac{E_v G - G_u F}{2D^2} L - \\ \qquad - \dfrac{E_u G - G_u E + 2(E_v - F_u) F}{2D^2} M - \\ \qquad - \dfrac{-E_u F - E_v E + 2F_u E}{2D^2} N. \end{cases}$$

Rechnet man die Gleichungen $\beta = 0$ und $\gamma = 0$ aus, d. h. zieht man aus der langen Gleichung die Koeffizienten von x_u und von x_v und setzt sie gleich Null, so findet man, daß sich F bezw. E absondern läßt. Alsdann aber bleibt bei beiden dasselbe übrig, so daß die beiden Gleichungen $\beta = 0$ und $\gamma = 0$ nur die eine Bedingung ergeben:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{LN - M^2}{D^2} = \dfrac{1}{2D^2}(2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu}) + \\ \qquad + \dfrac{E}{4D^4}(G_u^2 + E_v G_v - 2G_v F_u) + \\ \qquad + \dfrac{G}{4D^4}(E_v^2 + E_u G_u - 2E_u F_v) + \\ \qquad + \dfrac{F}{4D^4}(E_u G_v - E_v G_u - 2F_u G_u - 2F_v E_v + 4F_u F_v). \end{cases}$$

Dabei sind die Formeln

$$D^2 = EG - F^2,$$

$$\frac{\partial (D^2)}{\partial u} = E_u G + G_u E - 2 F_u F, \qquad \frac{\partial (D^2)}{\partial v} = E_v G + G_v E - 2 F_v F$$

benutzt worden.

Die drei Bedingungen $\alpha = 0$, $\beta = 0$ und $\gamma = 0$ liefern somit nur die beiden Gleichungen (9) und (10). Die übrigen Bedingungen erhält man mithin, indem man in (9) und (10) die Parameter u und v und zugleich E mit G sowie L mit $-N$ und M mit $-M$ vertauscht. Dabei bleibt die Gleichung (10) unverändert. Deshalb tritt dadurch nur noch die eine aus (9) durch jene Vertauschung hervorgehende Gleichung hinzu:

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} N_u - M_v = \frac{G_u E - E_v F}{2D^2} N - \\ - \frac{G_v E - E_v G + 2(G_u - F_v) F}{2D^2} M - \\ - \frac{-G_v F - G_u G + 2 F_v G}{2D^2} L, \end{aligned} \right.$$

so daß wir wirklich zu nur drei Bedingungen gelangen, zu den Gleichungen (9), (10) und (11). Somit gilt der wichtige

Satz 3: Zwischen den Fundamentalgrößen E, F, G und L, M, N einer Fläche, den partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von E, F, G und denen erster Ordnung von L, M, N nach den Parametern u und v der Fläche bestehen drei Gleichungen. Die eine drückt

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

als Funktion von E, F, G und von den Ableitungen erster und zweiter Ordnung von E, F, G aus; die beiden anderen drücken

$$L_v - M_u \quad \text{und} \quad N_u - M_v$$

als lineare homogene Funktionen von L, M, N aus, deren Koeffizienten Funktionen von E, F, G und den Ableitungen erster Ordnung von E, F, G sind.

Es ist kaum nötig, zu erwähnen, daß die Gleichungen (9), (10) und (11) natürlich für $E = G = 0$ und $D = iF$ in die besonders einfachen Gleichungen (6) übergehen.

Die drei Gleichungen (9), (10) und (11) heißen, wie schon bemerkt wurde, die Fundamentalgleichungen der Fläche[1]. Den Hauptgrund für diese Benennung können wir schon hier kurz andeuten, wenn auch erst der nächste Paragraph das Genauere darüber bringt: Geht man nicht von einer gegebenen Fläche aus, nimmt man vielmehr sechs Funktionen E, F, G und L, M, N von u und v als gegeben an, wobei insbesondere $EG - F^2 \neq 0$ sei, so erhebt sich die Frage, ob diese Funktionen die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung einer Fläche mit den Parametern u und v sein können. Diese Frage ist nun ohne weiteres zu verneinen, wenn die sechs Funktionen nicht die drei Fundamentalgleichungen erfüllen. Genügen sie ihnen aber, so ist die Frage, wie wir im nächsten Paragraphen zeigen werden, zu bejahen. Hiernach springt die große Bedeutung der Fundamentalgleichungen ins Auge.

Wenn eine vorgelegte Fläche insbesondere eine Ebene ist, sind die drei Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L, M, N nach Satz 6, S. 123, gleich Null. Alsdann wird sowohl die Gleichung (9) als auch die Gleichung (11) eine Identität, während aus (10) eine Gleichung zwischen E, F, G und den Ableitungen erster und zweiter Ordnung von E, F, G wird, die uns nicht neu ist. Sie ist nämlich nichts anderes als die in Satz 64, I S. 154, angegebene Fundamentalgleichung der Ebene. Wir erkannten in Satz 65, I S. 156: Falls drei Funktionen E, F, G von u und v der Fundamentalgleichung der Ebene Genüge leisten, während $EG - F^2 \neq 0$ ist, gibt es krummlinige Koordinatensysteme u, v in der xy-Ebene, d. h. von einander unabhängige Funktionen x und y von u und v derart, daß $\mathbf{S}x_u^2$, $\mathbf{S}x_u x_v$ und $\mathbf{S}x_v^2$ gerade die Werte E, F und G haben. Man sieht mithin, daß die Betrachtungen in § 19, 1. Abschnitt des

[1] Von den drei Fundamentalgleichungen hat Gauss in seinen „Disquisitiones etc." (siehe die Anm. zu S. 6) die mittlere, nämlich (10), aufgestellt. Die von ihm daraus gezogenen wichtigen Schlüsse werden uns bald beschäftigen. Darboux und Bianchi betonten, daß es leicht ist, aus den „Disquisitiones" von Gauss auch die beiden anderen Fundamentalgleichungen herzuleiten. Diese heißen die Codazzischen Gleichungen, weil sie von Codazzi in der Abhandlung: „Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio", Annali di Mat. 2. Bd. (1868), zuerst aufgestellt worden sind. In anderer Einkleidung kommen sie aber schon vor in Mainardis Abhandlung „Su la teoria generale delle superficie", Giornale dell' Istituto Lombardo, Mailand, 9. Bd. 1857). Man nennt sie deshalb auch die Mainardi-Codazzischen Gleichungen. Bonnet gebührt das Verdienst, die große Bedeutung aller drei Fundamentalgleichungen ins rechte Licht gesetzt zu haben (vgl. den nächsten Paragraphen).

1. Bandes, eine Vorbereitung zu den allgemeinen Betrachtungen bilden, die wir im nächsten Paragraphen geben. Auch spätere Untersuchungen des gegenwärtigen Abschnittes sind damals schon für den besonderen Fall $L = M = N = 0$ erledigt worden.

§ 3. Existenzbeweis für eine Fläche mit gegebenen Fundamentalgrößen.

In diesem Paragraphen gehen wir von folgender Annahme aus: Gegeben seien sechs Funktionen E, F, G und L, M, N von u und v. Dabei soll $EG - F^2$ oder D^2 von Null verschieden sein. Gefragt wird, ob es eine Fläche

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

gibt, für die E, F, G und L, M, N die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung sind. Nach Satz 3, S. 339, ist diese Frage zu verneinen, falls E, F, G und L, M, N nicht alle drei Fundamentalgleichungen befriedigen. Wir setzen daher voraus, daß E, F, G und L, M, N allen drei Fundamentalgleichungen Genüge leisten.[1]

---

[1] Bonnet hat in seinem „Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée", Journ. de l'Ecole polyt., cah. 42 (1867), die aufgeworfene Frage bejahend beantwortet und geprüft, wie sich die gesuchten Flächen durch Integrationsverfahren finden lassen. In der ersten Auflage dieses Buches (1902) haben wir im Anschlusse an Bianchi, „Vorlesungen über Differentialgeometrie", deutsch von Lukat, Leipzig 1899 (inzwischen 2. Aufl. 1910), die Bestimmung der gesuchten Flächen ausführlich durchgeführt. Man kann aber, und so gehen wir nunmehr vor, das Problem teilen: Im gegenwärtigen Paragraphen führen wir nur den Nachweis, daß es Flächen von der gesuchten Art gibt. Erst später (in §§ 8 und 9) zeigen wir, wie man diese Flächen zu bestimmen vermag. Die Idee, die wir im vorliegenden Paragraphen benutzen, nämlich den Nachweis zu führen, daß die sechs Funktionen

$$\mathsf{S}\, x_u^2 - E, \quad \mathsf{S}\, x_u x_v - F, \quad \mathsf{S}\, x_v^2 - G, \quad \mathsf{S}\, X^2 - 1, \quad \mathsf{S}\, X x_u, \quad \mathsf{S}\, X x_v$$

unter gewissen Voraussetzungen infolge der vorliegenden Bedingungen verschwinden müssen, so daß E, F, G die Fundamentalgrößen erster Ordnung und X, Y, Z die Richtungskosinus der Flächennormale bedeuten, rührt von Engel her, ebenso wie die vorhin erwähnte Zerlegung des ganzen und für den Anfänger gewiß etwas schwierigen Problems in zwei gesonderte Teile. Wir glauben, daß dadurch der Überblick über die ganze Untersuchung ganz beträchtlich erleichtert wird. Im Anschlusse hieran sei noch erwähnt, daß ein Schüler Schurs das Problem in anderer Weise behandelt hat, siehe Kill, „Beiträge zum Fundamentalproblem der Flächentheorie", Straßburger Dissertation, Straßburg i. E., 1910.

Unter dieser Voraussetzung wird man nun auf die Gleichungen (7) und (8) des vorigen Paragraphen zurückgreifen, die wir hier noch einmal angeben:

$$(1)\quad\begin{cases} x_{uu} = LX + \frac{1}{2D^2}(E_u G + E_v F - 2F_u F)x_u + \\ \qquad + \frac{1}{2D^2}(-E_u F - E_v E + 2F_u E)x_v, \\ x_{uv} = MX + \frac{1}{2D^2}(E_v G - G_u F)x_u + \\ \qquad + \frac{1}{2D^2}(-E_v F + G_u E)x_v, \\ x_{vv} = NX + \frac{1}{2D^2}(-G_v F - G_u G + 2F_v G)x_u + \\ \qquad + \frac{1}{2D^2}(G_v E + G_u F - 2F_v F)x_v. \end{cases}$$

$$(2)\quad\begin{cases} X_u = \frac{1}{D^2}(FM - GL)x_u + \frac{1}{D^2}(FL - EM)x_v, \\ X_v = \frac{1}{D^2}(FN - GM)x_u + \frac{1}{D^2}(FM - EN)x_v. \end{cases}$$

Dazu gesellen sich die durch zyklische Vertauschung von x, y, z und X, Y, Z hervorgehenden zehn Gleichungen für die Ableitungen zweiter Ordnung von y und z und die Ableitungen erster Ordnung von Y und Z.

Da zwar E, F, G und L, M, N, also auch $EG - F^2$ oder D^2 gegebene Funktionen von u und v sind, aber weder die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z der fraglichen Fläche noch die Richtungskosinus X, Y, Z der Flächennormale als Funktionen von u und v bekannt sind, liegt demnach ein System von fünfzehn partiellen Differentialgleichungen für die unbekannten Funktionen x, y, z und X, Y, Z von u und v vor. Nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen ergeben sich, wenn man zum Ausdrucke bringt, daß infolge von (1)

$$\frac{\partial x_{uu}}{\partial v} = \frac{\partial x_{uv}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x_{uv}}{\partial v} = \frac{\partial x_{vv}}{\partial u}$$

sein soll, und wenn man entsprechend die Bedingungen für y und z ausrechnet, nur die drei Fundamentalgleichungen, von denen wir ja voraussetzen, daß sie erfüllt seien. Aber wir betrachten jetzt auch die Gleichungen (2) sowie die aus ihnen durch zyklische Vertauschung von x, y, z und X, Y, Z hervorgehenden vier Gleichungen; und deshalb müssen wir zunächst noch untersuchen, ob die Forderungen, daß

(3) $$\frac{\partial X_u}{\partial v} = \frac{\partial X_v}{\partial u}, \quad \frac{\partial Y_u}{\partial v} = \frac{\partial Y_v}{\partial u}, \quad \frac{\partial Z_u}{\partial v} = \frac{\partial Z_v}{\partial u}$$

sein soll, zu neuen Bedingungen führen.

Die erste dieser drei Forderungen gibt, wenn man die partielle Ableitung von X_u nach v auf Grund der ersten Gleichung (2) und die partielle Ableitung von X_v nach u auf Grund der zweiten Gleichung (2) berechnet:

$$\begin{aligned}
&(GM - FN)x_{uu} + (EN - GL)x_{uv} + (FL - EM)x_{vv} + \\
&+ (Fx_v - Gx_u)(L_v - M_u) + (Ex_v - Fx_u)(N_u - M_v) + \\
&+ \frac{x_u}{D^2}\Big[(E_v G^2 + G_v F^2 - 2F_v FG)L - \\
&\qquad -(E_u G^2 + G_u F^2 + E_v FG + G_v EF - 2F_u FG - F_v EG - F_v F^2)M + \\
&\qquad + (E_u FG + G_u EF - F_u EG - F_u F^2)N\Big] \\
&- \frac{x_v}{D^2}\Big[(E_v FG + G_v EF - F_v EG - F_v F^2)L - \\
&\qquad -(G_v E^2 + E_v F^2 + E_u FG + G_u EF - 2F_v EF - F_u EG - F_u F^2)M + \\
&\qquad + (G_u E^2 + E_u F^2 - 2F_u EF)N\Big] = 0.
\end{aligned}$$

Setzt man nun in die erste Zeile die Werte von x_{uu}, x_{uv} und x_{vv} aus (1) ein und in die zweite Zeile die Werte von $L_v - M_u$ und $N_u - M_v$, die durch die beiden nach Voraussetzung erfüllten Fundamentalgleichungen (9) und (11) auf S. 338 u. f. gegeben werden, so heben sich sämtliche Glieder der Gleichung fort. Mithin geht keine neue Bedingung für die Funktionen E, F, G und L, M, N hervor. Dasselbe Ergebnis gilt natürlich, wenn man die beiden anderen Forderungen (3) ausrechnet.

Die fünfzehn Differentialgleichungen, von denen (1) und (2) nur die fünf ersten darstellen, bilden deshalb ein sogenanntes unbeschränkt integrabeles System. Damit meint man, daß die Forderungen

$$\frac{\partial x_{uu}}{\partial v} = \frac{\partial x_{uv}}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_{uv}}{\partial v} = \frac{\partial x_{vv}}{\partial u}, \quad \frac{\partial X_u}{\partial v} = \frac{\partial X_v}{\partial u}$$

sowie die entsprechenden in y und Y sowie in z und Z, ausgerechnet auf Grund des vorliegenden Systems von Differentialgleichungen, nur zu schon erfüllten Bedingungen zwischen den gegebenen Funktionen E, F, G und L, M, N und ihren Ableitungen führen.

Das System von fünfzehn Differentialgleichungen für die sechs Funktionen

$$x, y, z, \quad X, Y, Z$$

kann ohne weiteres ersetzt werden durch ein System von achtzehn Differentialgleichungen für die neun Funktionen

$$x_u,\ x_v,\ y_u,\ y_v,\ z_u,\ z_v,\ X,\ Y,\ Z. \tag{4}$$

Die erste Gleichung (1) gibt nämlich die partielle Ableitung von x_u nach u, die zweite die von x_v nach u, aber auch die von x_u nach v, die dritte die von x_v nach v, usw. Wir können also auf Grund unserer fünfzehn Differentialgleichungen alle achtzehn partiellen Ableitungen erster Ordnung der neun Funktionen (4), also

$$\frac{\partial x_u}{\partial u},\quad \frac{\partial x_u}{\partial v},\quad \frac{\partial x_v}{\partial u},\quad \frac{\partial x_v}{\partial v},\quad \cdots$$

sowie

$$\frac{\partial X}{\partial u},\quad \frac{\partial X}{\partial v},\quad \cdots$$

als Funktionen von den neun Funktionen (4) selbst, von E, F, G und L, M, N und von den partiellen Ableitungen erster Ordnung von E, F, G darstellen. Mit anderen Worten: Es liegt ein System von achtzehn partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für die neun Funktionen (4) vor. Dies System hat zwei besondere Eigenschaften: Erstens sind die rechten Seiten der Gleichungen ganze lineare homogene Funktionen der neun Funktionen (4) selbst, wobei als Koeffizienten Ausdrücke in E, F, G, L, M, N und in den partiellen Ableitungen erster Ordnung von E, F, G vorkommen. Deshalb liegt ein System von achtzehn linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vor. Zweitens: Dies System heißt integrabel. Das soll nur besagen, daß diejenigen Funktionen (4), die ihm Genüge leisten, stets auch die Bedingungen

$$\frac{\partial x_u}{\partial v} = \frac{\partial x_v}{\partial u},\quad \frac{\partial y_u}{\partial v} = \frac{\partial y_v}{\partial u},\quad \frac{\partial z_u}{\partial v} = \frac{\partial z_v}{\partial u}$$

befriedigen, da sie ja, wie wir vorhin gesehen haben, gerade auf die drei Fundamentalgleichungen führen, von denen wir voraussetzen, daß sie erfüllt seien. Hat man also neun Funktionen (4) ermittelt, die dem linearen homogenen System von achtzehn partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung Genüge leisten, so gibt es auch sicher Funktionen x, y, z von u und v, deren partielle Ableitungen erster Ordnung gerade die ermittelten Funktionen x_u, x_v usw. sind.

Wir sind nun genötigt, den Satz von dem Vorhandensein von Lösungensystemen aus der allgemeinen Theorie der

Differentialgleichungen heranzuziehen.[1] Danach gibt es unendlich viele Lösungensysteme, d. h. unendlich viele Systeme von Funktionen (4) von u und v, die das System von achtzehn Differentialgleichungen befriedigen. Wie man sie durch Integrationsverfahren zu bestimmen vermag, das ist eine Frage, die wir hier durchaus noch nicht zu erörtern brauchen. Uns genügt vollkommen die Gewißheit, daß sie vorhanden sind. Noch eines ist aus der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen zu entnehmen: Wenn man ein Wertepaar u_0, v_0 von u und v irgendwie bestimmt herausgreift, das demjenigen Wertebereiche angehört, innerhalb dessen E, F, G, L, M, N einwertige analytische Funktionen von u und v sind, während $EG - F^2$ oder D^2 für das gewählte Wertepaar u_0, v_0 nicht gerade gleich Null ist, gibt es stets solche neun Funktionen

$$x_u, y_u, z_u, \quad x_v, y_v, z_v, \quad X, Y, Z,$$

die dem System von Differentialgleichungen in einem gewissen Bereiche um u_0, v_0 herum Genüge leisten, indem sie dabei erstens in diesem Bereiche einwertige analytische Funktionen sind und zweitens für $u = u_0$, $v = v_0$ selbst irgendwelche bestimmt vorgeschriebene Werte

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{c} x_u^0 = a_1, \; y_u^0 = b_1, \; z_u^0 = c_1; \quad x_v^0 = a_2, \; y_v^0 = b_2, \; z_v^0 = c_2; \\ X_0 = A, \; Y_0 = B, \; Z_0 = C \end{array} \right.$$

annehmen. Der Index Null soll natürlich die Substitution von u_0 und v_0 für u und v andeuten. Jene Funktionen sind alsdann so beschaffen, daß

$$x_u du + x_v dv, \quad y_u du + y_v dv, \quad z_u du + z_v dv$$

vollständige Differentiale, also die Differentiale gewisser Funktionen x, y, z von u und v werden. Nun muß bewiesen werden, daß diese Funktionen x, y, z von u und v bei geeigneter Wahl der Konstanten (5) eine Fläche definieren, deren Fundamentalgrößen die gegebenen Funktionen E, F, G und L, M, N sind.

Dies Ziel kann aber durch ein anderes ersetzt werden. Wir behaupten: Wenn bewiesen worden wäre, daß die drei Funk-

[1] Solchen Lesern, denen der gegenwärtige Paragraph zu schwer fällt, raten wir, vorläufig nur die in den Sätzen 4 und 5, S. 350, ausgesprochenen Ergebnisse zur Kenntnis zu nehmen. Das Verstehen des Späteren wird durch Überschlagen dieses Paragraphen nicht beeinträchtigt, trotzdem die Sätze 4 und 5 von grundlegender Bedeutung sind.

tionen X, Y, Z die Richtungskosinus der Flächennormale und E, F, G die Fundamentalgrößen erster Ordnung sind, würde auch feststehen, daß L, M, N die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung sind.

In der Tat, aus (2) folgt:

$$D^2 \mathsf{S}\, X_u x_u = (FM - GL)\mathsf{S}\, x_u^2 + (FL - EM)\mathsf{S}\, x_u x_v,$$
$$D^2(\mathsf{S}\, X_u x_v + \mathsf{S}\, X_v x_u) = (FN - GM)\mathsf{S}\, x_u^2 + (2FM - GL - EN)\mathsf{S}\, x_u x_v + (FL - EM)\mathsf{S}\, x_v^2,$$
$$D^2 \mathsf{S}\, X_v x_v = (FN - GM)\mathsf{S}\, x_u x_v + (FM - EN)\mathsf{S}\, x_v^2.$$

Wären nun $\mathsf{S}\, x_u^2$, $\mathsf{S}\, x_u x_v$ und $\mathsf{S}\, x_v^2$ entsprechend XI (A) gleich E, F, G, so ließe sich aus den vorstehenden Formeln auch rechts überall $EG - F^2$ oder D^2 absondern und daher fortheben, so daß bliebe:

$$\mathsf{S}\, X_u x_u = -L, \quad \mathsf{S}\, X_u x_v + \mathsf{S}\, X_v x_u = -2M, \quad \mathsf{S}\, X_v x_v = -N,$$

was, falls X, Y, Z die Richtungskosinus der Normale wären, nach XII (C) besagen würde, daß L, M, N wirklich die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung wären.

Daher können wir unser Ziel jetzt so aussprechen: Wir haben zu beweisen, daß E, F, G die Fundamentalgrößen erster Ordnung und X, Y, Z die Richtungskosinus der Normale sind, d. h. wir haben zu beweisen, daß die sechs Funktionen

$$(6)\quad \begin{cases} \Phi_1 = \mathsf{S}\, x_u^2 - E, & \Phi_2 = \mathsf{S}\, x_u x_v - F, & \Phi_3 = \mathsf{S}\, x_v^2 - G, \\ \Phi_4 = \mathsf{S}\, X^2 - 1, & \Phi_5 = \mathsf{S}\, X x_u, & \Phi_6 = \mathsf{S}\, X x_v \end{cases}$$

bei zweckmäßiger Wahl der unter (5) angegebenen neun Konstanten gleich Null sind. Denn wenn Φ_1, Φ_2, Φ_3 gleich Null sind, lehrt XI (A), daß E, F, G die Fundamentalgrößen erster Ordnung sind, und aus $\Phi_4 = 0$ folgt, daß X, Y, Z die Kosinus einer von u und v abhängigen Richtung sind, die wegen $\Phi_5 = 0$ und $\Phi_6 = 0$ zu den Tangenten der Parameterlinien (v) und (u) senkrecht ist, so daß X, Y, Z die Richtungskosinus der Normale vorstellen. Die Orientierung der Normale hängt davon ab, wie man die Einwertigkeit der Quadratwurzel $\sqrt{EG - F^2}$ festgesetzt hat (siehe S. 32). Darauf kommen wir nachher zurück; vorläufig genügt die Bemerkung, daß in den Differentialgleichungen nicht D selbst, sondern nur D^2 vorkommt.

Die neun Funktionen

$$x_u, y_u, z_u, \quad x_v, y_v, z_v, \quad X, Y, Z$$

hängen wesentlich von der Wahl ihrer Werte für $u = u_0$, $v = v_0$ ab; deshalb ist vor Beginn des Beweises noch dafür Sorge zu tragen, daß man diese sogenannten Anfangswerte (5) so annimmt, daß die sechs Funktionen (6) für $u = u_0$, $v = v_0$ sämtlich gleich Null sind. Dies läßt sich aber stets erreichen. Sind nämlich E_0, F_0 und G_0 die Werte von E, F, G für $u = u_0$, $v = v_0$, so kann man wirklich die neun Konstanten

$$a_1, b_1, c_1, \quad a_2, b_2, c_2, \quad A, B, C$$

in (5) so annehmen, daß

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathbf{S}\, a_1^2 = E_0, & \mathbf{S}\, a_1 a_2 = F_0, & \mathbf{S}\, a_2^2 = G_0, \\ \mathbf{S}\, A^2 = 1, & \mathbf{S}\, A a_1 = 0, & \mathbf{S}\, A a_2 = 0 \end{cases}$$

wird; die Summenzeichen beziehen sich dabei auf die zyklische Vertauschung von a, b, c und A, B, C. Zunächst nämlich gibt es augenscheinlich sechs Konstanten a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2, die die drei ersten Bedingungen (7) befriedigen. Für sie ist

$$\mathbf{S}\, a_1^2\, \mathbf{S}\, a_2^2 - (\mathbf{S}\, a_1 a_2)^2 = E_0 G_0 - F_0^2$$

oder nach (11), I S. 194:

$$(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = E_0 G_0 - F_0^2.$$

Da nun vorausgesetzt wurde, daß $E_0 G_0 - F_0^2$ oder D_0^2 von Null verschieden sein soll, sind also die drei zweireihigen Determinaten

$$b_1 c_2 - b_2 c_1, \quad c_1 a_2 - c_2 a_1, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1$$

nicht sämtlich gleich Null. Die beiden letzten Gleichungen (7), nämlich:

$$\mathbf{S}\, A a_1 = 0, \quad \mathbf{S}\, A a_2 = 0,$$

liefern somit die Verhältnisse von A, B, C, und daher läßt sich ein geeigneter Faktor so finden, daß schließlich auch $\mathbf{S}\, A^2 = 1$ wird. Das Vorzeichen des Faktors kann man dabei immer so wählen, daß die Bedingung XI (L), nämlich:

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix} = D,$$

für $u = u_0$, $v = v_0$ befriedigt wird, d. h. daß

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & A \\ a_2 & b_2 & B \\ a_3 & b_3 & C \end{vmatrix} = D_0$$

wird, so daß also D für $u = u_0$, $v = v_0$ wirklich denjenigen Wert erhält, der dort der einwertig gemachten Funktion D zukommt.

Hiernach dürfen wir voraussetzen, daß die Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, .. \Phi_6$, die man nach der Vorschrift (6) aus einem gewissen Lösungensysteme $x_u, x_v, \ldots X, \ldots$ der achtzehn Differentialgleichungen bilden kann, insbesondere für $u = v_0$, $v = v_0$ sämtlich gleich Null sind, was wir so ausdrücken:

$$(8) \qquad \Phi_1^0 = 0, \quad \Phi_2^0 = 0, \quad \ldots \quad \Phi_6^0 = 0.$$

Übrig bleibt alsdann, zu beweisen, daß $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_6$ auch für beliebige Wertepaare u, v verschwinden.

Zu diesem Zwecke berechnen wir auf Grund von (1), (2) und (6) die partiellen Ableitungen erster Ordnung der sechs Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_6$. Dies bietet keine Schwierigkeiten, und wir begnügen uns damit, das Verfahren und das Wesentliche des Ergebnisses an der Berechnung der partiellen Ableitung von Φ_1 nach u zu zeigen. Nach der ersten Formel (6) ist

$$(9) \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} = 2 \mathbf{S} x_u x_{uu} - E_u.$$

Die hier vorkommende Summe geht aus der ersten Gleichung (1) hervor, wenn wir aus ihr die beiden sich durch zyklische Vertauschung von x, y, z und X, Y, Z ergebenden Gleichungen ebenfalls bilden, die drei Gleichungen der Reihe nach mit x_u, y_u, z_u multiplizieren und darauf addieren. Für die dabei rechts auftretenden Summen $\mathbf{S} X x_u$, $\mathbf{S} x_u^2$ und $\mathbf{S} x_u x_v$ sind nach (6) die Werte Φ_5, $\Phi_1 + E$ und $\Phi_2 + F$ einzusetzen. Demnach geht hervor:

$$\mathbf{S} x_u x_{uu} = L \Phi_5 + \frac{1}{2 D^2}(E_u G + E_v F - 2 F_u F)(\Phi_1 + E) + \\ + \frac{1}{2 D^2}(- E_u F - E_v E + 2 F_u E)(\Phi_2 + F).$$

Wird dieser Wert in (9) eingeführt und beachtet, daß dabei ein Glied von der Form

$$\frac{1}{D^2} E_u (E G - F^2)$$

auftritt, das wegen $E G - F^2 = D^2$ gleich E_u selbst ist, so findet man:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} = 2 L \Phi_5 + \frac{1}{D^2}(E_u G + E_v F - 2 F_u F) \Phi_1 + \\ + \frac{1}{D^2}(- E_u F - E_v E + 2 F_u E) \Phi_2.$$

Man sieht also, daß sich die partielle Ableitung von Φ_1 nach u darstellt als eine ganze lineare homogene Funktion von Φ_5, Φ_1 und Φ_2, deren Koeffizienten sich durch die gegebenen Fundamentalgrößen und ihre Ableitungen ausdrücken, also bekannte Funktionen von u und v sind.

Dieselbe Art der Berechnung läßt sich auf alle partiellen Ableitungen erster Ordnung der sechs Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_6$ anwenden. Man findet dabei, daß sie sich sämtlich als ganze lineare homogene Funktionen von $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_6$ selbst darstellen, deren Koeffizienten bekannte Funktionen von u und v sind, so daß wir das Ergebnis summarisch in der Form niederschreiben können:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial u} = \alpha_{i1}\,\Phi_1 + \alpha_{i2}\,\Phi_2 + \cdots + \alpha_{i6}\,\Phi_6, \\ \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial v} = \beta_{i1}\,\Phi_1 + \beta_{i2}\,\Phi_2 + \cdots + \beta_{i6}\,\Phi_6. \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots 6)$$

Dabei ergeben sich die Koeffizienten $\alpha_{i1}, \ldots$ und $\beta_{i1}, \ldots$ als Ausdrücke in E, F, G, L, M, N und in den partiellen Ableitungen erster Ordnung von E, F, G, so daß sie sämtlich bekannte Funktionen von u und v sind. Welche besonderen Werte sie haben, ist für die folgende Beweisführung belanglos.

Wir schließen aus (10) weiterhin so: Differenziert man die Gleichungen (10) nochmals nach u oder v, so treten rechts die partiellen Ableitungen erster Ordnung von $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_6$ auf. Für sie kann man aber die Werte (10) selbst einsetzen. Also stellen sich auch die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_6$ in derselben charakteristischen Form dar wie die von der ersten Ordnung. Diese Schlußfolgerung läßt sich beliebig weit fortsetzen. Das allgemeine Ergebnis ist: Jede partielle Ableitung beliebig hoher Ordnung einer der sechs Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_6$ ist eine ganze lineare homogene Funktion von $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_6$ selbst mit von u und v abhängigen bekannten Koeffizienten.

Nun aber haben $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_6$ für $u = u_0$, $v = v_0$ nach (8) sämtlich den Wert Null. Berechnet man also auf Grund der Formeln, von denen soeben die Rede war, die partiellen Ableitungen von $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_6$ in beliebig hohen Ordnungen insbesondere für $u = u_0$, $v = v_0$, so ergibt sich auch für sie immer der Wert Null. Die Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_6$ sind demnach so beschaffen, daß sie nebst allen ihren partiellen Ableitungen beliebig hoher Ordnung für $u = u_0$, $v = v_0$ gleich Null sind. Da sie analytische Funktionen sind, haben sie folglich überhaupt den Wert Null, d. h. nicht nur

an der Stelle $u = u_0$, $v = v_0$, sondern für beliebige Wertepaare u, v in der Umgebung des Paares u_0, v_0. Dies aber wollten wir beweisen.

Somit gilt der

Satz 4: Sind E, F, G und L, M, N solche Funktionen von u und v, die den drei Fundamentalgleichungen genügen und für die $EG - F^2$ nicht identisch verschwindet, so gibt es wenigstens eine Fläche mit den Parametern u und v, die E, F, G und L, M, N zu Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung hat.

Man kann hierfür auch so sagen:

Satz 5: Damit sechs Funktionen E, F, G und L, M, N von u und v, für die $EG - F^2$ nicht identisch verschwindet, die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung einer Fläche mit den Parametern u und v sind, ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, daß sie den drei Fundamentalgleichungen Genüge leisten.[1]

Erst durch dies Ergebnis wird die Bedeutung der Fundamentalgleichungen ins rechte Licht gerückt. Aber die Aufgabe, die durch gegebene Fundamentalgrößen gestellt wird, ist damit noch nicht erledigt. Wir werden vielmehr später zu zeigen haben, wie man die zugehörigen Flächen durch Integration zu finden vermag. Auch werden wir die Frage nach allen zugehörigen Flächen beantworten.

Ehe wir dazu übergehen, behandeln wir einige andere Probleme, die mit den Fundamentalgleichungen zusammenhängen.

§ 4. Verbiegung einer Fläche auf eine andere.

Unter den drei Fundamentalgleichungen hat eine, nämlich die Gleichung (10) auf S. 338, eine besondere Bedeutung. Hier steht links nach XII (K) nichts anderes als das Krümmungsmaß

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

der Fläche. Mithin gilt der

Satz 6:[2] Das Krümmungsmaß K einer Fläche ist als eine Funktion darstellbar, die nur von den Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G und ihren partiellen Ab-

[1] Wie gesagt, vgl. die Anm. zu S. 341, ist dies ein Satz von Bonnet.

[2] Wie schon in der Anm. zu S. 340 gesagt wurde, rührt dieser Satz von Gauss her.

leitungen erster und zweiter Ordnung nach den Parametern u und v der Fläche abhängt.

Dies Ergebnis hat einen geometrischen Sinn, wie bald auseinander gesetzt werden wird. Wir bedürfen dazu einiger Vorbereitungen.

Nach Satz 16, I S. 390, lassen sich nur die Tangentenflächen, Kegel und Zylinder längentreu auf die Ebene $z = 0$ abbilden, abgesehen von den Tangentenflächen und Kegeln, deren Erzeugende Minimalgeraden sind, und von den Minimalebenen. Deshalb heißen diese Flächen abwickelbare Flächen. Es wäre deutlicher, sie auf die Ebene abwickelbare Flächen zu nennen. Wenn man nämlich die Ebene durch eine krumme Fläche ersetzt, kommt man zu einem neuen Problem:

Gegeben seien zwei Flächen. Wir fragen uns, ob es möglich ist, die eine Punkt für Punkt auf die andere so abzubilden, daß jeder Kurve auf der einen Fläche eine gleichlange Kurve auf der anderen Fläche entspricht. Läßt sich diese Forderung der Längentreue (vgl. S. 53) erfüllen, so könnte man sagen, daß die eine Fläche auf die andere abwickelbar sei. Man zieht jedoch vor, zu sagen: Die eine Fläche läßt sich auf die andere verbiegen,[1] indem man also unter Verbiegung eine solche Änderung einer Fläche versteht, bei der keine Flächenkurve eine Dehnung oder Kürzung erleidet. Die Bevorzugung des Wortes Verbiegung vor dem Worte

[1] Das Problem der Verbiegung von Flächen wurde von Gauss in seinen „Disquisitiones" zuerst gestellt und behandelt. Daran schließt sich eine sehr große Reihe von Arbeiten, von denen wir nur die folgenden nennen:

Minding, „Wie sich entscheiden läßt, ob zwei gegebene krumme Flächen aufeinander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen mit unveränderlichem Krümmungsmaße", Journ. f. d. r. u. ang. Math. 19. Bd. (1839).

Liouvilles Noten: „Sur le théorème de M. Gauss, concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface" und „Du tracé géographique des surfaces les unes sur les autres" zur 5. Aufl. von Monges „Application", Paris 1850.

Bour, „Théorie de la déformation des surfaces", Journ. de l'École polyt. 39. cah. (1862).

Bonnet, „Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée", Journ. de l'École polyt. 41. u. 42. cah. (1865—67).

Weingarten, „Über eine Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen", Journ. f. d. r. u. ang. Math. 59. Bd. (1861), und „Über die Theorie der aufeinander abwickelbaren Oberflächen", Festschrift der Technischen Hochschule zu Berlin 1884.

Endlich ist noch die Behandlung des Problems in Darboux' „Leçons sur la théorie générale des surfaces", 3. partie, Paris 1894, zu erwähnen.

Abwickelung hat ihren Grund darin, daß man unter Abwickelung oft stillschweigend die Abwickelung auf die Ebene, statt auf eine krumme Fläche, versteht. Die abwickelbaren Flächen also sind die auf die Ebene verbiegbaren Flächen.

Die Verbiegung einer Fläche auf eine andere Fläche kann auch als eine zugleich flächentreue und konforme Abbildung definiert werden, wie nach S. 84, 85 erhellt. Der Ähnlichkeitsmaßstab ist hier 1:1, d. h. die Verbiegung kann auch als eine solche Abbildung bezeichnet werden, bei der jedem unendlich kleinen Stücke der einen Fläche ein kongruentes Stück der anderen entspricht.

Hervorgehoben sei noch, daß wir im allgemeinen mit dem Wort Verbiegung durchaus nicht den Begriff einer stetigen Überführung der einen Fläche in die andere — ohne Dehnung — verbinden. Ob die Verbiegung einer Fläche in eine andere Fläche auf stetigem Wege möglich ist, das ist eine schwierigere Frage, die wir nur in einzelnen Beispielen beantworten werden.[1]

Während zwei beliebige Flächen nach Satz 41, S. 86, stets konform aufeinander abgebildet werden können, ist es klar, daß zwei beliebige Flächen nicht immer aufeinander verbiegbar sein werden, denn wir wissen ja z. B., daß auf die Ebene nur die sogenannten abwickelbaren Flächen verbiegbar sind. Vielmehr wird es zu jeder bestimmt gewählten Fläche nur eine gewisse Familie von Flächen geben, die auf sie verbiegbar sind.

Wenn wir wie in § 12 des 1. Abschnittes, S. 104, die punktweise Abbildung einer Fläche auf eine andere analytisch dadurch ausdrücken, daß wir entsprechenden Punkten beider Flächen dieselben Parameterwerte u, v geben, so daß etwa

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v) \tag{1}$$

und

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(u, v), \quad \bar{y} = \bar{\chi}(u, v), \quad \bar{z} = \bar{\psi}(u, v) \tag{2}$$

die Gleichungen der beiden Flächen sind, deren Bogenelemente die Quadrate

$$\left\{ \begin{aligned} ds^2 &= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ d\bar{s}^2 &= \bar{E}\,du^2 + 2\bar{F}\,du\,dv + \bar{G}\,dv^2 \end{aligned} \right. \tag{3}$$

haben mögen, so wird die Abbildung der einen Fläche auf die andere

[1] Damit mit dem Begriffe der Verbiegung nicht ohne weiteres der des stetigen Überganges in die zweite Fläche verbunden werde, sprechen einige Geometer, z. B. Voss, statt von Verbiegung von Isometrie.

nur dann eine Verbiegung sein, wenn insbesondere jedes Bogenelement ds der einen Fläche dieselbe Länge wie sein Bild $d\bar{s}$ hat. Nach (3) tritt dies dann und nur dann ein, wenn

$$E = \bar{E}, \quad F = \bar{F}, \quad G = \bar{G} \tag{4}$$

ist. Da jede Kurvenlänge ein Integral über Bogenelemente ist, sind dann auch entsprechende Kurven beider Flächen gleich lang. Also gilt der

Satz 7: Eine Fläche ist dann und nur dann auf eine andere Fläche verbiegbar, wenn es möglich ist, Parameter auf beiden Flächen derart einzuführen, daß die Fundamentalgrößen erster Ordnung der einen Fläche den entsprechenden Fundamentalgrößen erster Ordnung der anderen Fläche gleich werden. Alsdann entsprechen diejenigen Punkte beider Flächen einander, die zu denselben Werten der Parameter gehören.

Nach Satz 6 ist dann auch das Krümmungsmaß K der einen Fläche gleich dem Krümmungsmaße $\bar{K}$ der anderen. Daher:

Satz 8: Sind zwei Flächen aufeinander verbiegbar, so haben sie in einander entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmaß.

Oder auch:

Satz 9: Bei der Verbiegung einer Fläche bleibt ihr Krümmungsmaß überall ungeändert.[1]

Auf diesen wichtigen Satz haben wir schon gelegentlich (auf S. 295) hingewiesen.

Wenn zwei Flächen aufeinander verbiegbar sein sollen, müssen hiernach die einander entsprechenden Punkte beider Flächen dasselbe Krümmungsmaß haben. Hat man zwischen zwei Flächen eine punktweise Abbildung so hergestellt, daß jedem Punkte der einen Fläche dasselbe Krümmungsmaß wie seinem Bildpunkte auf der anderen Fläche zukommt, so folgt aber daraus keineswegs, daß die Abbildung der einen Fläche auf die andere eine Verbiegung wäre. Es ist in der Tat leicht, Beispiele für das Gegenteil zu bilden.[2]

---

[1] Die Sätze 6 bis 9 rühren von Gauss her. Insbesondere ist Satz 9 das von Gauss so genannte „Theorema egregium".

[2] Solche Beispiele gaben Stäckel und Wangerin, „Zur Theorie des Gaussschen Krümmungsmaßes", Leipziger Berichte 1893. Das auf S. 354 mitgeteilte rührt von Wangerin her.

1. Beispiel: In der xz-Ebene sei die logarithmische Kurve

$$x = u, \quad y = 0, \quad z = \log u$$

gegeben. Ihre Drehung um die z-Achse gibt die Rotationsfläche der logarithmischen Kurve:

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = \log u,$$

deren Bogenelement-Quadrat den Wert

$$ds^2 = \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du^2 + u^2 dv^2$$

hat. Ferner betrachten wir die gemeine Schraubenfläche (vgl. S. 73 u. f.):

$$\bar{x} = \bar{u}\cos\bar{v}, \quad \bar{y} = \bar{u}\sin\bar{v}, \quad \bar{z} = \bar{v},$$

deren Schraubenhöhe gleich 2π ist. Hier ist das Quadrat des Bogenelements:

$$d\bar{s}^2 = d\bar{u}^2 + (1 + \bar{u}^2)\, d\bar{v}^2.$$

Da bei der ersten Fläche die Fundamentalgrößen erster Ordnung die Werte

$$E = 1 + \frac{1}{u^2}, \quad F = 0, \quad G = u^2$$

und bei der zweiten Fläche die Werte:

$$\bar{E} = 1, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = 1 + \bar{u}^2$$

haben, ergibt die Fundamentalgleichung (10), S. 338, für die Krümmungsmaße K und $\bar{K}$ beider Flächen die Werte:

$$K = -\frac{1}{(1 + u^2)^2}, \quad \bar{K} = -\frac{1}{(1 + \bar{u}^2)^2}.$$

Wenn wir also die Punkte der beiden Flächen einander dadurch zuordnen, daß wir

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = v$$

setzen, haben einander zugeordnete Punkte dasselbe Krümmungsmaß, während doch die Quadrate der Bogenelemente verschieden sind. Diese punktweise Zuordnung ist also keine Verbiegung der einen Fläche auf die andere.

Es gibt überhaupt keine Abbildung der einen Fläche auf die andere, die eine Verbiegung wäre. Denn die allgemeinste Abbildung der einen Fläche auf die andere, bei der jedem Punkte (u, v) ein Punkt $(\bar{u}, \bar{v})$ mit demselben Krümmungsmaße entspricht, geht hervor, wenn man

$$1 + \bar{u}^2 = \pm(1 + u^2),$$

also

$$\bar{u} = \pm u \quad \text{oder} \quad \bar{u} = \sqrt{-2 - u^2}$$

setzt, während $\bar{v}$ eine beliebige Funktion von u und v sein darf:

$$\bar{v} = \varphi(u, v),$$

wobei $\varphi_v \neq 0$ ist. Führen wir zunächst $\bar{u} = \pm u$, $\bar{v} = \varphi(u, v)$ in den Ausdruck für $d\bar{s}^2$ ein, so kommt:

$$d\bar{s}^2 = du^2 + (1 + u^2)(\varphi_u du + \varphi_v dv)^2.$$

Er ist nur dann gleich dem angegebenen Ausdrucke für ds^2, wenn

$$1 + (1 + u^2)\varphi_u^2 = 1 + \frac{1}{u^2}, \quad \varphi_u\varphi_v = 0, \quad (1 + u^2)\varphi_v^2 = u^2$$

ist. Wegen der zweiten Gleichung müßte φ_u gleich Null sein, was zu Widersprüchen führt. Wenn wir dagegen:

$$\bar{u} = \sqrt{-2-u^2}, \quad \bar{v} = \varphi(u,v)$$

in $d\bar{s}^2$ einsetzen, kommt:

$$d\bar{s}^2 = -\frac{u^2}{2+u^2}du^2 - (1+u^2)(\varphi_u du + \varphi_v dv)^2.$$

Dieser Ausdruck aber deckt sich nur dann mit dem von ds^2, wenn

$$-\frac{u^2}{2+u^2} - (1+u^2)\varphi_u^2 = 1 + \frac{1}{u^2}, \quad \varphi_u \varphi_v = 0, \quad -(1+u^2)\varphi_v^2 = u^2$$

ist, was ebenso zu Widersprüchen führt.

Wir haben also hier den Fall vor uns, daß keine derjenigen Abbildungen der einen Fläche auf die andere, bei denen Punkte mit gleichem Krümmungsmaße einander entsprechen, eine Verbiegung ist.

Will man untersuchen, ob zwei gegebene Flächen aufeinander verbiegbar sind, so hat man zu bedenken, daß man von vornherein nicht weiß, wie die Punkte der beiden Flächen einander bei der noch fraglichen Verbiegbarkeit entsprechen. Aber man weiß von vornherein, daß gewisse besondere Kurven beider Flächen einander bei der Verbiegung entsprechen müssen, nämlich die Minimalkurven. Denn die Verbiegungen gehören zu den konformen Abbildungen, so daß der Satz 43, S. 88, die Behauptung enthält. Man kann die Behauptung auch mittels des Satzes 7 und der Differentialgleichung XI (O) der Minimalkurven als richtig nachweisen. Überdies folgt sie daraus, daß die Verbiegung eine längentreue Abbildung ist und die Minimalkurven die Kurven von der Bogenlänge Null sind.

Wenn also zwei Flächen, von denen man nicht weiß, ob sie aufeinander verbiegbar sind, irgendwie analytisch gegeben sind, wird man gut tun, auf beiden die Minimalkurven als Parameterlinien einzuführen. Auf der einen Fläche seien u und v und auf der anderen $\bar{u}$ und $\bar{v}$ zugehörige Parameter. Nach Satz 14, S. 44, haben dann die Quadrate der Bogenelemente der Flächen die Formen:

$$ds^2 = 2F(u,v)\,du\,dv,$$
$$d\bar{s}^2 = 2\bar{F}(\bar{u},\bar{v})\,d\bar{u}\,d\bar{v}.$$

Die Zurückführung der Bogenelement-Quadrate auf solche Formen erfordert natürlich die Integration der Differentialgleichungen der Minimalkurven.

Wenn sich nun herausstellt, daß F dieselbe Funktion von u und v ist wie $\bar{F}$ von $\bar{u}$ und $\bar{v}$, würde durch $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$ eine solche Abbildung der beiden Flächen aufeinander vermittelt sein, bei der einander entsprechende Bogenelemente dieselbe Länge haben, d. h. dann ist die eine Fläche eine Verbiegung der anderen.

Aber dies ist nicht die einzige Möglichkeit. Man muß sich vielmehr daran erinnern, daß zu bestimmten Scharen von Parameterlinien nach S. 11 nicht auch ganz bestimmte Parameter gehören. Vielmehr wird z. B. auf der ersten Fläche das System der Parameterlinien immer dann noch aus den Minimalkurven bestehen, wenn statt u und v eine Funktion $\bar{u}$ von u allein und eine Funktion $\bar{v}$ von v allein als neue Parameter eingeführt werden.

Wird also etwa:

$$u = A(\bar{u}), \quad v = B(\bar{v})$$

gesetzt, wobei A' und $B' \neq 0$ sind, und werden hierdurch neue Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ eingeführt, so wird:

$$du = A' d\bar{u}, \quad dv = B' d\bar{v},$$

so daß das Quadrat des Bogenelements ds der ersten Fläche statt der Form

$$ds^2 = 2F(u, v)\, du\, dv$$

die Form

$$ds^2 = 2F(A, B)\, A' B'\, d\bar{u}\, d\bar{v} \tag{5}$$

annimmt. Mithin folgt, wenn man noch bedenkt, daß das System der Parameterlinien auch bei Vertauschung von u mit v ungeändert bleibt:

Satz 10: Sind zwei Flächen auf ihre Minimalkurven als Parameterlinien bezogen und sind u, v bez. $\bar{u}, \bar{v}$ zugehörige Parameter der beiden Flächen, wobei die Quadrate ihrer Bogenelemente also die Formen

$$ds^2 = 2F(u, v)\, du\, dv, \quad d\bar{s}^2 = 2\bar{F}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{u}\, d\bar{v}$$

haben, so sind die Flächen dann und nur dann aufeinander verbiegbar, wenn es eine nicht konstante Funktion A von $\bar{u}$ allein und eine nicht konstante Funktion B von $\bar{v}$ allein gibt, für die entweder:

$$F(A, B)\, A'(\bar{u})\, B'(\bar{v}) = \bar{F}(\bar{u}, \bar{v})$$

oder

$$F(B, A)\, A'(\bar{u})\, B'(\bar{v}) = \bar{F}(\bar{u}, \bar{v})$$

für alle Werte von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ ist. Alsdann sind im ersten Falle

$$u = A(\bar{u}), \quad v = B(\bar{v})$$

und im zweiten Falle

$$u = B(\bar{v}), \quad v = A(\bar{u})$$

die Gleichungen der Verbiegung.

2. **Beispiel:** Es liege eine nicht-zylindrische Minimalfläche vor (vgl. Satz 131, S. 314):

$$(6) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\int(1-u^2)\,U\,du + \frac{1}{2}\int(1-v^2)\,V\,dv, \\ y = \frac{i}{2}\int(1+u^2)\,U\,du - \frac{i}{2}\int(1+v^2)\,V\,dv, \\ z = \int u\,U\,du + \int v\,V\,dv, \end{cases}$$

wo U eine Funktion von u allein und V eine Funktion von v allein bedeutet und weder U noch V gleich Null ist. Die Parameterlinien (u) und (v) sind die Minimalkurven, und das Quadrat des Bogenelements ist:

$$ds^2 = (1 + uv)^2\,U\,V\,du\,dv.$$

Soll diese Minimalfläche **auf eine andere nicht-zylindrische Minimalfläche verbiegbar** sein, bei der $\bar{u}$ und $\bar{v}$ statt u und v sowie $\bar{U}(\bar{u})$ und $\bar{V}(\bar{v})$ statt U und V stehen, so müssen u und v nach unserem Satze solche Funktionen $A(\bar{u})$ und $B(\bar{v})$ sein, daß

$$(7) \quad (1 + AB)^2\,U(A)\,V(B)\,A'B' = (1+\bar{u}\bar{v})^2\,\bar{U}(\bar{u})\,\bar{V}(\bar{v})$$

wird, wenn wir vorerst von dem Falle, wo u mit v vertauscht wird, absehen. Wenn wir diese Gleichung logarithmisch nach $\bar{u}$ differenzieren, kommt:

$$\frac{2A'B}{1+AB} + \frac{U'A'}{U} + \frac{A''}{A'} = \frac{2\bar{v}}{1+\bar{u}\bar{v}} + \frac{\bar{U}'}{\bar{U}},$$

woraus zu ersehen ist, daß

$$\frac{A'B}{1+AB} - \frac{\bar{v}}{1+\bar{u}\bar{v}}$$

von $\bar{v}$ frei sein muß. Ebenso muß

$$\frac{AB'}{1+AB} - \frac{\bar{u}}{1+\bar{u}\bar{v}}$$

von $\bar{u}$ frei sein. Wenn wir in dem ersten Ausdrucke statt $\bar{u}$ eine Konstante setzen, was ja auf $B(\bar{v})$ keinen Einfluß hat, sehen wir sofort, daß B linear gebrochen in $\bar{v}$ sein muß. Ebenso muß A linear gebrochen in $\bar{u}$ sein. Setzen wir nun für A und B derartige Funktionen in die beiden Ausdrücke ein und untersuchen wir, ob die Ausdrücke dann wirklich von $\bar{v}$ bzw. $\bar{u}$ frei werden, so finden wir ohne Mühe, daß A und B die Formen haben müssen:

$$A = \frac{a\bar{u}+b}{c\bar{u}+d}, \qquad B = \frac{d\bar{v}-c}{a-b\bar{v}},$$

wo a, b, c, d irgendwelche Konstanten bedeuten. Also müßten

$$(8) \quad u = \frac{a\bar{u}+b}{c\bar{u}+d}, \qquad v = \frac{d\bar{v}-c}{a-b\bar{v}}$$

die Gleichungen der Verbiegung sein. Aber dies läßt sich ganz erheblich vereinfachen. Nach den Formeln (12), S. 315, sind nämlich die Richtungskosinus X, Y, Z der Normale der Fläche (6):

$$(9) \quad X = \frac{u+v}{uv+1}, \qquad Y = -i\frac{u-v}{uv+1}, \qquad Z = \frac{uv-1}{uv+1}.$$

Analog sind

$$(10) \qquad \bar{X} = \frac{\bar{u} + \bar{v}}{\bar{u}\bar{v} + 1}, \qquad \bar{Y} = -i\frac{\bar{u} - \bar{v}}{\bar{u}\bar{v} + 1}, \qquad \bar{Z} = \frac{\bar{u}\bar{v} - 1}{\bar{u}\bar{v} + 1}$$

die der Normale der fraglichen zweiten Minimalfläche. Setzen wir hierin die Werte (8) ein, so finden wir:

$$X = \frac{(a^2 - c^2 - b^2 + d^2)\bar{X} + i(a^2 - c^2 + b^2 - d^2)\bar{Y} + 2(cd - ab)\bar{Z}}{2(ad - bc)},$$

$$Y = \frac{-i(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)\bar{X} + (a^2 + c^2 + b^2 + d^2)\bar{Y} + 2i(cd + ab)\bar{Z}}{2(ad - bc)},$$

$$Z = \frac{2(bd - ac)\bar{X} - 2i(bd + ac)\bar{Y} + 2(ad + bc)\bar{Z}}{2(ad - bc)},$$

so daß sich X, Y, Z linear und homogen durch $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ ausdrücken. Die rechts auftretenden neun Koeffizienten von $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ erfüllen die Bedingungen I (C) oder I (D) und I (F) für die Kosinus der Winkel, die drei zueinander senkrechte und wie die Koordinatenachsen orientierte Richtungen mit den Koordinatenachsen bilden. Hieraus folgt: Wir können die fragliche zweite Minimalfläche, starr gedacht, mittels einer Bewegung in eine solche Lage überführen, daß geradezu $X = \bar{X}$, $Y = \bar{Y}$, $Z = \bar{Z}$ wird, d. h. daß entsprechende Punkte beider Flächen parallele und gleichsinnig orientierte Normalen haben.

Man hätte dies voraussehen können: Wenn wir nämlich die gegebene Minimalfläche sphärisch abbilden, ist die Abbildung nach Satz 125, S. 308, konform. Nach der Definition des Krümmungsmaßes K, siehe Satz 100, S. 265, wird jedes unendlich kleine Flächenstück der Minimalfläche in einem solchen Maßstabe ähnlich abgebildet, daß der Inhalt der Bildfläche zum Inhalt der Originalfläche im Verhältnisse von K zu Eins steht. Ist nun die Minimalfläche auf eine andere Minimalfläche verbiegbar, so hat diese zweite Fläche an der entsprechenden Stelle nach Satz 8 dasselbe Krümmungsmaß K. Zwei einander entsprechende Flächenelemente beider Flächen werden daher bei der sphärischen Abbildung im selben Maßstabe ähnlich vergrößert. Da nun die Verbiegung eine im Unendlichkleinen kongruente Abbildung ist, haben also zwei einander entsprechende (kongruente) unendlich kleine Stücke beider Flächen auch kongruente sphärische Bilder. Hieraus kann man dann schließen, daß auch zwei bei der Verbiegung miteinander zur Deckung zu bringende endliche Stücke beider Minimalflächen kongruente sphärische Bilder haben. Aber zwei kongruente Figuren auf der Bildkugel lassen sich durch Drehen der einen auf der Kugel miteinander zur Deckung bringen. Oder auch: Man kann die zweite, starr gedachte, Fläche in eine solche Lage bringen, daß ihr sphärisches Bild geradezu mit dem der ersten Fläche übereinstimmt.

Wir können nun annehmen, daß $X = \bar{X}$, $Y = \bar{Y}$, $Z = \bar{Z}$ ist, d. h. daß nach (9) und (10) einfach:

$$u = \bar{u}, \qquad v = \bar{v}$$

ist. Jetzt lautet die Bedingung (7) so:

$$U(\bar{u})\,V(\bar{v}) = \bar{U}(\bar{u})\,\bar{V}(\bar{v}).$$

Sie wird in allgemeinster Weise durch die Annahme:

$$\bar U(\bar u) = c\,U(\bar u), \qquad \bar V(\bar v) = \frac{1}{c}\,V(\bar v)$$

befriedigt, wobei c eine willkürliche von Null verschiedene Konstante bedeutet.

Vertauschen wir u mit v, so ergibt sich:

$$u = \bar v, \quad v = \bar u$$

und

$$\bar U(\bar u) = c\,V(\bar u), \qquad \bar V(\bar v) = \frac{1}{c}\,U(\bar v).$$

In diesem Falle ist nach (9) und (10) zwar $X = \bar X$ und $Z = \bar Z$, aber $Y = -\bar Y$, d. h. alsdann liegen die sphärischen Bilder entsprechender Punkte beider Flächen symmetrisch zur xz-Ebene. In diesem Fall sind die sphärischen Bilder nicht kongruent, sondern symmetrisch. Über diese Möglichkeit sind wir oben bei der geometrischen Erläuterung absichtlich stillschweigend hinweggegangen, obgleich auch sie geometrisch behandelt werden kann. Wir haben gefunden:

Satz 11: Sind zwei nicht-zylindrische Minimalflächen auf einander verbiegbar, so kann man sie immer in eine solche gegenseitige Lage bringen, daß die sphärischen Bilder entsprechender Stellen beider Flächen zusammenfallen oder symmetrisch auf beiden Seiten einer Ebene durch die Kugelmitte liegen. Sind

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\,U(u)\,du + \frac{1}{2}\int (1 - v^2)\,V(v)\,dv,\\
y &= \frac{i}{2}\int (1 + u^2)\,U(u)\,du - \frac{i}{2}\int (1 + v^2)\,V(v)\,dv,\\
z &= \int u\,U(u)\,du + \int v\,U(v)\,dv
\end{aligned}$$

die Gleichungen der einen Fläche, so erhält man dadurch, daß man U und V durch

$$c\,U(u) \quad \text{und} \quad \frac{1}{c}\,V(v)$$

oder durch

$$c\,V(u) \quad \text{und} \quad \frac{1}{c}\,U(v)$$

ersetzt, alle Flächen der einen oder anderen Art. Dabei ist c eine willkürliche von Null verschiedene Konstante. Entsprechende Punkte beider Flächen haben parallele Normalen.

Der zweite Fall kann durch folgende Überlegung aus dem ersten abgeleitet werden: Wenn zwei Flächen aufeinander verbiegbar sind, gilt dies auch, sobald man die eine Fläche durch ihr Spiegelbild ersetzt, indem man sie z. B. an einer Koordinatenebene spiegelt, sobald man also eine der drei rechtwinkligen Koordinaten mit -1 multipliziert. Denn dabei bleiben die Fundamentalgrößen erster Ordnung ungeändert, nach XI (A). Aber dabei ändern zwei der drei Richtungskosinus der Normale ihr Vorzeichen, nach XI (F). Wenn wir nun auf der Fläche überall den Sinn der Parameterlinien der einen Schar mit dem entgegengesetzten vertauschen, wodurch die Fläche selbst keine

Änderung erfährt, gehen alle drei Richtungskosinus in die entgegengesetzten über, nach S. 32. Also wird jetzt schließlich gerade ein Richtungskosinus mit dem entgegengesetzten Zeichen wie zuerst behaftet sein, und dieser Fall lag oben vor, wo wir $X = \bar{X}$, $Z = \bar{Z}$, $Y = -\bar{Y}$ fanden. Die Flächen der zweiten Art gehen daher aus denen der ersten Art durch Spiegelung an einer Ebene hervor.

Soll die erste Minimalfläche des Satzes 11 reell sein, so müssen u und v nach Satz 133, S. 319, konjugiert komplexe Veränderliche und U und V konjugiert komplexe Funktionen sein. Soll auch die Fläche, bei der U und V durch

$$cU \quad \text{und} \quad \frac{1}{c}V$$

ersetzt werden, reell sein, so müssen also c und $1:c$ konjugiert komplexe Konstanten sein, d. h. der absolute Betrag von c muß gleich Eins sein. Daher ist:

$$c = e^{i\alpha},$$

wo α eine beliebige reelle Konstante bedeutet. Daher haben wir den

Satz 12:[1] Liegt eine nicht-ebene reelle Minimalfläche

$$x = \frac{1}{2}\int(1-u^2)\,U\,du + \frac{1}{2}\int(1-v^2)\,V\,dv,$$
$$y = \frac{i}{2}\int(1+u^2)\,U\,du - \frac{i}{2}\int(1+v^2)\,V\,dv,$$
$$z = \int u\,U\,du + \int v\,V\,dv$$

vor, sind also u und v konjugiert komplexe Veränderliche sowie U und V konjugiert komplexe Funktionen von u bzw. v allein, so ergeben sich alle auf diese Fläche verbiegbaren reellen Minimalflächen, wenn man unter α eine beliebige reelle Konstante versteht und U und V durch

$$e^{i\alpha}U \quad \text{und} \quad e^{-i\alpha}V$$

ersetzt. Die entstehenden Flächen dürfen aber noch außerdem an einer Ebene gespiegelt werden. Ohne Spiegelung erhält man insbesondere alle diejenigen auf die ursprüngliche Fläche verbiegbaren reellen Minimalflächen, deren sphärisches Bild mit dem der gegebenen Fläche kongruent ist.

Dies sphärische Bild ist eigentlich nicht nur mit dem der gegebenen Fläche kongruent, sondern fällt sogar völlig mit ihm zusammen. Aber man kann die gefundenen Flächen in andere Lagen bringen, und dann herrscht doch nur noch Kongruenz bei der sphärischen Abbildung.

Wir wollen aber die Flächen in denjenigen Lagen betrachten, die sich beim Einsetzen von $e^{i\alpha}U$ und $e^{-i\alpha}V$ statt U und V in die Gleichungen der

[1] Peterson hatte in seinem Buche „Über Kurven und Flächen“, 1. (einzige) Lieferung, Moskau und Leipzig 1868, erkannt, daß sich beim Ersetzen von U durch $e^{i\alpha}U$ auf die Urfläche verbiegbare Minimalflächen ergeben, aber der Beweis, daß so alle hervorgehen, findet sich erst bei Schwarz 1874, vgl. die 2. Anm. zu S. 317.

Urfläche ergeben, und überdies von den durch eine nachträgliche Spiegelung erhaltenen Flächen absehen. Es liegt dann eine Schar von einfach unendlich vielen Minimalflächen vor, da α beliebig ist; in entsprechenden Punkten haben sie parallele und gleichsinnig orientierte Normalen, und alle diese Flächen sind nun aufeinander so verbiegbar, daß einander entsprechende Punkte zur Deckung kommen. Diese Schar von einfach unendlich vielen Flächen heißt die Schar der zur ursprünglichen Minimalfläche assoziierten Minimalflächen. Hier liegt einmal der Fall vor, wo der Übergang von der Urfläche zu irgend einer Fläche der Schar als eine stetige Verbiegung bezeichnet werden darf (vgl. S. 352).

Die rechtwinkligen Koordinaten der Urfläche wollen wir jetzt mit x_0, y_0, z_0 statt mit x, y, z bezeichnen, also setzen:

$$(11)\quad \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2}\int(1-u^2)\,U\,du + \frac{1}{2}\int(1-v^2)\,V\,dv, \\ y_0 = \frac{i}{2}\int(1+u^2)\,U\,du - \frac{i}{2}\int(1+v^2)\,V\,dv, \\ z_0 = \int u\,U\,du + \int v\,V\,dv; \end{cases}$$

dagegen seien x_α, y_α, z_α die rechtwinkligen Koordinaten der zu einem gewissen Werte von α gehörigen assoziierten Fläche. Wegen

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

treten bei ihr an die Stelle von U und V in (11) die Funktionen

$$U\cos\alpha + i\,U\sin\alpha \qquad \text{und} \qquad V\cos\alpha - i\,V\sin\alpha\,.$$

Insbesondere ergibt sich für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ die Fläche[1]

$$(12)\quad \begin{cases} x_{\frac{1}{2}\pi} = \frac{i}{2}\int(1-u^2)\,U\,du - \frac{i}{2}\int(1-v^2)\,V\,dv, \\ y_{\frac{1}{2}\pi} = -\frac{1}{2}\int(1+u^2)\,U\,du - \frac{1}{2}\int(1+v^2)\,V\,dv, \\ z_{\frac{1}{2}\pi} = i\int u\,U\,du - i\int v\,V\,dv, \end{cases}$$

und man übersieht, daß bei passender Wahl der Integrationskonstanten

$$(13)\quad \begin{cases} x_\alpha = x_0\cos\alpha + x_{\frac{1}{2}\pi}\sin\alpha\,, \\ y_\alpha = y_0\cos\alpha + y_{\frac{1}{2}\pi}\sin\alpha\,, \\ z_\alpha = z_0\cos\alpha + z_{\frac{1}{2}\pi}\sin\alpha \end{cases}$$

wird. Bedeuten nun P_0, $P_{\frac{1}{2}\pi}$ und P_α drei Punkte mit den Koordinaten (11), (12), (13), die einander entsprechen, d. h. zu demselben Wertepaare der Parameter u, v gehören, so erkennt man aus (13), daß sich der Radiusvektor OP aus den Radienvektoren OP_0 und $OP_{\frac{1}{2}\pi}$ so ergibt: Man multipliziert OP_0

[1] Diese auf die Urfläche verbiegbare Minimalfläche hatte schon Bonnet 1853 gefunden, siehe die 1. Anm. zu S. 317.

mit $\cos\alpha$ und $OP_{\frac{1}{2}\pi}$ mit $\sin\alpha$ und bildet aus den beiden hervorgehenden Radienvektoren die Resultierende OP_α wie im Kräfteparallelogramm. So kann man Punkt für Punkt zu einander entsprechenden Stellen der Flächen (11) und (12) die zugehörige Stelle der zu irgend einem Werte von α gehörigen Fläche konstruieren. Geht α stetig von Null aus zu beliebigen Werten über, so beschreibt jeder Punkt $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ oder P_α eine Ellipse mit dem Mittelpunkte O und den konjugierten Halbmessern OP_0 und $OP_{\frac{1}{2}\pi}$. Die Veränderung des Radiusvektors OP_α ist dabei so, wie sie aus der Drehung eines Kreisradius um den Winkel α hervorgeht, wenn man den Kreis durch parallele Strahlen in jene Ellipse projiziert.[1] Eine einzelne, zu einem bestimmten Werte von α gehörige assoziierte Fläche kann man hiernach auch so finden: Vom Anfangspunkte O aus vergrößert man die zu $\alpha = 0$ gehörige Fläche (11) im Maßstabe $2\cos\alpha : 1$ und die zu $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ gehörige Fläche (12) im Maßstabe $2\sin\alpha : 1$. Alsdann ist die gesuchte Fläche der Ort der Mitten der Verbindenden entsprechender Punkte der beiden konstruierten Flächen.

Insbesondere sei die Urfläche (11) die gemeine Schraubenfläche mit der Schraubenhöhe $2\pi q$:

$$x_0 = u\cos v, \qquad y_0 = u\sin v, \qquad z_0 = qv,$$

indem also

$$U = -\frac{iq}{2u^2}, \qquad V = \frac{iq}{2v^2}$$

gewählt worden sei, vgl. das 4. Beispiel, S. 320. An die Stelle von U und V treten bei der zu $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ gehörigen Fläche die Funktionen

$$U = \frac{q}{2u^2}, \qquad V = \frac{q}{2v^2},$$

d. h. diese Fläche ist das Katenoid, das durch Drehung der in der xz-Ebene gelegenen Kettenlinie

$$x = \frac{q}{2}\left(e^{\frac{z}{q}} + e^{-\frac{z}{q}}\right)$$

um die z-Achse entsteht, nach dem 5. Beispiele, S. 321. Die gemeine Schraubenfläche läßt sich also stetig so verbiegen, daß die Fläche beständig eine Minimalfläche bleibt und schließlich in ein Katenoid übergeht.[2] In Fig. 93 haben wir die gemeine Schraubenfläche und das Katenoid sowie die zu

$$\alpha = \frac{1}{18}\pi, \quad \frac{1}{9}\pi, \quad \frac{1}{6}\pi, \quad \frac{2}{9}\pi, \quad \frac{5}{18}\pi, \quad \frac{1}{3}\pi, \quad \frac{7}{18}\pi, \quad \frac{4}{9}\pi$$

oder in Gradmaß zu

$$10^\circ, \quad 20^\circ, \quad 30^\circ, \quad 40^\circ, \quad 50^\circ, \quad 60^\circ, \quad 70^\circ, \quad 80^\circ$$

[1] Weitere Eigenschaften der Scharen von assoziierten Minimalflächen, auf die wir hier nicht eingehen wollen, findet man bei Schwarz, siehe die 2. Anm. zu S. 317.

[2] Im Modellverlag von Schilling, Leipzig, gibt es biegsame Messingbleche in der Form eines Stückes eines Katenoids, die sich bei vorsichtiger Behandlung in Teile einer gemeinen Schraubenfläche verbiegen lassen.

gehörigen Zwischenflächen dargestellt. Da sich das Krümmungsmaß der Flächen bei der Verbiegung nach Satz 9 nicht ändert, bleiben die Kurven, längs deren das Krümmungsmaß konstant ist, immer ebensolche Kurven. Auf der gemeinen Schraubenfläche sind diese Kurven die gemeinen Schraubenlinien (u), auf dem Katenoid die Breitenkreise. Deshalb gehen jene Schraubenlinien bei der

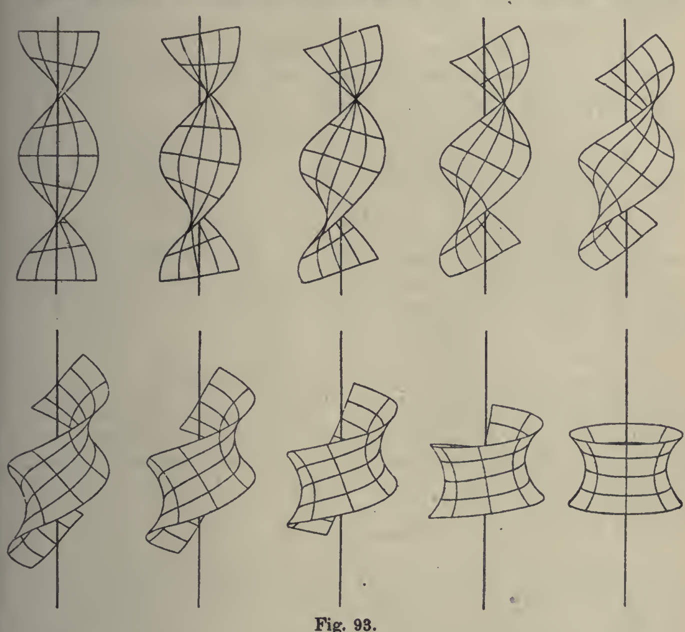


Fig. 93.

Verbiegung schließlich in die Breitenkreise des Katenoids über. Die Achse der Schraubenfläche, die ja der Fläche angehört und der Ort der Punkte kleinster Flächenkrümmung ist, verwandelt sich in den kleinsten Breitenkreis des Katenoids. Wegen der Winkeltreue der Verbiegung gehen die geradlinigen Erzeugenden (v) der Schraubenfläche als orthogonale Trajektorien der Schraubenlinien (u) in die Meridiane des Katenoids über. Man erkennt, daß von der gemeinen Schraubenfläche nur eine einzige Periode nötig ist, um aus ihr das ganze Katenoid durch Verbiegung zu erhalten. Deshalb ist in der Figur nur eine Periode benutzt worden.

Die Verbiegung einer Fläche auf eine andere ist, wie wir hervorgehoben, eine besondere Art der A b b i l d u n g der einen Fläche auf die andere. Nun sprachen wir in § 12 des ersten Abschnittes von beliebigen punktweisen Abbildungen von Flächen. Doch waren

jene Betrachtungen insofern unvollständig, als wir damals noch nicht von konjugierten Richtungen sprechen und einen Satz darüber erwähnen konnten, der für beliebige Abbildungen gilt und hier nachgetragen werden soll, da wir ihn nachher auf den Fall der Verbiegung anwenden wollen.

Wir bilden wie damals zwei Flächen Punkt für Punkt aufeinander ab, indem wir einander entsprechenden Punkten dieselben Parameterwerte u, v beilegen, sodaß

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v) \tag{14}$$

die Gleichungen der einen Fläche und

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(u, v), \quad \bar{y} = \bar{\chi}(u, v), \quad \bar{z} = \bar{\psi}(u, v) \tag{15}$$

die der anderen Fläche sind. Zwei von einem Punkte (u, v) der ersten Fläche ausgehende Fortschreitungsrichtungen (k) und $(\varkappa)$ sind nach (3), S. 191, zu einander konjugiert, wenn

$$L + M(k + \varkappa) + Nk\varkappa = 0 \tag{16}$$

ist, vorausgesetzt, daß L, M, N die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der Fläche (14) bedeuten. Die ihnen bei der Abbildung entsprechenden Fortschreitungsrichtungen (k) und $(\varkappa)$ auf der zweiten Fläche sind alsdann im allgemeinen nicht zu einander konjugiert, vielmehr nur dann, wenn auch

$$\bar{L} + \bar{M}(k + \varkappa) + \bar{N}k\varkappa = 0 \tag{17}$$

ist, vorausgesetzt, daß $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$ die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der Fläche (15) bedeuten. Sollen also zu k und $\varkappa$ auf beiden Flächen zu einander konjugierte Richtungen gehören, so müssen beide Bedingungen (16) und (17) erfüllt sein.

In § 12 des ersten Abschnittes dagegen untersuchten wir, wann zu k und $\varkappa$ auf beiden Flächen zu einander senkrechte Richtungen gehören, und kamen damals zu den beiden Bedingungen (9), S. 107, die sich von (16) und (17) nur dadurch unterscheiden, daß damals an der Stelle der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L, M, N und $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$ die Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G und $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ standen. Wir können deshalb hier ähnlich wie damals vorgehen. Dabei sind jedoch zwei Unterschiede zu beachten: Die Fundamentalgrößen erster Ordnung können nach S. 15 nicht sämtlich identisch verschwinden, wohl aber die zweiter Ordnung, nämlich nach Satz 6, S. 123, bei Ebenen. Wir schließen deshalb die Ebenen aus. Im reellen Falle sind ferner E, G und ebenso $\bar{E}, \bar{G}$ positiv (nach

S. 17), während L, M und $\bar{L}, \bar{M}$ dann auch sehr wohl negativ sein können. Deshalb müssen wir hier auf Betrachtungen im reellen Falle, wie sie auf S. 108, 109 angestellt wurden, Verzicht leisten.

Aber noch ein Unterschied ist zu beachten: In dem Satze 55, S. 110 u. f., spielten die Minimalkurven eine Rolle. Nun treten hier an ihre Stelle die Haupttangentenkurven, denn die Differentialgleichung XI (O) der Minimalkurven einer Fläche geht in die Differentialgleichung XII (X) ihrer Haupttangentenkurven über, wenn die Fundamentalgrößen erster Ordnung durch die der zweiten Ordnung ersetzt werden. Während jede Fläche zwei Scharen von Minimalkurven hat, kommt einer abwickelbaren Fläche nach S. 233 nur eine Schar von Haupttangentenkurven zu. Deshalb schließen wir jetzt nicht nur die Ebenen, sondern überhaupt die abwickelbaren Flächen aus.

Nach allem diesen liefert eine Überlegung, die der auf S. 107 bis 109 entspricht, den folgenden

Satz 13: Bildet man eine nicht-abwickelbare Fläche Punkt für Punkt auf eine andere nicht-abwickelbare Fläche ab, so sind drei Fälle möglich:

Erstens: Die beiden Scharen von Haupttangentenkurven der einen Fläche bilden sich als die beiden Scharen von Haupttangentenkurven der anderen Fläche ab. Jedem Netze von konjugierten Kurven auf der einen Fläche entspricht dann ein ebensolches Netz auf der anderen Fläche.

Zweitens: Nur eine Schar von Haupttangentenkurven der einen Fläche bildet sich als Schar von Haupttangentenkurven der anderen Fläche ab. Außer dieser als Ausartung eines Netzes von konjugierten Kurven aufzufassenden Schar gibt es alsdann kein Netz von konjugierten Kurven auf der einen Fläche, dem auf der anderen Fläche ein ebensolches Netz entspräche.

Drittens: Keine der beiden Scharen von Haupttangentenkurven der einen Fläche bildet sich als eine Schar von Haupttangentenkurven der anderen Fläche ab. Alsdann gibt es ein und nur ein Netz von konjugierten Kurven auf der einen Fläche, dem auf der anderen Fläche ein ebensolches Netz entspricht.

Der letzte Fall ist der allgemeinste[1]. In ihm wird entsprechend der Gleichung (16) auf S. 109 durch

[1] Zuerst von PETERSON als Theorem 1868 ausgesprochen und bewiesen, vgl. die Anm. zu S. 360.

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} dv^2 & L & \bar{L} \\ -du\,dv & M & \bar{M} \\ du^2 & N & \bar{N} \end{vmatrix} = 0$$

die Differentialgleichung der einander entsprechenden Netze von konjugierten Kurven auf beiden Flächen dargestellt.

Ist nun die Abbildung der Fläche (14) auf die Fläche (15) insbesondere eine Verbiegung, und geht keine Schar von Haupttangentenkurven der einen Fläche dabei in eine Schar von Haupttangentenkurven der anderen Fläche über,[1] so gibt es nach unserem Satze ein und nur ein Netz von konjugierten Kurven auf der einen Fläche, das auch nach der Verbiegung ein solches Netz bleibt. Da die Verbiegung ferner winkeltreu ist, ändern sich die Winkel nicht, unter denen die Kurven des Netzes einander schneiden. Auch die Bogenlängen der Kurven bleiben unverändert. Nach S. 252 sind die unendlich kleinen Netzmaschen als eben aufzufassen. Da nun ihre Winkel und Seitenlängen bei der Verbiegung ungeändert bleiben, bleibt überhaupt jede unendlich kleine Masche bei der Verbiegung unveränderlich.

Wenn man also eine nicht abwickelbare Fläche unendlich wenig und zwar so verbiegt, daß keine der beiden Scharen von Haupttangentenkurven eine derartige Schar bleibt, kann man die Fläche durch dasjenige Netz von konjugierten Kurven, daß dabei konjugiert bleibt, in lauter unendlich kleine einzelne starre ebene Vierecke zerteilen, die bei der Verbiegung gegeneinander um ihre Kanten gedreht werden.

Hiernach leuchtet ein, wie ein Flächenmodell von der auf S. 252 u. f. angegebenen Art geeignet sein kann, einen anschaulichen Begriff von der stetigen Verbiegung zu geben. Man hat es dabei so einzurichten, daß die in endlichen Größen dargestellten ebenen Vierecke gegeneinander beweglich bleiben.[2] Allerdings darf nicht

[1] Da wir den Fall, daß die Haupttangentenkurven einer Schar solche bei der Verbiegung bleiben, hier ausschließen, sei nebenbei bemerkt, daß Bonnet gezeigt hat, daß in diesem Falle die beiden Flächen kongruent oder symmetrisch sind, es sei denn, daß sie geradlinig und die einander entsprechenden Haupttangentenkurven die Geraden der Flächen sind.

[2] Dies Flächenmodell hat Peterson 1868 angegeben, vgl. die Anm. zu S. 360. Er nannte die Kurven des Netzes, das konjugiert bleibt, die Biegungslinien. Ohne Kenntnis der Entwicklungen Petersons hat Ribaucour im 113. Bd. des Comptes Rendus (1891) in der Note „Sur les systèmes cycliques" von neuem dies Netz betrachtet. Stäckel hat in den beiden Abhandlungen: „Über Abbildungen", Math. Ann. 44. Bd. (1894), und „Bie-

außer acht gelassen werden, daß dasjenige Netz von konjugierten Kurven, das bei der Verbiegung seine Eigentümlichkeit bewahrt, imaginär sein kann, z. B. bei der Verbiegung einer Minimalfläche in die assoziierten Minimalflächen, siehe Satz 12, wo das Netz nach Satz 128, S. 311, von Minimalkurven gebildet wird.[1]

§ 5. Verbiegung von Flächen auf Rotationsflächen.

Es kann vorkommen, daß eine Fläche auf sich selbst stetig verbiegbar ist. Man denke sich nämlich die Fläche zweimal hergestellt, etwa einmal starr, das andere Mal aus einer zwar durchaus biegsamen, aber unausdehnbaren dünnen Haut. Alsdann wird diese Haut natürlich so auf die erste Fläche ausgebreitet werden können, daß entsprechende Punkte zur Deckung kommen. Aber es ist auch denkbar, daß die Haut noch auf der starren Fläche beweglich bleibt. Ein fast zu einfaches Beispiel hierzu liefert jede Rotationsfläche, bei der sogar auch das zweite Modell starr sein darf. Denn es kann in unendlich vielen Lagen mit dem ersten Modell zur Deckung gebracht werden, da die Rotationsfläche durch Drehung um ihre Achse in sich übergeht. Wir wollen nun allgemein fragen, welche Flächen stetig in sich selbst verbogen werden können. Zunächst ist die Frage aufzuwerfen, welche Flächen unendlich wenig in sich selbst verbiegbar sind. Hat man die Kennzeichen hierfür gefunden, so muß man alsdann untersuchen, ob sich durch fortgesetzte Anwendung dieser unendlich kleinen Verbiegung der Fläche in sich selbst endliche Verbiegungen der Fläche in sich ergehen.

Es seien wieder wie auf S. 355 die Parameterlinien (u) und (v) die Minimalkurven der Fläche. Da sie zwei verschiedene Scharen bilden, und jede Minimalkurve wie gesagt bei Verbiegung wieder

---

gungen und konjugierte Systeme", ebenda 49. Bd. (1897), auf die vergessenen Ergebnisse Petersons hingewiesen. — H. Wiener hat in Teubners Verlag in Leipzig bewegliche Vielflache von starren Vierecken erscheinen lassen.

[1] Da der hiermit beendete Paragraph in Satz 13 eine Ergänzung der Betrachtungen des § 12 des 1. Abschnittes über allgemeine punktweise Abbildungen von Flächen aufeinander bringt, dürfte hier der Platz sein, zu bemerken, daß es außer den flächentreuen und konformen Abbildungen und den Verbiegungen noch mancherlei bemerkenswerte Arten der Abbildung gibt. Namentlich sind hierfür die Untersuchungen von Voss zu nennen. Allgemein können wir auf die zusammenfassenden Artikel von Voss: „Abbildung und Abwickelung zweier Flächen aufeinander" in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (III D 6a), Leipzig 1903, verweisen.

in eine Minimalkurve übergeht, kann eine Kurve (u) bei unendlich kleiner Verbiegung nur in eine unendlich benachbarte Kurve derselben Schar übergehen. Dasselbe gilt von jeder Kurve (v). Es möge daher jede Kurve (u) in eine benachbarte Kurve mit dem Parameterwerte

$$u + \varphi(u)\varepsilon$$

und jede Kurve (v) in eine benachbarte Kurve mit dem Parameterwerte

$$v + \psi(v)\varepsilon$$

übergehen, wobei ε überall auf der Fläche eine und dieselbe Größe bedeute, die nach Null streben soll. Wenigstens eine der beiden Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ muß von Null verschieden sein, da sonst jeder Punkt (u, v) in Ruhe bliebe.

Nach S. 11 können wir nun eine Funktion von u allein als neuen Parameter u und eine Funktion von v allein als neuen Parameter v einführen, ohne dadurch die Scharen der Parameterlinien zu ändern. Ist $\varphi(u) \neq 0$, so wird die Funktion U von u, die durch ein von einer geeigneten konstanten unteren Grenze a an genommenes Integral

$$U = \int_a^u \frac{du}{\varphi(u)}$$

definiert wird, wegen $\lim \varepsilon = 0$ gerade um ε wachsen, falls u um $\varphi(u)\varepsilon$ zunimmt. Deshalb dürfen wir, falls $\varphi(u) \neq 0$ ist, annehmen, daß von vornherein der Parameter u der Minimalkurven (u) so gewählt sei, daß u bei der gesuchten unendlich kleinen Verbiegung gerade um ε wächst. Dasselbe gilt vom Parameter v, falls $\psi(v) \neq 0$ ist.

Wir nehmen also an, daß entweder sowohl u als auch v bei der unendlich kleinen Verbiegung um ε wachse oder wenigstens einer der beiden Parameter. Immer soll dabei $\lim \varepsilon = 0$ sein.

Das Quadrat des Bogenelements der Fläche hat nach Satz 14, S. 44, die Form

$$ds^2 = 2F(u, v)\,du\,dv.$$

Die betrachtete Änderung aller Punkte (u, v) der Fläche in unendlich benachbarte Punkte derselben Fläche ist somit eine Verbiegung, wenn $F(u, v)$ unverändert bleibt. Falls aber u und v um die unendlich kleine Größe ε wachsen, nimmt F um $(F_u + F_v)\varepsilon$ zu, oder, falls nur u um ε wächst und v unverändert bleibt, um $F_u\,\varepsilon$. Also ist zu fordern, daß entweder

(1) $$F_u + F_v = 0 \quad \text{oder} \quad F_u = 0$$

sei. Nun ist das Krümmungsmaß K nach der Fundamentalgleichung (10), S. 338, deren linke Seite ja den Wert K hat, wegen $E = G = 0$ dieses:

$$K = \frac{F_u F_v - F F_{uv}}{F^3}, \tag{2}$$

wofür man übrigens auch schreiben kann, wie hier nebenbei angemerkt sei:

$$K = -\frac{1}{F}\frac{\partial^2 \log F}{\partial u\,\partial v}. \tag{3}$$

Gilt die zweite Formel (1), so lehrt (2), daß $K = 0$, die Fläche daher nach Satz 101, S. 266, abwickelbar ist. Sehen wir von den abwickelbaren Flächen überhaupt ab, so bleibt demnach nur der erste Fall übrig, wo sowohl u als auch v bei der gesuchten unendlich kleinen Verbiegung um ε zunimmt, und nach (1) muß alsdann

$$F_u + F_v = 0$$

sein. Diese Bedingung ist auch hinreichend für das Vorhandensein der unendlich kleinen Verbiegung der Fläche in sich.

Sie läßt sich leicht anders aussprechen. Wenn man nämlich für den Augenblick

$$\mathfrak{x} = u - v, \quad \mathfrak{y} = u$$

als Veränderliche in die Bedingung einführt, also $u = \mathfrak{y}$, $v = \mathfrak{y} - \mathfrak{x}$ setzt, geht sie über in

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{y}}\right) - \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{x}} = 0$$

und gibt daher

$$\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{y}} = 0.$$

Mithin darf F nur von $\mathfrak{x}$ oder also nur von $u - v$ abhängen.

Wir haben daher den

Satz 14: Eine nicht-abwickelbare Fläche läßt sich dann und nur dann unendlich wenig in sich selbst verbiegen, wenn es solche Parameter u und v auf der Fläche gibt, mittels deren sich das Quadrat des Bogenelements in der Form

$$ds^2 = 2\,F(u - v)\,du\,dv$$

darstellt, wo F eine Funktion von $u - v$ allein bedeutet. Die Verbiegung findet dann so statt, das jede Minimalkurve (u) und ebenso jede Minimalkurve (v) der Fläche in eine Minimalkurve $(u + \varepsilon)$ bzw. $(v + \varepsilon)$ übergeht, wo ε eine auf der ganzen Fläche gleiche unendlich kleine Größe bedeutet.

Wenn man jetzt jedem Punkte (u, v) der Fläche denjenigen Punkt zuordnet, dessen Parameterwerte $u + a$ und $v + a$ sind, wo a irgend eine Konstante bedeutet, hat das Quadrat des Bogenelements

$$ds^2 = 2F(u - v)\,du\,dv$$

an beiden Stellen denselben Wert, weil

$$(u + a) - (v + a) = u - v$$

ist. Mithin stellt diese Zuordnung eine endliche Verbiegung der Fläche in sich dar, und da die Konstante a beliebig gewählt werden kann, liegt eine stetige Verbiegung vor. Also haben wir den

Satz 15: Eine nicht-abwickelbare Fläche gestattet dann und nur dann eine stetige Verbiegung in sich, wenn es solche Parameter u und v auf der Fläche gibt, mittels deren sich das Quadrat des Bogenelements in der Form

$$ds^2 = 2F(u - v)\,du\,dv$$

darstellt, wo F eine Funktion von $u - v$ allein bedeutet.

Wie gesagt, ist insbesondere jede Rotationsfläche (S. 48)

$$x = p(u)\cos v, \quad y = p(u)\sin v, \quad z = q(u) \tag{4}$$

stetig in sich verbiegbar, nämlich drehbar um die Achse. Deshalb muß es hier möglich sein, neue Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ derart einzuführen, daß das Quadrat des Bogenelements der Fläche (4) die nach Satz 15 charakteristische Form

$$ds^2 = 2F(\bar{u} - \bar{v})\,d\bar{u}\,d\bar{v}$$

annimmt. Dies läßt sich leicht bestätigen. Bedeutet nämlich u in (4) die Bogenlänge der Meridiane der Rotationsfläche, so ist das Quadrat ihres Bogenelements (vgl. S. 48 u f.):

$$ds^2 = du^2 + p^2 dv^2 = p^2\left(\frac{du}{p} + i\,dv\right)\left(\frac{du}{p} - i\,dv\right). \tag{5}$$

Setzt man nun

$$\bar{u} = v + i\int\frac{du}{p(u)}, \quad \bar{v} = v - i\int\frac{du}{p(u)},$$

so wird

$$\bar{u} - \bar{v} = 2i\int\frac{du}{p(u)} \tag{6}$$

und

$$ds^2 = p^2(u)\,d\bar{u}\,d\bar{v}. \tag{7}$$

Da nun $\bar{u} - \bar{v}$ nach (6) von u allein abhängt, also umgekehrt u eine Funktion von $\bar{u} - \bar{v}$ allein ist, wird auch $p^2(u)$ eine Funktion von $\bar{u} - \bar{v}$ allein, womit die Bestätigung erreicht ist.

Hieraus ziehen wir einen wichtigen Schluß: Es liege irgend eine nicht-abwickelbare Fläche vor, die sich stetig in sich selbst verbiegen läßt. Nach Satz 15 gibt es dann Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$, in denen das Quadrat des Bogenelements die Form

(8) $$ds^2 = 2F(\bar{u} - \bar{v})\, d\bar{u}\, d\bar{v}$$

bekommt. Man kann nun die Frage aufwerfen, ob es eine Rotationsfläche (4) gibt, bei der ds^2 eben diese Form bekommt. Ist sie zu bejahen, so ist die vorgelegte Fläche auf die Rotationsfläche abwickelbar.

Die Beantwortung der Frage ist leicht: Es kommt darauf an, bei gegebener Funktion F von $\bar{u} - \bar{v}$ allein zu untersuchen, ob es erstens eine Funktion u von $\bar{u} - \bar{v}$ allein und zweitens eine Funktion p von u allein derart gibt, daß nicht nur wie in (6)

$$\bar{u} - \bar{v} = 2i\int \frac{du}{p(u)}$$

sondern auch, wie die Vergleichung von (7) und (8) lehrt,

$$p^2(u) = 2F(\bar{u} - \bar{v})$$

wird. Bezeichnen wir $\bar{u} - \bar{v}$ mit w, so fragen wir also bei gegebener Funktion F von w allein nach einer Funktion u von w und einer Funktion p von u, für die

$$\frac{du}{dw} = -\frac{i}{2}p(u), \quad p^2(u) = 2F(w)$$

ist. Quadrieren der ersten Forderung gibt mit Rücksicht auf die zweite

$$\left(\frac{du}{dw}\right)^2 = -\frac{1}{2}F(w).$$

Demnach ist

(9) $$u = \int \sqrt{-\frac{1}{2}F(w)}\, dw$$

zu wählen. Alsdann gibt die zweite Forderung

(10) $$p(u) = \sqrt{2F(w)}.$$

Aus (9) ergibt sich u als Funktion von w. Daraus bestimmt sich dann umgekehrt w als Funktion von u. Wird sie in (10) eingesetzt, so ergibt sich auch die Funktion p von u. Die aufgeworfene Frage ist demnach zu bejahen.

Umgekehrt erhellt: Ist eine Fläche auf eine Rotationsfläche verbiegbar, so ist sie wie diese auch in sich selbst verbiegbar.

Da im Satze 15, den wir anwandten, die abwickelbaren Flächen ausgeschlossen waren, sei noch bemerkt: Die Ebene $z = 0$ ist auch als

eine Rotationsfläche aufzufassen. Da nun alle abwickelbaren Flächen nach ihrer Definition auf diese Ebene verbiegbar sind, brauchen wir sie nicht mehr auszuschließen, wenn wir den folgenden Satz aussprechen:

Satz 16: Eine Fläche läßt sich dann und nur dann stetig in sich verbiegen, wenn sie auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist.

Zur Bestimmung der Rotationsfläche (4) im Falle einer nichtabwickelbaren, aber in sich stetig verbiegbaren Fläche dienen, wenn das Bogenelement-Quadrat auf die charakteristische Form

(11) $$ds^2 = 2\,F(\bar{u} - \bar{v})\,d\bar{u}\,d\bar{v}$$

gebracht worden ist, zunächst die Gleichungen (9) und (10), worin $w = \bar{u} - \bar{v}$ ist. Da ferner u die Bogenlänge der Meridiane bedeutet, also die Gleichung (9) von S. 48 besteht:

$$p'^2 + q'^2 = 1,$$

ergibt sich nachträglich auch

(12) $$q(u) = \int \sqrt{1 - p'^2}\,du\,.$$

Beispiel: Übt man eine stetige Schraubung (siehe I S. 266) auf irgend eine Kurve c aus, so entsteht eine allgemeine Schraubenfläche. Wie immer nehmen wir dabei an, daß die Schraubenachse keine Minimalgerade sei (siehe S. 73). Von vornherein ist es klar, daß jede Schraubenfläche in sich übergeht, wenn man sie eben derjenigen stetigen Schraubung unterwirft, mittels derer sie von der gewählten Kurve c erzeugt wurde. Sie ist deshalb in sich verbiegbar. Nach Satz 16 folgt daher insbesondere der

Satz 17:[1] Jede Schraubenfläche ist auf eine Rotationsfläche verbiegbar.

Wählt man irgend eine Kurve c' auf der Schraubenfläche und unterwirft man sie derselben stetigen Schraubung, so erzeugt sie offenbar dieselbe Schraubenfläche wie die Kurve c. Mithin können wir als erzeugende Kurve c etwa die Schnittkurve der Fläche mit einer Ebene durch die Schraubenachse wählen. Die Schraubenachse sei die z-Achse, die Ebene, in der wir die erzeugende Kurve annehmen, die xz-Ebene. Die Kurve habe die Gleichungen:

(13) $$x = \varphi(u), \qquad y = 0, \qquad z = \psi(u),$$

ausgedrückt mittels eines Parameters u. Die stetige Schraubung besteht nun darin, daß jeder Punkt um einen veränderlichen Winkel v um die z-Achse rotiert und gleichzeitig seine z-Koordinate um ein konstantes Vielfaches, etwa um das h-fache von v wächst. Somit sind

(14) $$x = \varphi(u)\cos v, \qquad y = \varphi(u)\sin v, \qquad z = \psi(u) + h\,v$$

[1] Theorem von Bour, vgl. die Anm. zu S. 351.

die Gleichungen der Schraubenfläche. Die Fläche ist periodisch, denn wenn v um $2\pi h$ gewachsen ist, erhalten x und y die alten Werte, während z um die Konstante $2\pi h$ zunimmt. Die Größe $2\pi h$ der Periode heißt die **Schraubenhöhe**. Im Falle $h = 0$, von dem wir absehen, wird die Fläche eine Rotationsfläche.

Die Fundamentalgrößen erster Ordnung sind:

$$E = \varphi'^2 + \psi'^2, \qquad F = h\psi', \qquad G = \varphi^2 + h^2,$$

hängen also nur von u ab. Das Bogenelement-Quadrat hat den Wert:

$$ds^2 = (\varphi'^2 + \psi'^2)\,du^2 + 2h\psi'\,du\,dv + (\varphi^2 + h^2)\,dv^2. \tag{15}$$

Man könnte auf Grund dieser Formel, indem man nach Satz 18, S. 46, die Minimalkurven der Fläche als Parameterlinien einführt, bestätigen, daß sich das Bogenelement-Quadrat auf die charakteristische Form (11) bringen läßt. Aber die dazu nötige Betrachtung ist nur ein besonderer Fall derjenigen, die wir im folgenden durchführen, weshalb wir hier darauf verzichten dürfen.

Wir wollen annehmen, bei einer vorgelegten Fläche

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

haben die Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G die Eigentümlichkeit, **Funktionen des einen Parameters u allein zu sein.** Dann gelingt es, das Quadrat des Bogenelements auf die charakteristische Form (11) zu bringen. In der Tat, im Falle $F + iD \neq 0$, $F - iD \neq 0$, d. h. $EG \neq 0$ läßt sich ds^2 so darstellen:

$$ds^2 = G\left[\frac{E}{F + iD}\,du + dv\right]\left[\frac{E}{F - iD}\,du + dv\right].$$

Da nun E, F, G und also auch D nur von u abhängen, können wir vermöge

$$\bar{u} = \int \frac{E}{F + iD}\,du + v, \qquad \bar{v} = \int \frac{E}{F - iD}\,du + v \tag{16}$$

neue Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ einführen, so daß

$$ds^2 = G\,d\bar{u}\,d\bar{v}$$

wird. Hier hängt nun G nur von u ab. Aber nach (16) ist auch

$$\bar{u} - \bar{v} = -2i\int \frac{D}{G}\,du,$$

d. h. $\bar{u} - \bar{v}$ hängt auch nur von u ab. Somit wird G schließlich eine Funktion von $\bar{u} - \bar{v}$ allein. Mithin ordnet sich die gewonnene Form $G\,d\bar{u}\,d\bar{v}$ des Bogenelement-Quadrates der charakteristischen Form (11) unter, d. h. **die betrachtete Fläche ist stetig in sich verbiegbar.**

Dasselbe gilt in dem Falle, wo $EG = 0$ ist. Zunächst nämlich sei $E = 0$, aber $G \neq 0$. Dann setzen wir

$$\bar{u} = 2\int \frac{F}{G}\,du + v, \qquad \bar{v} = v,$$

was geschehen darf, da $F : G$ nur von u abhängt. In den neuen Parametern $\bar{u}$ und $\bar{v}$ nimmt nun das Bogenelement-Quadrat

$$ds^2 = 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 = G\left(\frac{2\,F}{G}\,du + dv\right)dv$$

die Form an:

$$ds^2 = G\,d\bar{u}\,d\bar{v},$$

und hierin hängt G nur von u ab. Aber es ist auch

$$\bar{u} - \bar{v} = 2\int\frac{F}{G}\,du,$$

d. h. $\bar{u} - \bar{r}$ hängt auch nur von u ab.

Im Falle $E \neq 0$ und $G = 0$ ist die Betrachtung etwas anders:[1] Zunächst muß $D^2 \neq 0$, also auch $F \neq 0$ sein. Führen wir nun die neuen Parameter

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{2}\int\frac{E}{F}\,du + v, \qquad \mathfrak{v} = u$$

ein, was geschehen darf, da $E:F$ eine Funktion von u allein ist, so wird:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv = 2\,F\left(\frac{E}{2\,F}\,du + dv\right)du = 2\,F\,d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}.$$

Da F eine Funktion von u allein, also wegen $\mathfrak{v} = u$ eine Funktion von $\mathfrak{v}$ allein ist, können wir weiterhin die neuen Parameter

$$\bar{u} = \mathfrak{u}, \qquad \bar{v} = \int F(\mathfrak{v})\,d\mathfrak{v}$$

einführen. Alsdann wird

$$ds^2 = 2\,d\bar{u}\,d\bar{v},$$

und auch diese Form ordnet sich (11) unter.

Wenn schließlich E und G beide gleich Null sind, haben wir

$$ds^2 = 2\,F(u)\,du\,dv.$$

Setzen wir also

$$\bar{u} = \int F(u)\,du, \qquad \bar{v} = v,$$

so ergibt sich wie soeben:

$$ds^2 = 2\,d\bar{u}\,d\bar{v}.$$

Hiermit ist bewiesen:

Satz 18: Wenn die Fundamentalgrößen erster Ordnung einer Fläche nur von einem der beiden Parameter der Fläche abhängen, ist die Fläche stetig in sich verbiegbar und also auch auf eine Rotationsfläche verbiegbar.

---

[1] Im Falle $G = 0$ ergibt sich aus der Fundamentalgleichung (10), S. 338, weil E und F nur von u abhängen sollen, daß $LN - M^2 = 0$ wird; mithin ist die Fläche dann nach Satz 28, S. 157, abwickelbar.

Man sieht, daß dieser Satz insbesondere bei der im Beispiele betrachteten Schraubenfläche anwendbar ist, da die Koeffizienten in (15) nur von u abhängen.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß der Satz 18 nicht umkehrbar ist.

Oben gaben wir den Weg an, auf dem man, falls eine stetig in sich verbiegbare Fläche vorliegt, eine Rotationsfläche

$$x = p(u)\cos v, \quad y = p(u)\sin v, \quad z = q(u) \tag{17}$$

ermitteln kann, auf die sich die gegebene Fläche verbiegen läßt. Dazu dienten, nachdem das Bogenelement-Quadrat der gegebenen Fläche durch Einführung geeigneter Parameter auf eine neue Form

$$ds^2 = 2F(\bar{u} - \bar{v})\,d\bar{u}\,d\bar{v} = 2F(w)\,d\bar{u}\,d\bar{v}$$

gebracht worden war, die Formeln (9), (10) und (12), in denen also $F(w)$ eine gegebene Funktion von w vorstellte. Weil in diesen Formeln Quadraturen vorkommen, durch deren Auswertung willkürliche Konstanten eintreten, leuchtet ein, daß es unendlich viele Rotationsflächen gibt, auf die die gegebene Fläche verbiegbar ist. Auch leuchtet ein, daß alle diese Rotationsflächen aufeinander verbiegbar sind, und daß es sonst keine Rotationsfläche gibt, auf die diese Schar von Rotationsflächen verbiegbar wäre. Denn sonst würde ja auch die gegebene Fläche auf noch mehr Rotationsflächen verbiegbar sein. Man könnte deshalb durch die genauere Untersuchung der Funktionen $p(u)$ und $q(u)$, die sich mittels (9), (10) und (12) ergeben, eine in sich abgeschlossene Familie von aufeinander verbiegbaren Rotationsflächen ermitteln.

Wir ziehen es aber vor, die Frage nach allen Rotationsflächen, die auf eine gegebene Rotationsfläche verbiegbar sind, unabhängig hiervon zu beantworten.

Die gegebene Rotationsfläche sei die Fläche (17). Unter $p(u)$ und $q(u)$ sollen also gegebene Funktionen von u verstanden werden. Außerdem soll u die Bogenlänge der Meridiankurven sein, da wir wie auf S. 48 von den Kegeln von Minimalgeraden absehen müssen, für die ja $D = 0$ ist.

Nun stelle

$$\bar{x} = \bar{p}(\bar{u})\cos\bar{v}, \quad \bar{y} = \bar{p}(\bar{u})\sin\bar{v}, \quad \bar{z} = \bar{q}(\bar{u}) \tag{18}$$

eine zweite Rotationsfläche dar, bei der $\bar{u}$ ebenfalls die Bogenlänge der Meridiane bedeute. Die Frage ist, unter welchen Bedingungen diese Fläche (18) auf die Fläche (17) verbiegbar wird.

Wir wollen noch voraussetzen, daß die gegebene Rotations-

fläche (17) keine konstante Krümmung habe, also nach Satz 9, S. 353, auch nicht die gesuchte Fläche (18). Die Rotationsflächen von konstanter Krümmung werden wir im nächsten Paragraphen besprechen.

Nunmehr sind die Breitenkreise (u) der Fläche (17) die Flächenkurven, längs deren das Krümmungsmaß konstant ist. Nach dem soeben erwähnten Satze 9, S. 353, müssen also die Breitenkreise $(\bar{u})$ der gesuchten Fläche (18) bei der Verbiegung den Breitenkreisen der Fläche (17) entsprechen. Daher muß $\bar{u}$ eine Funktion von u allein sein. Da ferner die Verbiegung eine winkeltreue Abbildung ist, müssen die orthogonalen Trajektorien der Breitenkreise, d. h. die Meridiane (v) und $(\bar{v})$ beider Flächen einander bei der Verbiegung ebenfalls entsprechen. Mithin muß auch $\bar{v}$ eine Funktion von v allein sein. Da nun die Quadrate der Bogenelemente beider Flächen einander gleich sein sollen, muß die Gleichung bestehen:

$$du^2 + p^2\,dv^2 = d\bar{u}^2 + \bar{p}^2\,d\bar{v}^2.$$

Wir haben daher zu verlangen, daß $\bar{u}$ eine Funktion von u allein und $\bar{v}$ eine Funktion von v allein sei, für die

$$du^2 = d\bar{u}^2, \qquad p^2\,dv^2 = \bar{p}^2\,d\bar{v}^2$$

wird. Also ist zunächst

$$\bar{u} = \pm u + \text{konst.}$$

zu setzen. Dies läßt sich vereinfachen: Wir rechnen die Bogenlänge von Breitenkreisen aus, die einander bei der Verbiegung entsprechen, und zwar überdies in entsprechendem Sinne. Alsdann dürfen wir

$$\bar{u} = u$$

setzen. Jetzt bleibt die Bedingung:

$$\frac{p^2(u)}{\bar{p}^2(u)} = \frac{d\bar{v}^2}{dv^2},$$

die links nur u, rechts nur v enthält, weil $\bar{v}$ eine Funktion von v sein soll. Also sind beide Seiten der Gleichung Konstanten. Daher kommt:

$$\bar{p}(u) = a\,p(u), \qquad \frac{d\bar{v}}{dv} = \pm\frac{1}{a},$$

wobei a eine von Null verschiedene Konstante bedeutet. Hieraus folgt:

$$\bar{v} = \pm\frac{v}{a} + \text{konst.}$$

Aber wenn $\bar{v}$ um eine Konstante wächst, heißt dies nur, daß die Fläche (18) um ihre Achse gedreht wird, wobei sie in sich übergeht.

Wenn $\bar{v}$ durch $-\bar{v}$ ersetzt wird, so heißt dies, daß die Fläche an der xz-Ebene gespiegelt wird, wodurch sie ebenfalls in sich übergeht. Wir können daher einfacher setzen:

$$\bar{v} = \frac{v}{a}.$$

Jetzt ist noch $\bar{q}$ zu bestimmen. Da $u = \bar{u}$ die Bogenlänge der Meridiane bedeuten soll, muß

$$\bar{p}'^2 + \bar{q}'^2 = 1, \quad \text{also} \quad \bar{q} = \int \sqrt{1 - a^2 p'^2}\, du$$

sein. Demnach sind:

$$(19) \qquad x = a\,p(u) \cos\frac{v}{a}, \quad y = a\,p(u) \sin\frac{v}{a}, \quad z = \int \sqrt{1 - a^2 p'^2}\, du$$

die Gleichungen der gesuchten Fläche (18).

Durchläuft a stetig die Werte von Eins an, so erhalten wir eine stetige Schar von Rotationsflächen, die auf die Fläche (17), die sich aus (19) für $a = 1$ ergibt, verbiegbar sind. Der Übergang von einer Rotationsfläche zu einer auf sie verbiegbaren Rotationsfläche kann also durch eine stetige Verbiegung, bei der die Fläche beständig Rotationsfläche bleibt, erzielt werden.

Die in der xz-Ebene gelegene Meridiankurve der Fläche (19):

$$x = a\,p(u), \quad y = 0, \quad z = \int \sqrt{1 - a^2 p'^2}\, du$$

hat die Eigentümlichkeit, daß das Produkt aus der Normale n ihres Punktes (u) — gemessen bis zur z-Achse — und aus dem Krümmungsradius r dieses Kurvenpunktes von der Konstante a frei ist, wie aus Satz 9, S. 353, und aus Satz 17, S. 139, sofort folgt, aber auch von neuem nachgewiesen werden kann, da dies Produkt nach I S. 136 den Wert

$$n\,r = -\frac{x}{\frac{d^2 x}{d u^2}} = -\frac{p(u)}{p''(u)}$$

hat. Wir hätten die Meridiankurven der gesuchten Flächen auch auf Grund dieser Eigenschaft bestimmen können.

Wir haben gefunden:

Satz 19:[1] Liegt eine Rotationsfläche

$$x = p(u) \cos v, \quad y = p(u) \sin v, \quad z = \int \sqrt{1 - p'^2(u)}\, du$$

---

[1] Satz von Minding, „Über die Biegung gewisser Flächen", Journ. f. d. r. u. ang. Math. 18. Bd. (1838).

vor, die keine konstante Krümmung hat, so werden alle Rotationsflächen, die auf diese Fläche verbiegbar sind, durch die Gleichungen

$$x = a\,p(u)\cos\frac{v}{a}, \quad y = a\,p(u)\sin\frac{v}{a}, \quad z = \int\sqrt{1 - a^2 p'(u)^2}\,du$$

gegeben. Dabei bedeutet a eine willkürliche Konstante.

§ 6. Verbiegung von Flächen konstanter Krümmung.

Wir haben im vorigen Paragraphen bei der Betrachtung der Verbiegung von Rotationsflächen ausdrücklich von den Rotationsflächen konstanter Krümmung abgesehen, von jenen Flächen also, deren Formen wir schon früher untersucht haben, vgl. das Beispiel auf S. 267 sowie S. 139 u. f. Die Flächen konstanter Krümmung nehmen überhaupt in bezug auf die Verbiegung eine Ausnahmestellung ein.

Um dies zu zeigen, wollen wir zuerst untersuchen, auf welche charakteristische Form sich das Quadrat des Bogenelements einer jeden Fläche konstanter Krümmung K bringen läßt. Sind die Parameterlinien (u) und (v) die Minimalkurven der Flächen wie auf S. 355, so daß das Quadrat des Bogenelements die Form hat:

$$ds^2 = 2\,F(u,v)\,du\,dv, \tag{1}$$

so geht die zweite Fundamentalgleichung (10) auf S. 338 in die zweite Gleichung (6) auf S. 336 über, also in:

$$\frac{LN - M^2}{-F^2} = -\frac{1}{F}\frac{\partial^2 \log F}{\partial u\,\partial v}.$$

Hierin ist die linke Seite, da $E = G = 0$ ist, das Krümmungsmaß K, nach XII (K), so daß wir haben:

$$\frac{1}{F}\frac{\partial^2 \log F}{\partial u\,\partial v} = -K. \tag{2}$$

Hier ist die rechte Seite nach Voraussetzung eine Konstante. Wir nehmen $K \neq 0$ an, sehen also von den abwickelbaren Flächen ab.

Die Gleichung (2) ist eine Bedingungsgleichung für die einzige in (1) auftretende gesuchte Funktion F, und die Frage ist, was für eine Gestalt sie der Funktion F vorschreibt. Die Gleichung (2) ist, weil sie von der unbekannten Funktion F von u und v einen zweiten partiellen Differentialquotienten enthält, eine partielle Differen-

tialgleichung zweiter Ordnung für F.[1] Wir können die Form der Funktion F aus ihr ermitteln, indem wir darauf ausgehen, zunächst die Funktion

(3) $$\lambda = \frac{\partial \log F}{\partial u}$$

zu bestimmen. Die Gleichung (2) läßt sich nämlich so schreiben:

(4) $$\lambda_v = -KF,$$

so daß, da K eine Konstante ist, kommt:

$$\lambda_{uv} = -KF_u = -KF \cdot \frac{F_u}{F} = -KF \frac{\partial \log F}{\partial u}$$

oder nach (3) und (4):

$$\lambda_{uv} = \lambda \lambda_v$$

oder also:

$$\frac{\partial}{\partial v}(\lambda_u - \tfrac{1}{2}\lambda^2) = 0.$$

Mithin muß $\lambda_u - \frac{1}{2}\lambda^2$ eine Funktion von u allein sein. Bezeichnen wir sie für den Augenblick mit $\omega(u)$, so kommt:

(5) $$\lambda_u = \tfrac{1}{2}\lambda^2 + \omega(u).$$

Wohlbemerkt ist λ eine Funktion von u und v. Da aber $\omega(u)$ nur von u abhängt, gibt es Funktionen σ von u allein, für die ganz entsprechend

(6) $$\frac{d\sigma}{du} = \tfrac{1}{2}\sigma^2 + \omega(u)$$

ist. Dies ist nämlich eine Riccatische Gleichung für die Funktion σ von u (vgl. I S. 291). Wir brauchen aber diese Gleichung gar nicht zu integrieren, denn $\omega(u)$ bezeichnete irgend eine Funktion von u, die vorläufig keiner besonderen Beschränkung unterworfen ist. Wenn wir also unter $\sigma(u)$ irgend eine Funktion von u allein verstehen, können wir uns umgekehrt $\omega(u)$ durch (6) definiert denken. Alsdann gibt (5) und (6):

(7) $$\lambda_u - \sigma' = \tfrac{1}{2}(\lambda^2 - \sigma^2) = \tfrac{1}{2}(\lambda - \sigma)(\lambda + \sigma).$$

---

[1] Diese partielle Differentialgleichung hat zuerst Liouville (1850) in der ersten der beiden auf S. 351, Anm., genannten Noten allgemein integriert. Dort behandelte er gerade unser gegenwärtiges Problem. Vgl. auch seine Arbeit: „Sur l'équation aux différences partielles

$$\frac{d^2 \log \lambda}{du\,dv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0“,$$

Comptes Rendus, 36. Bd. (1853), und Journ. de Math. p. et app., 1. Serie, 18. Bd. (1853). Wir folgen seiner Methode.

Jetzt liegt es nahe, zu versuchen, zunächst $\lambda - \sigma$ anstatt λ selbst zu bestimmen. Wir setzen daher

(8) $$\mu = \lambda - \sigma$$

und finden aus (7):

$$\mu_u = \tfrac{1}{2}\mu(\mu + 2\sigma)$$

oder:

$$\frac{\mu_u}{\mu^2} = \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{\mu}$$

oder auch:

$$-\frac{\partial \frac{1}{\mu}}{\partial u} = \frac{1}{2} + \sigma \cdot \frac{1}{\mu}.$$

Dies aber ist eine Bedingung für die Funktion

(9) $$\nu = \frac{1}{\mu},$$

nämlich diese:

(10) $$\nu_u = -\tfrac{1}{2} - \sigma\nu.$$

Wäre ν bekannt, so würde (9) auch μ und darauf (8) auch λ geben, denn hiernach ist ja:

(11) $$\lambda = \frac{1}{\nu} + \sigma.$$

Mithin wird es darauf ankommen, die Form der Funktion $\nu(u, v)$ aus (10) abzuleiten.

Zu diesem Zwecke machen wir wieder von dem Umstande Gebrauch, daß σ irgend eine Funktion von u bedeutet. Wir können also eine Funktion τ von u allein annehmen und dann

(12) $$\sigma = -\frac{\tau'}{\tau}$$

setzen, und zwar tun wir dies, weil dann die Gleichung (10) die bequemere Form annimmt:

$$\nu_u - \frac{\tau'}{\tau}\nu = -\frac{1}{2}$$

oder:

(13) $$\frac{\tau\nu_u - \tau'\nu}{\tau^2} = -\frac{1}{2\tau}.$$

Links steht die partielle Ableitung von $\nu : \tau$ nach u. Wir würden diese Gleichung daher auswerten können, wenn auch rechts eine partielle Ableitung nach u stände. Dies aber erreichen wir, wenn wir abermals eine neue Funktion U von u allein einführen, indem wir setzen:

(14) $$\frac{1}{\tau} = 2U'.$$

Dann ist $v:\tau = 2\,U'v$, so daß (13) gibt:

$$\frac{\partial}{\partial u}(2\,U'v) = -U' \quad \text{oder} \quad \frac{\partial(2\,U'v + U)}{\partial u} = 0.$$

Hieraus folgt, daß $2\,U'v + U$ eine Funktion von v allein sein muß. Wird diese Funktion mit $-V$ bezeichnet, so haben wir:

$$v = -\frac{U+V}{2\,U'}. \tag{15}$$

Wegen (12) und (14) ist nun

$$\sigma = \frac{U''}{U'},$$

also nach (15) und (11):

$$\lambda = -\frac{2\,U'}{U+V} + \frac{U''}{U'},$$

wofür geschrieben werden kann:

$$\lambda = \frac{\partial}{\partial u}[\log U' - 2\log(U+V)].$$

Hiermit ist die durch (3) definierte Funktion λ ermittelt.

Nach (3) hat jetzt $\log F$ die Form:

$$\log F = \log U' - 2\log(U+V) + \log W,$$

wo W eine Funktion von v allein bedeutet, so daß wir haben:

$$F = \frac{U'\,W}{(U+V)^2}. \tag{16}$$

Einsetzen dieses Wertes in die Gleichung (2) gibt:

$$\frac{2\,V'}{W} = -K$$

oder:

$$W = -\frac{2\,V'}{K},$$

also Einsetzen dieses Wertes in (16) schließlich:

$$F = -\frac{2}{K}\frac{U'\,V'}{(U+V)^2}. \tag{17}$$

Die allgemeinste Funktion F also, die der Bedingung (2) bei konstantem K genügt, hat die Form (17), in der U eine beliebig zu wählende Funktion von u allein und V eine beliebig zu wählende Funktion von v allein bedeutet. Dabei ist weder U noch V konstant, weil ja F von Null verschieden sein muß.

Nach (1) läßt sich daher das Quadrat des Bogenelements einer jeden Fläche von der konstanten Krümmung K auf die Form bringen:

$$ds^2 = -\frac{4}{K}\frac{U'\,V'}{(U+V)^2}\,du\,dv.$$

Führen wir nun U und V als neue Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ ein, wobei nach wie vor die Minimalkurven der Fläche die Parameterlinien sind, so kommt einfacher:

$$ds^2 = -\frac{4}{K}\frac{d\bar{u}\,d\bar{v}}{(\bar{u}+\bar{v})^2}.$$

Da die Art der Bezeichnung der Parameter gleichgültig ist, können wir das Ergebnis so aussprechen:

Satz 20:[1] Das Quadrat des Bogenelements einer jeden Fläche von konstanter Krümmung $K \neq 0$ läßt sich auf die Form bringen:

$$ds^2 = -\frac{4}{K}\frac{du\,dv}{(u+v)^2}.$$

Hieraus folgt weiter nach Satz 7, S. 353:

Satz 21:[2] Zwei Flächen von derselben konstanten Krümmung sind stets aufeinander verbiegbar.

Denn man kann ihre Bogenelemente nach Satz 20 durch geeignete Wahl der Parameter auf dieselbe Form bringen.

Da die Kugel vom Radius $1:\sqrt{K}$ nach S. 266 die Krümmung K hat, ist nach Satz 21 jede Fläche konstanter Krümmung auf eine Kugel verbiegbar. Allerdings ist der Radius der Kugel nur dann reell, wenn die Fläche konstante positive Krümmung hat.

Die Kugel kann auf dreifach unendlich viele Arten in sich gedreht werden, denn die Gleichungen derjenigen Bewegungen (vgl. I, § 2 des 2. Abschnittes), bei denen der Anfangspunkt fest bleibt, hängen von gerade und nur drei wesentlichen Konstanten ab. Jene neun Richtungskosinus nämlich, die in den Formeln I(A) vorkommen, sind den sechs Bedingungen I(C) unterworfen, und man kann sie sämtlich mittels trigonometrischer Funktionen dreier willkürlich gewählter Winkel so ausdrücken, daß alle Bedingungen der Tafel I erfüllt sind. Jeder Drehung der Kugel in sich selbst entspricht nun eine Verbiegung einer auf die Kugel verbiegbaren Fläche in sich selbst. Deshalb läßt sich jede Fläche konstanter Krümmung auf dreifach unendlich viele Arten in sich verbiegen.

---

[1] Satz von Liouville (1850), vgl. die Anm. zu S. 379.

[2] Satz von Minding (1839), vgl. die Anm. zu S. 377. Mindings Beweis verwendet eine andere Methode als die, die wir hier nach Liouville benutzt haben.

§ 7. Differentialinvarianten einer Fläche bei Bewegungen.

Unterwerfen wir eine Fläche

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

allen Bewegungen des Raumes, so geht sie in unendlich viele neue Lagen über. Führt eine Bewegung allgemein den Punkt (x, y, z) in den Punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ über[1], so ist nach I (A)

$$(2) \qquad \begin{cases} \bar{x} = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a, \\ \bar{y} = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + b, \\ \bar{z} = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c, \end{cases}$$

wobei die Koeffizienten α, β, γ solche Konstanten sind, die den Formeln I (C), (D), (E) und (F) Genüge leisten, im übrigen aber beliebig sind, während a, b, c ganz willkürliche Konstanten bedeuten. Sind nun x, y, z die Funktionen (1), so werden $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ nach (2) ebenfalls Funktionen von u und v. Sie stellen die Fläche (1) in der neuen Lage dar, in die sie bei der Bewegung übergegangen ist. Dabei haben homologe Punkte (x, y, z) und $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ der Fläche in der ursprünglichen und in der neuen Lage dieselben Parameter u und v. Die neuen Funktionen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ von u und v enthalten wegen (2) noch willkürliche Konstanten.

Wir fragen nun nach einer Funktion von x, y, z und ihren partiellen Ableitungen nach u und v, also nach einer Funktion

$$J(x, y, z;\; x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v;\; x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}, \dots),$$

die bei allen Bewegungen ungeändert bleibt, d. h. nach einer Funktion J, die denselben Wert wie die Funktion

$$J(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\; \bar{x}_u, \bar{x}_v, \bar{y}_u, \bar{y}_v, \bar{z}_u \bar{z}_v;\; \bar{x}_{uu}, \bar{x}_{uv}, \bar{x}_{vv}, \dots)$$

hat, wenn $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ die durch (2) mit Rücksicht auf (1) definierten Funktionen von u und v sind, also

$$\bar{x} = \alpha_1 \varphi(u, v) + \alpha_2 \chi(u, v) + \alpha_3 \psi(u, v) + a$$

usw. ist. Jene Gleichheit soll wohlbemerkt bei allen Bewegungen bestehen, die es gibt. Ist es der Fall, so heißt die Funktion J eine Differentialinvariante der Fläche gegenüber allen Be-

[1] Wir wählen hier (wie schon in I S. 271) die Bezeichnungen der Koordinaten umgekehrt wie in I S. 198.

wegungen des Raumes, aber bei Beibehaltung des Parametersystems u, v.[1]

Infolge von (2) ist:

$$(3)\quad \begin{cases} \bar{x}_u = \alpha_1 x_u + \alpha_2 y_u + \alpha_3 z_u, & \bar{x}_v = \alpha_1 x_v + \alpha_2 y_v + \alpha_3 z_v, \\ \bar{y}_u = \beta_1 x_u + \beta_2 y_u + \beta_3 z_u, & \bar{y}_v = \beta_1 x_v + \beta_2 y_v + \beta_3 z_v, \\ \bar{z}_u = \gamma_1 x_u + \gamma_2 y_u + \gamma_3 z_u, & \bar{z}_v = \gamma_1 x_v + \gamma_2 y_v + \gamma_3 z_v, \end{cases}$$

und entsprechend drücken sich auch die Ableitungen höherer Ordnung von $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ durch die von x, y, z aus. Bezeichnet nämlich allgemein λ_{ik} diejenige Ableitung einer Funktion λ von u und v, die hervorgeht, wenn man λ insgesamt i-mal nach u und k-mal nach v differenziert, so kommt:

$$(4)\quad \begin{cases} \bar{x}_{ik} = \alpha_1 x_{ik} + \alpha_2 y_{ik} + \alpha_3 z_{ik}, \\ \bar{y}_{ik} = \beta_1 x_{ik} + \beta_2 y_{ik} + \beta_3 z_{ik}, \\ \bar{z}_{ik} = \gamma_1 x_{ik} + \gamma_2 y_{ik} + \gamma_3 z_{ik}. \end{cases}$$

Von der Funktion J verlangen wir also, daß die Gleichung

$$(5)\quad \begin{cases} J(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ \bar{x}_{10}, \bar{x}_{01}, \bar{y}_{10}, \bar{y}_{01}, \bar{z}_{10}, \bar{z}_{01};\ \bar{x}_{20}, \bar{x}_{11}, \bar{x}_{02} \ldots) = \\ \quad = J(x, y, z;\ x_{10}, x_{01}, y_{10}, y_{01}, z_{10}, z_{01};\ x_{20}, x_{11}, x_{02} \ldots) \end{cases}$$

infolge von (2) und (4) besteht, wie auch die Koeffizienten a, b, c und die Richtungskosinus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ gewählt sein mögen, vorausgesetzt, daß diese Kosinus die in Tafel I angegebenen Bedingungen erfüllen. — Es ist kaum nötig, hervorzuheben, daß z. B. x_{10} und x_{01} nach der Definition (4) die Ableitungen x_u und x_v bedeuten, daß also die Formeln (3) mit in (4) enthalten sind.

Einige Differentialinvarianten sind uns schon bekannt, nämlich die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung E, F, G und L, M, N, deren Unveränderlichkeit bei der Ausführung von Bewegungen wir schon in Satz 3, S. 16, und Satz 7, S. 123, ausgesprochen haben. Bei unserer Bezeichnungsweise ist nach XI (A) insbesondere

$$(6)\quad \begin{cases} E = x_{10}^2 + y_{10}^2 + z_{10}^2, \\ F = x_{10} x_{01} + y_{10} y_{01} + z_{10} z_{01}, \\ G = x_{01}^2 + y_{01}^2 + z_{01}^2 \end{cases}$$

[1] In § 11, 2. Abschnitt des 1. Bandes, betrachteten wir Differentialinvarianten einer Kurve gegenüber allen Bewegungen des Raumes, aber auch gegenüber allen neu eingeführten Parametern, wie insbes. in I S. 269 auseinandergesetzt wurde. Hier wollen wir dagegen das alte Parametersystem beibehalten. (Vgl. weiter unten § 11.)

Um weitere Differentialinvarianten zu finden, schließen wir aus der Tatsache, daß zu den Bewegungen (2) insbesondere alle Schiebungen

$$\bar{x} = x + a, \quad \bar{y} = y + b, \quad \bar{z} = z + c$$

gehören, wie in I S. 77 und S. 272, daß die Differentialinvarianten von x, y, z selbst frei sein müssen. Weiterhin behaupten wir: Wenn J eine Differentialinvariante ist, gilt dasselbe auch von allen partiellen Ableitungen von J nach u und v.

Um dies zu beweisen, wollen wir der Übersichtlichkeit halber bei J nur eine der Größen x_{ik} besonders angeben und die übrigen durch Punkte andeuten:

$$J(x_{ik}\ldots).$$

Es soll dann unter

$$J(\bar{x}_{ik}\ldots)$$

dieselbe Funktion verstanden werden, nachdem überall die Zeichen x, y, z durch $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ersetzt worden sind. Ist nun J eine Differentialinvariante, so besteht die Gleichung

$$J(\bar{x}_{ik}\ldots) = J(x_{ik}\ldots)$$

infolge von (4) für alle Werte von u und v. Daher darf sie zunächst nach u differenziert werden. Also wird

$$\frac{\partial J(\bar{x}_{ik}\ldots)}{\partial u} = \frac{\partial J(x_{ik}\ldots)}{\partial u}. \tag{7}$$

Hier steht rechts wieder eine Funktion der partiellen Ableitungen von x, y, z nach u und v, denn es ist ja:

$$\frac{\partial J(x_{ik}\ldots)}{\partial u} = \frac{\partial J(x_{ik}\ldots)}{\partial x_{ik}} \frac{\partial x_{ik}}{\partial u} + \cdots$$

oder, da die Ableitung von x_{ik} nach u mit $x_{i+1,k}$ zu bezeichnen ist:

$$\frac{\partial J(x_{ik}\ldots)}{\partial u} = \frac{\partial J(x_{ik}\ldots)}{\partial x_{ik}} x_{i+1,k} + \cdots \tag{8}$$

Demnach ist die rechte Seite von (7) eine Funktion der Ableitungen von x, y, z; links steht in (7) dieselbe Funktion, aber in $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ statt x, y, z geschrieben. Daher sagt die Gleichung (7) aus, daß die Funktion (8) ebenfalls eine Differentialinvariante ist.

Ebenso können wir beweisen, daß die partielle Differentiation einer Differentialinvariante J nach v wieder eine Differentialinvariante liefert; und weiterhin folgt, daß dasselbe auch für beliebig häufige Differentiation nach u und v gilt, so daß unsere Behauptung als richtig dargetan ist.

Da wir hiermit ein einfaches Mittel haben, aus schon bekannten Differentialinvarianten neue abzuleiten, können wir es auf die Fundamentalgrößen E, F, G, L, M, N anwenden, die ja, wie wir wissen, Differentialinvarianten sind.

Hiernach sind nicht nur die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung, sondern auch alle ihre partiellen Ableitungen nach den Parametern u und v Differentialinvarianten.

Fragen wir jetzt zunächst nach allen denjenigen Differentialinvarianten, die nur die partiellen Ableitungen erster Ordnung von x, y und z enthalten, also nach den sogenannten Differentialinvarianten erster Ordnung, so handelt es sich darum, diejenigen Funktionen

$$J(x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v)$$

zu bestimmen, für die infolge von (3):

$$J(\bar{x}_u, \bar{x}_v, \bar{y}_u, \bar{y}_v, \bar{z}_u, \bar{z}_v) = J(x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v)$$

ist. Sie sind leicht gefunden. Die Gleichungen (3) nämlich sind, abgesehen von den Bezeichnungen der Veränderlichen — indem hier die Indizes u und v statt 1 und 2 stehen —, genau dieselben wie die Gleichungen in I S. 272 unten, so daß analytisch dasselbe Problem wie damals vorliegt. Nach I S. 273 erkennen wir also, daß jede Differentialinvariante erster Ordnung eine Funktion von den dreien ist:

$$x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \quad x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$

d. h. eine Funktion der drei Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G.

Da überhaupt jede Funktion von Differentialinvarianten wieder eine Differentialinvariante ist, folgt, daß E, F, G die einzigen wesentlichen Differentialinvarianten erster Ordnung sind.

Jetzt benutzen wir den Satz 2, S. 332, nach dem sich alle partiellen Ableitungen von x, y, z von denen der zweiten Ordnung an durch die von der ersten Ordnung, durch die Fundamentalgrößen und die Ableitungen der Fundamentalgrößen ausdrücken lassen. Mithin läßt sich jede Differentialinvariante J als Funktion der Ableitungen erster Ordnung von x, y, z, der Fundamentalgrößen und der Ableitungen der Fundamentalgrößen darstellen, also auf die Form bringen:

$$J(x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v;\ E, F, G, E_u \ldots;\ L, M, N, L_u \ldots).$$

in der die Punkte partielle Ableitungen von E, F, G und L, M, N andeuten.

Die Forderung, daß diese Funktion bei allen Bewegungen ungeändert bleiben soll, wird durch die Gleichung ausgedrückt:

$$J(\bar{x}_u, \bar{x}_v, \bar{y}_u, \bar{y}_v, \bar{z}_u, \bar{z}_v;\ E, F, G, E_u \ldots;\ L, M, N, L_u \ldots) =$$
$$= J(x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v;\ E, F, G, E_u \ldots;\ L, M, N, L_u \ldots),$$

wo E, F, G, L, M, N und ihre Ableitungen auch links stehen, weil ja diese Funktionen bei allen Bewegungen ungeändert bleiben. Die Gleichung bleibt richtig, wenn man für die rechts und links genau an gleicher Stelle stehenden Funktionen E, F, G, L, M, N und ihre Ableitungen irgendwelche Konstanten setzt, denn die Gleichung soll ja infolge von (3) allein bestehen. Wenn wir aber Konstanten einsetzen, wird die Differentialinvariante J eine Funktion von $x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v$ allein, also eine Differentialinvariante erster Ordnung. Da wir nun gesehen haben, daß jede Differentialinvariante erster Ordnung eine Funktion von E, F, G allein ist, schließen wir, daß die Funktion J vor der Substitution von Konstanten eine Funktion der Fundamentalgrößen und ihrer Ableitungen allein ist.

Andererseits ist mit den Fundamentalgrößen und ihren Ableitungen auch jede Funktion dieser Funktionen eine Differentialinvariante. Mithin folgt:

Satz 22: Unterwirft man eine Fläche

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

allen Bewegungen des Raumes, ohne ihr Parametersystem zu ändern, so bleibt eine Funktion der Koordinaten x, y, z und ihrer partiellen Ableitungen nach u und v in beliebig hohen Ordnungen dann und nur dann ungeändert, wenn sie eine Funktion der sechs Fundamentalgrößen E, F, G, L, M, N und ihrer partiellen Ableitungen beliebig hoher Ordnungen nach u und v ist.

Selbstverständlich ist hierbei immer nur von einwertigen analytischen Funktionen die Rede.

Wir wollen eine Anwendung machen: Zunächst ist jede Summe von der Form

$$\mathsf{S}\, x_{ik} x_{rs}$$

oder, ausführlich geschrieben:

$$\mathsf{S}\, \frac{\partial^{i+k} x}{\partial u^i \partial v^k} \frac{\partial^{r+s} x}{\partial u^r \partial v^s}$$

eine Differentialinvariante, denn nach (4) wird

$$\mathsf{S}\,\bar{x}_{ik}\bar{x}_{rs} = \mathsf{S}\,(\alpha_1 x_{ik} + \alpha_2 y_{ik} + \alpha_3 z_{ik})(\alpha_1 x_{rs} + \alpha_2 y_{rs} + \alpha_3 z_{rs}).$$

Hier ist nun die rechte Seite wegen I (*C*) gleich $\mathsf{S}\,x_{ik}x_{rs}$, also, in der Tat

$$\mathsf{S}\,\bar{x}_{ik}\bar{x}_{rs} = \mathsf{S}\,x_{ik}x_{rs}.$$

Auf die Differentialinvariante $\mathsf{S}\,x_{ik}x_{rs}$ wenden wir jetzt den Satz 22 an. Dann kommt:

Satz 23: Sind

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

die Gleichungen einer Fläche, so ist jede Summe von der Form

$$\frac{\partial^{i+k} x}{\partial u^i \partial v^k}\frac{\partial^{r+s} x}{\partial u^r \partial v^s} + \frac{\partial^{i+k} y}{\partial u^i \partial v^k}\frac{\partial^{r+s} y}{\partial u^r \partial v^s} + \frac{\partial^{i+k} z}{\partial u^i \partial v^k}\frac{\partial^{r+s} z}{\partial u^r \partial v^s}$$

als Funktion der Fundamentalgrößen *E, F, G, L, M, N* und ihrer partiellen Ableitungen nach *u* und *v* darstellbar.

Die Formeln (4), S. 332, gestatten uns, die einfachsten Summen von dieser Art wirklich auszurechnen. Wir machen dabei Gebrauch davon, daß nach XI (*G*)

$$\mathsf{S}\,(y_u z_v - z_u y_v)^2 = D^2$$

ist, ferner die Identitäten bestehen:

$$\mathsf{S}\,(y_u z_v - z_u y_v)x_u = 0, \quad \mathsf{S}\,(y_u z_v - z_u y_v)x_v = 0$$

und endlich nach XI (*A*) noch

$$\mathsf{S}\,x_u^2 = E, \quad \mathsf{S}\,x_u x_v = F, \quad \mathsf{S}\,x_v^2 = F$$

ist. Nach (4), S. 332, berechnen wir nämlich x_{uu}^2, bilden entsprechend y_{uu}^2 und z_{uu}^2 und addieren alle drei. Wegen der soeben angegebenen Gleichungen erhalten wir alsdann $\mathsf{S}\,x_{uu}^2$ als Funktion von *E, F, G, L* und von den Ableitungen erster Ordnung von *E, F, G*. Entsprechend lassen sich andere ähnliche Summen berechnen. So kommt:

$$\mathsf{S}\,x_{uu}^2 = L^2 + \frac{1}{4D^2}(E_u^2 G + 2E_u E_v F + E_v^2 E - 4E_u F_u F - 4E_v F_u E + 4F_u^2 E),$$

$$\mathsf{S}\,x_{uv}^2 = M^2 + \frac{1}{4D^2}(E_v^2 G - 2E_v G_u F + G_u^2 E),$$

$$\mathsf{S}\,x_{vv}^2 = N^2 + \frac{1}{4D^2}(G_u^2 G + 2G_u G_v F + G_v^2 E - 4G_u F_v G - 4G_v F_v F + 4F_v^2 G),$$

$$\mathbf{S}\, x_{uu} x_{uv} = LM + \frac{1}{4D^2}(E_u E_v G + E_v^2 F - 2 E_v F_u F - \\ - E_u G_u F - E_v G_u E + 2 F_u G_u E),$$

$$\mathbf{S}\, x_{uu} x_{vv} = LN + \frac{1}{4D^2}(- E_u G_v F - E_u G_u G + 2 E_u F_v G - \\ - E_v G_v E - E_v G_u F + 2 E_v F_v F + \\ + 2 F_u G_v E + 2 F_u G_u F - 4 F_u F_v F),$$

$$\mathbf{S}\, x_{uv} x_{vv} = MN + \frac{1}{4D^2}(G_u^2 F + G_u G_v E - 2 G_u F_v F - \\ - G_u E_v G - G_v E_v F + 2 E_v F_v G).$$

Der Satz 22 bestätigt wieder die große Bedeutung der Fundamentalgrößen: Kennt man die Fundamentalgrößen E, F, G, L, M, N einer Fläche, so kennt man auch alle ihre Differentialinvarianten gegenüber allen Bewegungen bei demselben Parametersystem. Wenn zwei Flächen dieselben Fundamentalgrößen haben, haben sie hiernach überhaupt dieselben Differentialinvarianten.

Aus dem Begriffe der Differentialinvarianten folgt, daß zwei einander kongruente und mittels zweier Parameter u und v dargestellte Flächen übereinstimmende Differentialinvarianten haben, sobald homologe Punkte zu gleichen Parameterwerten gehören. Man wird die Richtigkeit der Umkehrung vermuten, daß nämlich zwei auf die Parameter u und v bezogene Flächen einander kongruent sind, sobald ihre Differentialinvarianten übereinstimmen, wozu nach Satz 22 ausreicht, daß beide Flächen dieselben Funktionen von u und v als Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung haben. Dies wollen wir im folgenden beweisen. Dabei ist vorweg zu bemerken, daß die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L, M, N einer Fläche erst dann einwertig definiert sind, wenn man die Quadratwurzel aus $EG - F^2$, also D, einwertig gemacht hat. Denn nach XII (B) sind unmittelbar nur DL, DM und DN einwertig definiert. Wenn also davon die Rede ist, daß zwei Flächen übereinstimmende Fundamentalgrößen haben, so soll darin eingeschlossen sein, daß bei beiden Flächen D in derselben Art einwertig gemacht worden ist.

Wenn nun zwei Flächen

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v) \tag{9}$$

und

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(u, v), \quad \bar{y} = \bar{\chi}(u, v), \quad \bar{z} = \bar{\psi}(u, v) \tag{10}$$

vorliegen, und wenn beide dieselben Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung E, F, G und L, M, N haben, ist es zunächst klar, daß Kongruenz in den kleinsten Teilen stattfindet, vgl. S. 352.

Natürlich entsprechen einander dabei solche Punkte beider Flächen, die zu demselben Parameterpaare u, v gehören. Wenn man überdies für ein bestimmtes Wertepaar u_0, v_0 sowohl $\sqrt{E}$ als auch $\sqrt{G}$ einwertig festsetzt, sind die Parameterlinien in der Umgebung der zugehörigen Stellen beider Flächen nach S. 34 orientiert, und man sieht durch ähnliche Überlegungen wie auf S. 35 u. f., daß jene Kongruenz in den kleinsten Teilen sich dann auch auf die Orientierung der Parameterlinien erstreckt. Die Kongruenz in entsprechenden unendlich kleinen Teilen geht übrigens noch weiter: Auch die Krümmungen entsprechender, d. h. zu einem bestimmten Werte von $dv:du$ gehöriger Normalschnitte in zusammengehörigen Punkten stimmen überein, weil sie sich mittels der Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung ausdrücken, vgl. z. B. (1) auf S. 125. Danach entsprechen einander auch die Hauptkrümmungsrichtungen, Haupttangentenrichtungen usw. bei der Kongruenz in den kleinsten Teilen.

Wir wollen aber beweisen, daß auch solche einander entsprechende Teile beider Flächen einander kongruent sind, die endliche Ausdehnung haben. Zu diesem Zwecke bringen wir zunächst die zweite Fläche mittels einer Bewegung in eine neue Lage, so daß zwei einander entsprechende unendlich kleine Teile beider Flächen zusammenfallen. Es sei also u_0, v_0 ein bestimmtes Wertepaar der Parameter. Zu ihnen gehören Punkte P_0 und $\bar{P}_0$ beider Flächen. Sie haben orientierte Normalen und orientierte Tangenten der von ihnen ausgehenden Parameterlinien $(v = v_0)$ und $(u = u_0)$. Die drei orientierten Geraden von $\bar{P}_0$ aus bringen wir jetzt mittels einer Bewegung mit den entsprechenden orientierten Geraden von P_0 aus zur Deckung. Die beiden Flächen liegen nunmehr so, daß sie in einem gemeinsamen Punkte P_0 oder (u_0, v_0) dieselbe orientierte Normale, dieselbe orientierte Tangente der Parameterlinie $(v = v_0)$ und dieselbe orientierte Tangente der Parameterlinie $(u = v_0)$ haben. Da die ausgeführte Bewegung die Fundamentalgrößen der zweiten Fläche nicht ändert, weil dies Differentialinvarianten sind, dürfen wir annehmen, daß (9) und (10) beide Flächen in der neuen Lage zueinander darstellen. Mit X, Y, Z bezeichnen wir die Richtungskosinus der Normale der Fläche (9), mit $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ die der Normale der Fläche (10). An der gemeinsamen Stelle (u_0, v_0) sind nun X, Y, Z gleich $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$. Ferner ist ebenda nach (10), S. 34,

$$\frac{x_u}{\sqrt{E}} = \frac{\bar{x}_u}{\sqrt{E}} \quad \text{usw.,}$$

also $x_u = \bar{x}_u$ usw., weil dort die Tangenten der Parameterlinien ($v = v_0$) beider Flächen zusammenfallen, und ebenso ergibt sich, daß an der Stelle (u_0, v_0) auch x_v, y_v, z_v mit $\bar{x}_v$, $\bar{y}_v$, $\bar{z}_v$ übereinstimmen. Folglich haben die neun Funktionen

$$(11)\quad \begin{cases} \Psi_1 = x_u - \bar{x}_u, & \Psi_2 = y_u - \bar{y}_u, & \Psi_3 = z_u - \bar{z}_u, \\ \Psi_4 = x_v - \bar{x}_v, & \Psi_5 = y_v - \bar{y}_v, & \Psi_6 = z_v - \bar{z}_v, \\ \Psi_7 = X - \bar{X}, & \Psi_8 = Y - \bar{Y}, & \Psi_9 = Z - \bar{Z} \end{cases}$$

von u und v die Eigenschaft, für $u = u_0$, $v = v_0$ sämtlich den Wert Null anzunehmen.

Wir müssen jetzt an die Betrachtungen auf S. 344 u. f. erinnern.[1] Danach drücken sich die achtzehn partiellen Ableitungen erster Ordnung der neun Funktionen

$$x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v, X, Y, Z$$

als ganze lineare homogene Funktionen dieser neun Funktionen selbst aus, wobei die Koeffizienten nur von den Fundamentalgrößen E, F, G und L, M, N und von den partiellen Ableitungen erster Ordnung von E, F, G abhängen. Genau dieselben achtzehn Gleichungen gelten aber auch für die partiellen Ableitungen erster Ordnung der neun Funktionen

$$\bar{x}_u, \bar{x}_v, \bar{y}_u, \bar{y}_v, \bar{z}_u, \bar{z}_v, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z},$$

weil ja die zweite Fläche nach Voraussetzung dieselben Fundamentalgrößen wie die erste hat. Ziehen wir einander entsprechende Gleichungen von einander ab, so folgt mithin: Die achtzehn partiellen Ableitungen erster Ordnung der neun Funktionen $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_9$, die durch (11) definiert sind, stellen sich so dar:

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Psi_i}{\partial u} = \gamma_{i1}\Psi_1 + \gamma_{i2}\Psi_2 + \cdots + \gamma_{i9}\Psi_9, \\ \dfrac{\partial \Psi_i}{\partial v} = \delta_{i1}\Psi_1 + \delta_{i2}\Psi_2 + \cdots + \delta_{i9}\Psi_9, \end{cases}$$

wo die Koeffizienten γ und δ Funktionen von E, F, G, L, M, N und von den partiellen Ableitungen erster Ordnung von E, F, G sind. Das Gleichungensystem (12) ist geradeso gebaut wie das System (10) auf S. 349, das sich auf sechs Funktionen bezog. Geradeso wie dort folgern wir demnach, daß sich überhaupt jede partielle Ableitung beliebig hoher Ordnung irgend einer der neun Funktionen $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_9$ in der allgemeinen Form

[1] Der in der Anm. zu S. 345 gegebene Ratschlag gilt, sinngemäß übertragen, auch für den Rest dieses Paragraphen.

$$\varepsilon_1 \Psi_1 + \varepsilon_2 \Psi_2 + \cdots + \varepsilon_9 \Psi_9$$

darstellt, wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_9$ nur von E, F, G, L, M, N und von den partiellen Ableitungen dieser Fundamentalgrößen abhängen. Da nun aber $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_9$, wie wir oben sahen, für $u = u_0$, $v = v_0$ den Wert Null haben, ergibt sich hieraus, daß alle partiellen Ableitungen beliebig hoher Ordnung von $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_9$ für $u = u_0$, $v = v_0$ gleich Null sind. Mithin verschwinden die neun Funktionen $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_9$ nicht nur für $u = u_0$, $v = v_0$, sondern überhaupt in der Umgebung des Wertepaares u_0, v_0. Nach der Definition (11) der neun Funktionen besagt dies, daß

$$x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v, X, Y, Z$$

überall in der Umgebung des Wertepaares u_0, v_0 gleich

$$\bar{x}_u, \bar{x}_v, \bar{y}_u, \bar{y}_v, \bar{z}_u, \bar{z}_v, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$$

sind. Demnach müssen $x - \bar{x}$, $y - \bar{y}$ und $z - \bar{z}$ Konstanten sein. Aber für $u = u_0$, $v = v_0$ haben beide Flächen denselben Punkt. Die Konstanten sind deshalb gleich Null, d. h. es ist überhaupt $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ und $z = \bar{z}$. Die beiden Flächen (9) und (10) fallen also zusammen. Auch ist $\bar{X} = X$, usw.

Man muß sich nun daran erinnern, daß die zweite Fläche ursprünglich eine andere Lage hatte. Also ist bewiesen:

Satz 24: Stimmen bei zwei durch die Parameter u und v ausgedrückten Flächen die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung der einen Fläche mit denen der anderen Fläche überein, so sind beide Flächen einander kongruent, sowie gleichsinnig orientiert. Homologe Punkte sind dabei solche, die zu demselben Wertepaare u, v gehören.

An Stelle des Satzes 4, S. 350, können wir daher den weitergehenden Satz aussprechen:

Satz 25: Sind E, F, G und L, M, N solche Funktionen von u und v, die den drei Fundamentalgleichungen genügen und für die $EG - F^2$ nicht identisch verschwindet, so gibt es unendlich viele Flächen mit den Parametern u und v, die E, F, G und L, M, N zu Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung haben. Alle diese Flächen sind aber einander kongruent. Homologe Punkte sind dabei solche, die zu demselben Wertepaare u, v gehören. Die Schar aller dieser Flächen geht aus einer von ihnen hervor, wenn man sie allen Bewegungen unterwirft.[1]

[1] Die Sätze 24 und 25 rühren von Bonnet her, vgl. die Anm. zu S. 341.

§ 8. Ansatz zur Ermittelung einer Fläche mit gegebenen Fundamentalgrößen.[1]

Wir treten nun der Aufgabe näher, diejenigen Flächen zu berechnen, die vorgeschriebene und den Fundamentalgleichungen Genüge leistende Fundamentalgrößen haben. Nach den letzten Ergebnissen reicht es aus, eine einzige von allen diesen Flächen zu ermitteln. Natürlich haben wir dabei auf die Gleichungen (7) und (8), S. 336, für x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} und X_u, X_v zurückzugehen. Wir geben sie hier noch einmal in einer übersichtlichen Form an, die das Wesentliche der Gleichungen besser hervortreten läßt:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_{uu} = LX + \varphi_1 x_u + \psi_1 x_v, \\ x_{uv} = MX + \varphi_2 x_u + \psi_2 x_v, \\ x_{vv} = NX + \varphi_3 x_u + \psi_3 x_v, \end{cases} \qquad \begin{aligned} X_u &= \lambda_1 x_u + \mu_1 x_v, \\ X_v &= \lambda_2 x_u + \mu_2 x_v. \end{aligned}$$

Hierin haben die Koeffizienten die Bedeutung:

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2D^2}(E_u G + E_v F - 2F_u F), & \psi_1 = \frac{1}{2D^2}(-E_u F - E_v E + 2F_u E), \\ \varphi_2 = \frac{1}{2D^2}(E_v G - G_u F), & \psi_2 = \frac{1}{2D^2}(-E_v F + G_u E), \\ \varphi_3 = \frac{1}{2D^2}(-G_v F - G_u G + 2F_v G), & \psi_3 = \frac{1}{2D^2}(G_v E + G_u F - 2F_v F), \\ \lambda_1 = -\frac{1}{D^2}(FM - GL), & \mu_1 = -\frac{1}{D^2}(FL - EM), \\ \lambda_2 = -\frac{1}{D^2}(FN - GM), & \mu_2 = -\frac{1}{D^2}(FM - EN). \end{cases}$$

Sie sind bekannte Funktionen von u und v, da wir annehmen, daß die Fundamentalgrößen E, F, G und L, M, N gegebene Funktionen von u und v seien. Außer (1) bestehen auch diejenigen Gleichungen, die aus (1) durch zyklische Vertauschung der Zeichen x, y, z und X, Y, Z hervorgehen und in denen also die Koeffizienten genau dieselben bekannten Funktionen von u und v sind wie in den Gleichungen (1) selbst. Nach S. 343 ist das System aller fünfzehn Gleichungen unbeschränkt integrabel, d. h. die Ausrechnung der Gleichungen

$$\frac{\partial x_{uu}}{\partial v} = \frac{\partial x_{uv}}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_{uv}}{\partial v} = \frac{\partial x_{vv}}{\partial u}, \quad \frac{\partial X_u}{\partial v} = \frac{\partial X_v}{\partial u}$$

[1] Solche Leser, denen das Folgende noch zu schwer fällt, können diesen Paragraphen ebenso wie den folgenden überschlagen.

sowie der entsprechenden Gleichungen in y, z und Y, Z führt zu keinen neuen Bedingungen weil wir ja immer voraussetzen, daß die gegebenen Fundamentalgrößen den drei Fundamentalgleichungen Genüge leisten. Natürlich soll auch $EG - F^2$ oder D^2 von Null verschieden sein. Wie auf S. 389 soll auch hier nochmals betont werden, daß die Annahme, E, F, G und L, M, N seien gegebene Funktionen von u und v, die Voraussetzung in sich schließt, daß D eine einwertig gemachte Funktion von u und v sei, etwa dadurch, daß von den beiden von Null verschiedenen Werten, die D für ein bestimmtes Wertepaar u_0, v_0 der Parameter annimmt, einer ausgewählt worden ist. Wir erwähnen auch sogleich hier, daß im folgenden die Quadratwurzel aus E wiederholt vorkommen wird, und zwar auch in Nennern. Deshalb wollen wir voraussetzen, daß E nicht identisch verschwinde und $\sqrt{E}$ in derselben Art wie D einwertig gemacht worden sei. Was sich ergibt, wenn E identisch gleich Null ist, wird im nächsten Paragraphen erörtert werden. Öfters werden wir kurzweg von bekannten Funktionen oder Koeffizienten sprechen. Darunter werden bekannte Funktionen der Fundamentalgrößen und ihrer partiellen Ableitungen verstanden; in der Tat sind sie bekannte Funktionen von u und v, weil die Fundamentalgrößen als gegeben angenommen werden.

Sehr bemerkenswert ist es, daß die fünf Gleichungen (1) von y, z und Y, Z und den Ableitungen dieser Funktionen frei sind. Sie geben an, daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung der drei Funktionen

$$x_u, \quad x_v, \quad X$$

ganze lineare homogene Funktionen von x_u, x_v, X selbst mit bekannten Koeffizienten sind. Unser Ziel ist daher, die Größen x_u, x_v, X auf Grund dieses Systems (1) als Funktionen von u und v zu berechnen. Wie gesagt, bleiben die Gleichungen (1) richtig, wenn man darin die Zeichen x und X durch y und Y oder durch z und Z ersetzt. Daher muß das, was sich aus dem System (1) in bezug auf die Funktionen x_u, x_v, X folgern läßt, ohne weiteres auch für y_u, y_v, Y und für z_u, z_v, Z gelten.

Die Auswertung des Systems (1) wird nun wesentlich durch den Umstand erleichtert, daß man von vornherein eine zwischen x_u, x_v, X bestehende Beziehung anzugeben vermag, nämlich durch die folgende einfache Überlegung: Auf einer Fläche, der die gegebenen Fundamentalgrößen zukommen, seien t_u und t_v die Tangenten der vom Punkte (u, v) ausgehenden Parameterlinien (u) und (v). Diejenigen Flächentangenten g_1 und g_2, vermöge derer die von t_u

und t_v gebildeten Scheitelwinkelpaare in gleiche Teile zerlegt werden, sind zueinander senkrecht. Sie bilden also zusammen mit der Flächennormale des Punktes (u, v) ein dreifach rechtwinkliges Achsenkreuz. Die Richtungskosinus von g_1 und g_2 gegenüber der x-Achse seien α_1 und α_2, der Richtungskosinus der Normale gegenüber derselben Achse ist X. Nach I (D) besteht dann die Gleichung

(3) $$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + X^2 = 1,$$

und das ist jene angekündigte Gleichung zwischen x_u, x_v, X, wie sich sogleich zeigen wird, wenn wir in (3) die Werte von α_1 und α_2 einführen. Nach (15), S. 36, sind $d_v s = \sqrt{G}\,dv$ und $d_u s = \sqrt{E}\,du$ die Bogenelemente der Parameterlinien (u) und (v). Für die Fortschreitungsrichtungen längs g_1 und g_2 ist daher das Verhältnis $du:dv$ entweder gleich $\sqrt{G}:\sqrt{E}$ oder gleich $-\sqrt{G}:\sqrt{E}$. Daher sind die Zunahmen von x, y, z längs g_1 und g_2 proportional zu

$$x_v\sqrt{E} \pm x_u\sqrt{G}, \quad y_v\sqrt{E} \pm y_u\sqrt{G}, \quad z_v\sqrt{E} \pm z_u\sqrt{G},$$

indem etwa das Pluszeichen für g_1 und das Minuszeichen für g_2 gilt. Nach XI (A) ist ferner

$$\mathsf{S}(x_v\sqrt{E} \pm x_u\sqrt{G})^2 = 2(EG \pm F\sqrt{E}\sqrt{G}).$$

Demnach haben die vorhin mit α_1 und α_2 bezeichneten Richtungskosinus die Werte:

$$\alpha_1 = \frac{x_v\sqrt{E} + x_u\sqrt{G}}{\sqrt{2(EG + F\sqrt{E}\sqrt{G})}}, \quad \alpha_2 = \frac{x_v\sqrt{E} - x_u\sqrt{G}}{\sqrt{2(EG - F\sqrt{E}\sqrt{G})}}.$$

Es ist nicht nötig, diese Ausdrücke einwertig zu machen, denn wenn man sie in (3) einsetzt, verschwinden alle Wurzelzeichen, indem sich wegen $D^2 = EG - F^2$ ergibt[1]:

(4) $$E x_v^2 - 2F x_u x_v + G x_u^2 = D^2(1 - X^2).$$

Dies ist die angekündigte Beziehung zwischen x_u, x_v, X.

Rein analytisch bekommt man sie schneller so: Wegen $\mathsf{S}\,X^2 = 1$ ist

$$Y^2 + Z^2 = 1 - X^2,$$

also, wenn man hierin nach XI (F) die Werte von Y und Z einsetzt:

$$(z_u x_v - x_u z_v)^2 + (x_u y_v - y_u x_v)^2 = D^2(1 - X^2).$$

Quadriert man die linke Seite aus und addiert und subtrahiert man links $x_u^2 x_v^2$, so kommt:

[1] Diese von Engel mitgeteilte Art, die Gleichung (4) abzuleiten, beruht auf einfacheren geometrischen Überlegungen als diejenige, die in der zweiten Auflage in einer Fußnote gegeben wurde.

$$x_v^2 \mathsf{S} x_u^2 - 2 x_u x_v \mathsf{S} x_u x_v + x_u^2 \mathsf{S} x_v^2 = D^2 (1 - X^2),$$

und dies ist nach XI (A) die Gleichung (4).

Selbstverständlich gelten auch diejenigen beiden Gleichungen, die aus (4) hervorgehen, wenn man darin x_u, x_v, X durch y_u, y_v, Y oder z_u, z_v, Z ersetzt.

Für das Folgende ist es wichtig, daß man einsieht, daß zwischen x_u, x_v, X außer (4) keine andere bekannte Gleichung besteht, d. h. keine andere Gleichung, die man wie diese anzugeben vermag, sobald bloß die Fundamentalgrößen als Funktionen von u und v gegeben sind, also keine andere Gleichung von der allgemeinen Gestalt

$$\Phi(x_u, x_v, X, E, F, G, L, M, N \ldots) = 0,$$

worin die Punkte die Ableitungen der Fundamentalgrößen bis zu beliebig hohen Ordnungen andeuten sollen. Gäbe es nämlich außer (4) noch eine derartige Gleichung, so ließe sich vermöge (4) aus ihr X eliminieren, so daß eine Gleichung von der Form

$$\Psi(x_u, x_v, E, F, G, L, M, N \ldots) = 0$$

vorläge. Selbstredend würden dann auch diejenigen Gleichungen bestehen, die hieraus durch zyklische Vertauschung von x, y, z hervorgehen:

$$\Psi(y_u, y_v, E, F, G, L, M, N \ldots) = 0,$$
$$\Psi(z_u, z_v, E, F, G, L, M, N \ldots) = 0.$$

Wir fassen nun, wie vorhin, einen bestimmten Punkt (u, v) einer derjenigen Flächen ins Auge, denen die gegebenen Fundamentalgrößen zukommen. Nach S. 34 bestimmen x_v, y_v, z_v und x_u, y_u, z_u die Richtungen der Tangenten t_u und t_v der vom Punkte (u, v) ausgehenden Parameterlinien (u) und (v). Da die Fundamentalgrößen und ihre Ableitungen für den bestimmt angenommenen Punkt (u, v) bestimmte Werte haben, würde also das Bestehen der drei Gleichungen $\Psi = 0$ besagen: Hat die Tangente t_u eine feste Richtung, so kommt auch der Tangente t_v eine feste Richtung zu. Nun wissen wir aber nach Satz 22, S. 387, daß die gegebenen Fundamentalgrößen auch allen denjenigen Flächen zukommen, die aus der gerade betrachteten durch irgendwelche Bewegungen hervorgehen. Insbesondere können wir die betrachtete Fläche allen Bewegungen unterwerfen, bei denen der Punkt (u, v) und seine Tangente t_u fest bleibt. Augenscheinlich bleibt dabei die Tangente t_v nicht fest, und dies widerspricht dem soeben Erkannten. In der Tat also kann zwischen x_u, x_v, X außer der Gleichung (4) keine andere bekannte Gleichung gelten.

Das Bestehen der Gleichung (4) legt es nun nahe, an Stelle von x_u und x_v zwei andere Größen als gesuchte Funktionen einzuführen. Denn die linke Seite von (4) läßt sich in Faktoren zerlegen, die in x_u und x_v linear sind, nämlich wegen $D^2 = EG - F^2$ und der Voraussetzung $E \neq 0$ so:

$$\frac{1}{E}[(F + iD)x_u - Ex_v][(F - iD)x_u - Ex_v] = D^2(1 - X^2).$$

Deshalb führen wir an Stelle von x_u und x_v die Größen ein[1]:

$$(5) \qquad p = \frac{(F + iD)x_u - Ex_v}{D\sqrt{E}}, \qquad q = \frac{(F - iD)x_u - Ex_v}{D\sqrt{E}}.$$

Dann nimmt (4) die einfachere Gestalt an:

$$(6) \qquad pq = 1 - X^2.$$

Nach (5) sind p und q ganze lineare homogene Funktionen von x_u und x_v mit bekannten Koeffizienten, also auch umgekehrt x_u und x_v ganze lineare homogene Funktionen von p und q mit bekannten Koeffizienten, nämlich:

$$(7) \qquad x_u = \frac{i}{2}\sqrt{E}(q - p), \qquad x_v = i\frac{(F + iD)q - (F - iD)p}{2\sqrt{E}}.$$

Wären uns p und q als Funktionen von u und v bekannt, so würden wir hiernach auch x_u und x_v als Funktionen von u und v kennen. Mithin gehen wir darauf aus, an Stelle von x_u, x_v, X die Größen p, q, X als Funktionen von u und v zu ermitteln.

Auf Grund der Gleichungen (5), (1) und (7) kann man berechnen, wie sich die partiellen Ableitungen erster Ordnung von p, q, X durch die Größen p, q, X selbst ausdrücken. Wir wollen dies in zwei Schritten tun, weil wir dadurch die Rechenarbeit erheblich vereinfachen können. Zunächst nämlich stellen wir nur fest, wie die allgemeine Gestalt des sich ergebenden Gleichungensystems beschaffen ist, und erst dann rechnen wir es wirklich aus, indem wir die Werte der darin vorkommenden Koeffizienten bestimmen.

---

[1] Dies auf Vorschlag von Engel. In der zweiten Auflage wurden nicht erst die Zwischengrößen p, q und dann die weiter unten vorkommenden Größen ξ, η, sondern sogleich ξ, η eingeführt. Das neue Verfahren kürzt die rechnerische Kleinarbeit bedeutend ab und erleichtert daher den Überblick sehr, namentlich, da auch die Aufstellung des Systems für p, q, X auf Anregung von Engel in zwei Schnitten geschieht. Dabei darf aber angemerkt werden, daß auch schon in der ersten Auflage diese beiden Schnitte in etwas anderer Einkleidung einzeln gemacht worden waren; zum Schaden der Sache ist dann in der zweiten Auflage Abstand genommen worden.

Die Differentiation von (5) nach u und v zeigt, daß p_u, q_u, p_v, q_v ganze lineare homogene Funktionen von $x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}, x_u, x_v$ mit bekannten Koeffizienten sind. Nach den in (1) links stehenden Gleichungen sind aber x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} ebensolche Funktionen von x_u, x_v, X. Setzt man diese in jene ein, so ergeben sich für p_u, q_u, p_v, q_v ganze lineare homogene Funktionen von x_u, x_v, X mit bekannten Koeffizienten. Macht man schließlich darin noch die Substitutionen (7), so gehen für p_u, q_u, p_v, q_v ganze lineare homogene Funktionen von p, q, X mit bekannten Koeffizienten hervor. Wenn man ferner in die in (1) rechtsstehenden Werte von X_u und X_v die Ausdrücke (7) einsetzt, ergeben sich für X_u und X_v ganze lineare homogene Funktionen von p, q mit bekannten Koeffizienten. Demnach hat das gesuchte neue Gleichungensystem die Gestalt:

$$(8)\quad \begin{cases} p_u = U_1 p + V_1 q + W_1 X, & p_v = \bar{U}_1 p + \bar{V}_1 q + \bar{W}_1 X, \\ q_u = U_2 p + V_2 q + W_2 X, & q_v = \bar{U}_2 p + \bar{V}_2 q + \bar{W}_2 X, \\ X_u = U_3 p + V_3 q, & X_v = \bar{U}_3 p + \bar{V}_3 q. \end{cases}$$

Darin sind alle Koeffizienten bekannte Funktionen von u und v.

Aus dem Bestehen der Gleichung (6) zwischen p, q, X läßt sich weiterhin folgern, daß das gesuchte neue Gleichungensystem eine noch einfachere Form hat. Denn durch Differentiation von (6) nach u und v ergibt sich:

$$q p_u + p q_u + 2 X X_u = 0, \quad q p_v + p q_v + 2 X X_v = 0,$$

also nach Einsetzen der Werte (8) und gehöriger Ordnung:

$$(9)\quad \begin{cases} U_2 p^2 + (U_1 + V_2) p q + V_1 q^2 + (W_2 + 2 U_3) p X + (W_1 + 2 V_3) q X = 0, \\ \bar{U}_2 p^2 + (\bar{U}_1 + \bar{V}_2) p q + \bar{V}_1 q^2 + (\bar{W}_2 + 2 \bar{U}_3) p X + (\bar{W}_1 + 2 \bar{V}_3) q X = 0. \end{cases}$$

Dies sind also zwei Gleichungen zwischen p, q, X mit bekannten Koeffizienten, denn die Berechnung der Koeffizienten haben wir ja vorläufig nur aus Gründen der Zweckmäßigkeit noch unterlassen. Nun wissen wir, daß zwischen x_u, x_v, X außer der Gleichung (4) keine bekannte Gleichung besteht, d. h., da wir für x_u und x_v die Werte (7) einsetzen können, daß zwischen p, q, X außer der Gleichung (6) keine bekannte Gleichung besteht. Daher müssen die Gleichungen (9) entweder infolge von (6) gelten oder bloß Identitäten sein. Das erstere ist jedoch ausgeschlossen, weil die Gleichungen (9) in p, q, X homogen sind, während die Gleichung (6) nicht homogen ist. Mithin sind die Gleichungen (9) bloß Identitäten, d. h. es ist:

$$\begin{array}{lllll} U_2 = 0, & U_1 + V_2 = 0, & V_1 = 0, & W_2 + 2 U_3 = 0, & W_1 + 2 V_3 = 0, \\ \bar{U}_2 = 0, & \bar{U}_1 + \bar{V}_2 = 0, & \bar{V}_1 = 0, & \bar{W}_2 + 2 \bar{U}_3 = 0, & \bar{W}_1 + 2 \bar{V}_3 = 0. \end{array}$$

Wenn V_3, U_1, U_3 mit A, B, C und $\bar{V}_3$, $\bar{U}_1$, $\bar{U}_3$ mit $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ bezeichnet werden, kommt also $W_1 = -2A$, $V_2 = -B$, $W_2 = -2C$ und $\bar{W}_1 = -2\bar{A}$, $\bar{V}_2 = -\bar{B}$, $\bar{W}_2 = -2\bar{C}$, während alle übrigen Koeffizienten gleich Null sind. Mithin nimmt das System (8) die einfachere Gestalt an:

$$(10) \quad \begin{cases} p_u = Bp - 2AX, & p_v = \bar{B}p - 2\bar{A}X, \\ q_u = -Bq - 2CX, & q_v = -\bar{B}q - 2\bar{C}X, \\ X_u = Cp + Aq, & X_v = \bar{C}p + \bar{A}q. \end{cases}$$

Unser zweiter Schritt besteht in der wirklichen Ausrechnung der sechs hierin vorkommenden Größen A, B, C und $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$. Wenn in den in (1) rechts stehenden Gleichungen für λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 die unter (2) angegebenen Werte sowie für x_u und x_v die Werte (7) eingesetzt werden, kommt wegen $D^2 = EG - F^2$:

$$X_u = \frac{EM - (F - iD)L}{2D\sqrt{E}}\,p + \frac{EM - (F + iD)L}{2D\sqrt{E}}\,q,$$

$$X_v = \frac{EN - (F - iD)M}{2D\sqrt{E}}\,p + \frac{EN - (F + iD)M}{2D\sqrt{E}}\,q.$$

Nach (10) haben aber X_u und X_v die Werte $Cp + Aq$ und $\bar{C}p + \bar{A}q$. Also ist:

$$(11) \quad \begin{cases} A = \dfrac{EM - (F + iD)L}{2D\sqrt{E}}, & \bar{A} = \dfrac{EN - (F + iD)M}{2D\sqrt{E}}, \\ C = \dfrac{EM - (F - iD)L}{2D\sqrt{E}}, & \bar{C} = \dfrac{EN - (F - iD)M}{2D\sqrt{E}}. \end{cases}$$

Nach der ersten Gleichung (7) ist ferner:

$$p_u - q_u = 2i\frac{\partial}{\partial u}\frac{x_u}{\sqrt{E}}, \quad p_v - q_v = 2i\frac{\partial}{\partial v}\frac{x_u}{\sqrt{E}}.$$

Andererseits ist nach (10):

$$p_u - q_u = B(p + q) - 2(A - C)X, \qquad p_v - q_v = \bar{B}(p + q) - 2(\bar{A} - \bar{C})X.$$

Mithin wird

$$B(p+q) = 2(A - C)X + 2i\frac{\partial}{\partial u}\frac{x_u}{\sqrt{E}}, \quad \bar{B}(p+q) = 2(\bar{A} - \bar{C})X + 2i\frac{\partial}{\partial v}\frac{x_u}{\sqrt{E}}.$$

Führen wir hierin die aus (11) zu entnehmenden Werte von $A - C$ und $\bar{A} - \bar{C}$ ein, so erhalten wir:

$$B(p+q) = -2i\frac{L}{\sqrt{E}}X + 2i\frac{\partial}{\partial u}\frac{x_u}{\sqrt{E}}, \quad \bar{B}(p+q) = -2i\frac{M}{\sqrt{E}}X + 2i\frac{\partial}{\partial v}\frac{x_u}{\sqrt{E}}.$$

Führen wir hierin die Differentiationen aus, setzen wir ferner aus (1) die Werte von x_{uu}, x_{uv}, aus (2) die von φ_1, ψ_1, φ_2, ψ_2 und schließ-

lich aus (5) den Wert von $p + q$ ein, so gehen in x_u und x_v lineare homogene Gleichungen hervor. Durch Vergleichung der Koeffizienten von x_u und x_v auf beiden Seiten bekommen wir dann:

$$(12) \qquad B = i\,\frac{E_u F + E_v E - 2F_u E}{2DE}, \qquad \bar{B} = i\,\frac{E_v F - G_u E}{2DE}\,.$$

Nachdem wir somit das neue Gleichungensystem (10), dem die Funktionen p, q, X genügen müssen, vollständig berechnet haben, können wir abermals eine Vereinfachung erreichen. Infolge von (6) lassen sich nämlich alle drei Größen p, q, X durch nur zwei Größen ausdrücken. Als diese wählen wir

$$(13) \qquad \xi = \frac{p}{1 - X}, \qquad \eta = -\frac{p}{1 + X}\,.$$

Man findet dann wegen (6):

$$p = -\frac{2\xi\eta}{\xi - \eta}, \qquad q = \frac{2}{\xi - \eta}, \qquad X = \frac{\xi + \eta}{\xi - \eta}\,.$$

Da ferner x_u und x_v die Funktionen (7) von p, q, X sind, ergibt sich:

$$x_u = i\sqrt{E}\,\frac{1 + \xi\eta}{\xi - \eta}, \qquad x_v = i\,\frac{F}{\sqrt{E}}\,\frac{1 + \xi\eta}{\xi - \eta} - \frac{D}{\sqrt{E}}\,\frac{1 - \xi\eta}{\xi - \eta}\,.$$

Nun muß noch festgestellt werden, welchen Bedingungen die Größen ξ und η zu genügen haben. Nach (13) ist:

$$\xi_u = \frac{(1 - X)p_u + pX_u}{(1 - X)^2}, \qquad \eta_u = \frac{-(1 + X)p_u + pX_u}{(1 + X)^2}\,.$$

Hieraus geht durch Einführung der Werte von p_u und X_u aus (10) hervor:

$$\xi_u = A\,\frac{pq - 2X(1 - X)}{(1 - X)^2} + B\,\frac{p}{1 - X} + C\,\frac{p^2}{(1 - X)^2},$$

$$\eta_u = A\,\frac{pq + 2X(1 + X)}{(1 + X)^2} - B\,\frac{p}{1 + X} + C\,\frac{p^2}{(1 + X)^2}\,.$$

Da aber pq nach (6) gleich $1 - X^2$ ist, sind die Faktoren von A gleich 1. Wegen (13) ergibt sich also:

$$\xi_u = A + B\xi + C\xi^2, \qquad \eta_u = A + B\eta + C\eta^2.$$

Ganz entsprechend kommt:

$$\xi_v = \bar{A} + \bar{B}\xi + \bar{C}\xi^2, \qquad \eta_v = \bar{A} + \bar{B}\eta + \bar{C}\eta^2.$$

Die gesuchten Funktionen x_u, x_v, X von u und v lassen sich also in der Form

$$x_u = i\sqrt{E}\,\frac{1 + \xi\eta}{\xi - \eta}, \qquad x_v = i\,\frac{F}{\sqrt{E}}\,\frac{1 + \xi\eta}{\xi - \eta} - \frac{D}{\sqrt{E}}\,\frac{1 - \xi\eta}{\xi - \eta},$$

$$X = \frac{\xi + \eta}{\xi - \eta}$$

als Funktionen zweier Größen ξ und η darstellen, und das Gleichungensystem

$$\sigma_u = A + B\sigma + C\sigma^2, \quad \sigma_v = \bar{A} + \bar{B}\sigma + \bar{C}\sigma^2$$

muß durch $\sigma = \xi$ und durch $\sigma = \eta$ erfüllt werden.

Das vorgelegte Gleichungensystem (1) gilt nun auch noch dann, wenn man darin die Zeichen x und X durch y und Y oder durch z und Z ersetzt. Deshalb sind statt des einen Funktionenpaares ξ, η drei Funktionenpaare zu benutzen, die dem für σ aufgestellten System zu genügen haben. Diese Paare seien $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3$; die bisher ξ, η genannten Größen bezeichnen wir also von jetzt an mit ξ_1, η_1. Nun sind unsere Ergebnisse diese:

Die gesuchten Funktionen

$$x_u, x_v, X, \quad y_u, y_v, Y, \quad z_u, z_v, Z$$

lassen sich mittels dreier Funktionenpaare

$$\xi_1, \eta_1, \quad \xi_2, \eta_2, \quad \xi_3, \eta_3$$

so darstellen:

$$(14) \quad \begin{cases} x_u = i\sqrt{E}\,\dfrac{1+\xi_1\eta_1}{\xi_1-\eta_1}, & x_v = i\dfrac{F}{\sqrt{E}}\dfrac{1+\xi_1\eta_1}{\xi_1-\eta_1} - \dfrac{D}{\sqrt{E}}\dfrac{1-\xi_1\eta_1}{\xi_1-\eta_1}, \\ y_u = i\sqrt{E}\,\dfrac{1+\xi_2\eta_2}{\xi_2-\eta_2}, & y_v = i\dfrac{F}{\sqrt{E}}\dfrac{1+\xi_2\eta_2}{\xi_2-\eta_2} - \dfrac{D}{\sqrt{E}}\dfrac{1-\xi_2\eta_2}{\xi_2-\eta_2}, \\ z_u = i\sqrt{E}\,\dfrac{1+\xi_3\eta_3}{\xi_3-\eta_3}, & z_v = i\dfrac{F}{\sqrt{E}}\dfrac{1+\xi_3\eta_3}{\xi_3-\eta_3} - \dfrac{D}{\sqrt{E}}\dfrac{1-\xi_3\eta_3}{\xi_3-\eta_3}, \end{cases}$$

$$(15) \quad X = \frac{\xi_1+\eta_1}{\xi_1-\eta_1}, \quad Y = \frac{\xi_2+\eta_2}{\xi_2-\eta_2}, \quad Z = \frac{\xi_3+\eta_3}{\xi_3-\eta_3}.$$

Dabei sind die sechs Funktionen $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3$ der Bedingung zu unterwerfen, daß jede von ihnen, für σ eingesetzt, das Gleichungensystem

$$(16) \quad \sigma_u = A + B\sigma + C\sigma^2, \quad \sigma_v = \bar{A} + \bar{B}\sigma + \bar{C}\sigma^2$$

befriedige, worin die Koeffizienten sind:

$$(17) \quad \begin{cases} A = \dfrac{EM-(F+iD)L}{2D\sqrt{E}}, & \bar{A} = \dfrac{EN-(F+iD)M}{2D\sqrt{E}}, \\ B = i\dfrac{E_uF+E_vE-2F_uE}{2DE}, & \bar{B} = i\dfrac{E_vF-G_uE}{2DE}, \\ C = \dfrac{EM-(F-iD)L}{2D\sqrt{E}}, & \bar{C} = \dfrac{EN-(F-iD)M}{2D\sqrt{E}}. \end{cases}$$

Von der allgemeinen Beschaffenheit derjenigen Funktionen σ, die das System (16) befriedigen, soll erst im nächsten Paragraphen die Rede sein. Wir wollen aber hier die Frage beantworten, wie man aus der Gesamtheit aller Funktionen σ, die diesem System genügen, die in den Formeln (14) und (15) zu benutzenden drei Funktionen $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3$ auszuwählen hat. Dies muß so geschehen, daß infolge von (14) und (15) die Gleichungen bestehen:

$$(18) \qquad \mathsf{S}\, x_u^2 = E, \quad \mathsf{S}\, x_u x_v = F, \quad \mathsf{S}\, x_v^2 = G,$$

$$(19) \qquad \mathsf{S}\, X^2 = 1, \quad \mathsf{S}\, X x_u = 0, \quad \mathsf{S}\, X x_v = 0,$$

$$(20) \qquad \begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix} = D.$$

Denn dann sind E, F, G in der Tat die Fundamentalgrößen erster Ordnung sowie X, Y, Z die Richtungskosinus der Flächennormale in der angenommenen Orientierung und schließlich auch, wie auf S. 346 gezeigt wurde, L, M, N die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung. Diese Bedingungen sind nun als Bedingungen für die sechs Funktionen $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3$ auszudrücken. Setzen wir zur Abkürzung

$$(21) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_1 = \dfrac{1 - \xi_1 \eta_1}{\xi_1 - \eta_1}, & \mathfrak{Y}_1 = \dfrac{1 - \xi_2 \eta_2}{\xi_2 - \eta_2}, & \mathfrak{Z}_1 = \dfrac{1 - \xi_3 \eta_3}{\xi_3 - \eta_3}, \\[2ex] \mathfrak{X}_2 = i\dfrac{1 + \xi_1 \eta_1}{\xi_1 - \eta_1}, & \mathfrak{Y}_2 = i\dfrac{1 + \xi_2 \eta_2}{\xi_2 - \eta_2}, & \mathfrak{Z}_2 = i\dfrac{1 + \xi_3 \eta_3}{\xi_3 - \eta_3}, \end{cases}$$

so ergibt sich durch Einsetzen der Werte (14) in die erste Bedingung (18) sofort $\mathsf{S}\, \mathfrak{X}_2^2 = 1$, daher gibt die zweite $\mathsf{S}\, \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 = 0$ und wegen $D^2 = EG - F^2$ die dritte $\mathsf{S}\, \mathfrak{X}_1^2 = 1$. Demnach ist zu fordern:

$$\mathsf{S}\, \mathfrak{X}_1^2 = 1, \quad \mathsf{S}\, \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 = 0, \quad \mathsf{S}\, \mathfrak{X}_2^2 = 1.$$

Ferner ergeben die Bedingungen (19) durch Einsetzen der Werte (14):

$$\mathsf{S}\, X^2 = 1, \quad \mathsf{S}\, X \mathfrak{X}_1 = 0, \quad \mathsf{S}\, X \mathfrak{X}_2 = 0,$$

und aus (20) geht hervor:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_2 & X \\ \mathfrak{Y}_1 & \mathfrak{Y}_2 & Y \\ \mathfrak{Z}_1 & \mathfrak{Z}_2 & Z \end{vmatrix} = 1.$$

Dies bedeutet: Die drei Funktionentripel

$$\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1, \quad \mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2, \quad X, Y, Z$$

müssen die Richtungskosinus dreier zueinander senkrechter Richtungen sein, die so zueinander orientiert sind wie die Koordinatenachsen. Wenn man nun die Ausdrücke (21) und (15) dieser drei Funktionentripel beachtet, erkennt man, daß dieselbe Frage vorliegt wie in I S. 293, wo unter (20) die Funktionentripel mit

$$\alpha, \beta, \gamma, \quad l, m, n, \quad \lambda, \mu, \nu$$

bezeichnet worden waren. Deshalb ergibt sich wie in I S. 294 u. f.:

Man hat dafür zu sorgen, daß erstens je zwei der drei Funktionenpaare

$$\xi_1, \eta_1, \quad \xi_2, \eta_2, \quad \xi_3, \eta_3$$

harmonisch voneinander getrennt werden und zweitens die Gleichung

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_2 & X \\ \mathfrak{Y}_1 & \mathfrak{Y}_2 & Y \\ \mathfrak{Z}_1 & \mathfrak{Z}_2 & Z \end{vmatrix} = 1$$

besteht. Außerdem müssen alle sechs Funktionen, statt σ eingesetzt, den beiden Gleichungen (16) genügen.

§ 9. Gleichungen einer Fläche mit gegebenen Fundamentalgrößen.[1]

Soeben wurden alle diejenigen Forderungen zusammengefaßt, die an die sechs Funktionen ξ_1, η_1, ξ_2, η_2, ξ_3, η_3 gestellt werden müssen. Die Hauptforderung ist die, daß diese Funktionen, für σ eingesetzt, den beiden Gleichungen

$$(1) \qquad \sigma_u = A + B\sigma + C\sigma^2, \quad \sigma_v = \bar{A} + \bar{B}\sigma + \bar{C}\sigma^2$$

genügen müssen, wo A, B, C und $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ nach (17), S. 401, bekannte Funktionen von u und v bedeuten. Hier liegt ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für eine Funktion σ von u und v vor. Man kann beide Gleichungen wegen

$$d\sigma = \sigma_u du + \sigma_v dv$$

in einer einzigen sogenannten totalen Differentialgleichung zusammenfassen:

$$(2) \qquad d\sigma = (A + B\sigma + C\sigma^2) du + (\bar{A} + \bar{B}\sigma + \bar{C}\sigma^2) dv$$

[1] Vgl. die Anm. zu S. 393.

oder

$$d\sigma = A\,du + \bar{A}\,dv + \sigma(B\,du + \bar{B}\,dv) + \sigma^2(C\,du + \bar{C}\,dv)$$

deren rechte Seite in Hinsicht auf σ selbst eine ganze quadratische Funktion ist. Man nennt die Gleichung (2) deshalb eine totale Riccatische Differentialgleichung, indem man die Bezeichnung in I S. 291 verallgemeinert.

Die Gleichung (2) ist nur eine Zusammenfassung der beiden Gleichungen (1); aus ihnen kann man σ_{uv} auf zwei Arten berechnen, denn die erste gibt durch Differentiation nach v:

$$\sigma_{uv} = A_v + B_v\sigma + C_v\sigma^2 + (B + 2C\sigma)\sigma_v$$

und die zweite durch Differentiation nach u:

$$\sigma_{uv} = \bar{A}_u + \bar{B}_u\sigma + \bar{C}_u\sigma^2 + (\bar{B} + 2\bar{C}\sigma)\sigma_u.$$

Setzt man in die erste Formel den Wert von σ_v aus der zweiten Gleichung (1) und in die zweite Formel den Wert von σ_u aus der ersten Gleichung (1) ein, so ergibt sich schließlich durch Gleichsetzen beider Ausdrücke für σ_{uv} eine Gleichung zweiten Grades für σ:

$$\begin{aligned}(A_v - \bar{A}_u + B\bar{A} - \bar{B}A)& \\ + (B_v - \bar{B}_u + 2C\bar{A} - 2\bar{C}A)\sigma& \\ + (C_v - \bar{C}_u + C\bar{B} - \bar{C}B)\sigma^2 &= 0.\end{aligned}$$

Man hat nun zu bedenken, daß es nach Satz 25, S. 392, feststeht, daß unendlich viele Flächen mit den vorgeschriebenen Fundamentalgrößen E, F, G und L, M, N vorhanden sind, so daß es auch sicher unendlich viele Funktionen ξ und η geben muß, die den beiden Gleichungen (1) für σ Genüge leisten. Deshalb kann die soeben für σ gefundene quadratische Gleichung erstens keine Widersprüche enthalten und zweitens nicht σ bestimmen; sie muß vielmehr eine Identität sein, d. h. es steht fest, daß die bekannten Funktionen A, B, C und $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ von u und v, die durch (17), S. 401, definiert werden, die drei Gleichungen

$$(3)\quad \begin{cases} A_v - \bar{A}_u + B\bar{A} - \bar{B}A = 0, \\ B_v - \bar{B}_u + 2C\bar{A} - 2\bar{C}A = 0, \\ C_v - \bar{C}_u + C\bar{B} - \bar{C}B = 0 \end{cases}$$

befriedigen. Natürlich kann man dies durch die Ausrechnung bestätigen. Dabei kommt man, nebenbei bemerkt, wieder zu den drei Fundamentalgleichungen, deren Erfülltsein wir ja in der Tat vorausgesetzt hatten.

Weil nun das System (1) durch Gleichsetzen der beiden daraus zu ziehenden Ausdrücke für σ_{uv} keine Bedingungen für σ, sondern

bloß eine Identität liefert, heißt das System (1) **unbeschränkt integrabel**. Dementsprechend nennt man (2) eine **unbeschränkt integrabele totale Riccatische Differentialgleichung** für die Funktion σ von u und v.

Die Aufgabe, alle Funktionen σ zu bestimmen, die dieser totalen Differentialgleichung Genüge leisten, kann man nun zurückführen auf die Aufgabe, alle Lösungen einer gewissen gewöhnlichen Riccatischen Differentialgleichung zu bestimmen. Um dies am anschaulichsten zu begründen, wollen wir vorübergehend eine geometrische Deutung vornehmen: Unter u, v, w seien rechtwinklige Punktkoordinaten verstanden. Ist nun eine Funktion σ von u und v vorhanden, die der Gleichung (2) Genüge leistet, so stellt $w = \sigma(u, v)$ eine gewisse Fläche dar.[1] Sie wäre vollkommen bekannt, wenn man ihre Schnittkurven mit allen denjenigen Ebenen kennen würde, die durch eine bestimmte Parallele zur dritten Achse, der w-Achse, gehen. Denn wenn die Fläche diese Parallele etwa an der Stelle mit der w-Koordinate $w = c$ schneidet, werden alle jene Kurven von diesem Punkte ausgehen und in ihrer Gesamtheit wieder die Fläche ausmachen. Nun aber ist es leicht, die Differentialgleichung der Schnittkurven zu finden. Denn wenn die gewählte Parallele zur w-Achse etwa durch den Punkt ($u = u_0$, $v = v_0$) der uv-Ebene geht, wird eine Ebene des zu benutzenden Ebenenbüschels bestimmt durch eine Gleichung

$$\frac{v - v_0}{u - u_0} = a,$$

wo a eine Konstante ist. Deshalb setzen wir in $\sigma(u, v)$ und in der totalen Differentialgleichung (2) für v die in u lineare Funktion

$$v = v_0 + a(u - u_0) \tag{4}$$

ein, so daß $dv = a\,du$ wird. Bezeichnen wir die dabei aus $\sigma(u, v)$ hervorgehende Funktion von u allein, nämlich

$$\sigma\left(u, v_0 + a(u - u_0)\right),$$

mit $\tau(u)$, so erhalten wir statt (2) die Gleichung:

$$d\tau = [(A + B\tau + C\tau^2) + a(\bar{A} + \bar{B}\tau + \bar{C}\tau^2)]\,du$$

oder also

$$\frac{d\tau}{du} = (A + a\bar{A}) + (B + a\bar{B})\tau + (C + a\bar{C})\tau^2. \tag{5}$$

[1] Da wir uns hier nur gelegentlich einer geometrischen Veranschaulichung der Veränderlichen u und v bedienen, hat diese Fläche natürlich gar nichts mit derjenigen Fläche zu tun, nach deren Bestimmung wir in dem vorigen und diesem Paragraphen streben.

Dabei hat man natürlich auch in A, B, C und $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ überall für v die lineare Funktion (4) von u einzusetzen. Man sieht, daß dann die Gleichung (5) die Form

$$\frac{d\tau}{du} = U(u, a) + V(u, a)\tau + W(u, a)\tau^2 \tag{6}$$

annimmt, worin U, V, W bekannte Funktionen von u sind, die außerdem noch von der Konstante a abhängen. Dies aber ist eine gewöhnliche Riccatische Differentialgleichung, nach I S. 291. Insbesondere sei nun τ diejenige Lösung von (6), die für $u = v_0$ den bestimmt angenommenen Wert c bekommt. Sie wird, weil die Koeffizienten in (6) noch a enthalten, eine Funktion von u und a sein, etwa $\tau(u, a)$. Alsdann stellt $w = \tau(u, a)$ diejenige Kurve in der angenommenen Ebene dar, die für $u = u_0$ die Koordinate $w = c$ hat. Lassen wir nun die Konstante a willkürlich, so stellen die Gleichungen

$$w = \tau(u, a), \qquad v = v_0 + a(u - u_0)$$

zusammen in u, v, w alle diejenigen Kurven dar, in denen die Fläche $w = \sigma(u, v)$ durch alle Ebenen jenes Ebenenbüschels geschnitten wird, dessen Achse die Parallele zur z-Achse ($u = u_0$, $v = v_0$) ist. Zu jeder einzelnen Ebene der Büschels gehört ein bestimmter Wert von a. Wenn man nun a aus den beiden letzten Gleichungen eliminiert, geht

$$w = \tau\left(u, \frac{v - v_0}{u - u_0}\right)$$

als die Gleichung der Fläche hervor, d. h. es ist die gesuchte Funktion

$$\sigma(u, v) = \tau\left(u, \frac{v - v_0}{u - u_0}\right).$$

So kann man also durch Integration der gewöhnlichen Riccatischen Differentialgleichung (5) oder (6), deren Koeffizienten allerdings noch eine willkürliche Konstante a enthalten, alle Lösungen σ der totalen Riccatischen Differentialgleichung (2) gewinnen.

Das Wertepaar u_0, v_0 kann man natürlich bequem wählen, z. B. kann man beide Werte gleich Null annehmen, also die Fläche $w = \sigma(u, v)$ mit allen Ebenen durch die w-Achse schneiden. Aber zuweilen ist dann das Verfahren nicht durchführbar, z. B. nicht, wenn die w-Achse die Fläche erst für $\lim w = \infty$ schneidet.

Das angegebene sogenannte Schnittverfahren[1] zur Integration der unbeschränkt integrabeln totalen Riccatischen

[1] Es wurde, zugleich für allgemeinere Fälle, von du Bois-Reymond eingeführt. Siehe seine „Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln", 1. (einziges) Heft, Leipzig 1864.

Differentialgleichung (2) sei durch ein einfaches Beispiel erläutert:

Beispiel: Die vorgelegte totale Differentialgleichung (2) sei etwa diese:

$$d\sigma = \frac{v\sigma - \sigma^2}{1 - uv}\,du + \frac{1 - u\sigma}{1 - uv}\,dv. \tag{7}$$

Hier ist:

$$A = 0, \quad B = \frac{v}{1 - uv}, \quad C = -\frac{1}{1 - uv},$$

$$\bar{A} = \frac{1}{1 - uv}, \quad \bar{B} = -\frac{u}{1 - uv}, \quad \bar{C} = 0.$$

Man überzeuge sich davon, daß die Bedingungen (3) erfüllt sind, also eine unbeschränkt integrabele totale Differentialgleichung vorliegt. Wir wählen insbesondere $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ und setzen daher in Gemäßheit von (4) für v den Wert au, also auch $dv = a\,du$. Wie in der vorgetragenen allgemeinen Theorie sei σ alsdann mit τ bezeichnet. Dann kommt als Gleichung (5):

$$\frac{d\tau}{du} = \frac{a}{1 - au^2} - \frac{1}{1 - au^2}\tau^2.$$

Hierfür kann man schreiben:

$$\frac{d\tau}{\tau^2 - a} = \frac{du}{au^2 - 1},$$

so daß sich durch Integration ergibt:

$$\log\frac{\tau - \sqrt{a}}{\tau + \sqrt{a}} = \log\frac{u\sqrt{a} - 1}{u\sqrt{a} + 1} + \text{konst.}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\tau - \sqrt{a}}{\tau + \sqrt{a}} = C\,\frac{u\sqrt{a} - 1}{u\sqrt{a} + 1},$$

wo C eine zunächst beliebig wählbare Konstante bedeutet. Nun aber soll $\tau = c$ für $u = u_0$, d. h. hier für $u = 0$ sein. Deshalb ist C so anzunehmen, daß

$$\frac{c - \sqrt{a}}{c + \sqrt{a}} = -C$$

wird. Mithin kommt:

$$\frac{\tau - \sqrt{a}}{\tau + \sqrt{a}} = \frac{c - \sqrt{a}}{c + \sqrt{a}}\,\frac{1 - u\sqrt{a}}{1 + u\sqrt{a}},$$

woraus man berechnet:

$$\tau = \frac{c + au}{1 + cu}.$$

Schließlich geht hieraus σ hervor, wenn man wieder wegen $v = au$ rückwärts $a = v:u$ einsetzt. Demnach ist

$$\sigma = \frac{c + v}{1 + cu} \tag{8}$$

die allgemeine Lösung der vorgelegten totalen Gleichung (7). Wir überlassen es dem Leser, dies durch Einsetzen in (7) zu bestätigen.

Die unbeschränkt integrabele totale Riccatische Differentialgleichung (2) für σ hat noch eine bemerkenswerte Eigenschaft: Sind nämlich P, Q und R drei spezielle Funktionen von u und v, die,

für σ eingesetzt, die Gleichung (2) oder, was dasselbe ist, das Gleichungenpaar (1) befriedigen, während σ irgend eine Funktion von u und v bedeutet, die dasselbe tut, so beweist man wie in I S. 291 u. f., daß die partiellen Ableitungen des Doppelverhältnisses

$$\frac{\sigma - P}{\sigma - R} : \frac{Q - P}{Q - R}$$

nach u und v gleich Null sind, so daß das Doppelverhältnis konstant ist. Daraus schließt man weiterhin wie damals, daß die allgemeinste Lösung σ der totalen Riccatischen Differentialgleichung (2) eine willkürliche Konstante c derart enthält, daß sie eine gebrochene lineare Funktion hinsichtlich c ist, wie es ja in der Tat in dem Beispiele, siehe (8), der Fall war.

Unsere Ergebnisse bezüglich der Gleichung (2) fassen wir nun zusammen:

Satz 26: Die Aufgabe, alle Funktionen σ von u und v zu ermitteln, die einer vorgelegten unbeschränkt integrabeln totalen Riccatischen Differentialgleichung

$$d\sigma = [A(u,v) + B(u,v)\sigma + C(u,v)\sigma^2]\,du + [\bar{A}(u,v) + \bar{B}(u,v)\sigma + \bar{C}(u,v)\sigma^2]\,dv$$

genügen, kommt zurück auf die Aufgabe, alle Lösungen τ einer gewissen gewöhnlichen Riccatischen Differentialgleichung

$$\frac{d\tau}{du} = U(u,a) + V(u,a)\tau + W(u,a)\tau^2$$

zu ermitteln, deren Koeffizienten noch eine willkürliche Konstante a enthalten. Ferner enthält die allgemeinste Lösung σ der totalen Gleichung eine willkürliche Konstante c, hinsichtlich derer sie eine gebrochene lineare Funktion ist; sie hat also allgemein die Form

$$\sigma = \frac{p(u,v)\,c + q(u,v)}{\pi(u,v)\,c + \varkappa(u,v)},$$

worin $p, q, \pi, \varkappa$ gewisse von der willkürlichen Konstanten c freie Funktionen von u und v bedeuten.

Nachdem wir so Klarheit über die Art der Gewinnung der Lösungen σ der totalen Riccatischen Differentialgleichung (2) und über die allgemeine Gestalt dieser Lösungen gewonnen haben, kehren wir zu unserem eigentlichen Probleme zurück, nämlich zu der Aufgabe, eine Fläche mit den vorgeschriebenen Fundamentalgrößen E, F, G und L, M, N zu bestimmen. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, wir hätten die allgemeine Lösung

(9) $$\sigma = \frac{p(u,v)\,c + q(u,v)}{\pi(u,v)\,c + \varkappa(u,v)}$$

von (2) gefunden. Nach den Schlußbemerkungen des vorigen Paragraphen geben wir nun der Konstanten c sechs Werte

$$a_1, b_1, \quad a_2, b_2, \quad a_3, b_3$$

und setzen an:

(10) $$\begin{cases} \xi_1 = \dfrac{p\,a_1 + q}{\pi\,a_1 + \varkappa}, & \xi_2 = \dfrac{p\,a_2 + q}{\pi\,a_2 + \varkappa}, & \xi_3 = \dfrac{p\,a_3 + q}{\pi\,a_3 + \varkappa}, \\ \eta_1 = \dfrac{p\,b_1 + q}{\pi\,b_1 + \varkappa}, & \eta_2 = \dfrac{p\,b_2 + q}{\pi\,b_2 + \varkappa}, & \eta_3 = \dfrac{p\,b_3 + q}{\pi\,b_3 + \varkappa}. \end{cases}$$

Die Konstanten $a_1, b_1,\ a_2, b_2,\ a_3, b_3$ müssen weiterhin so gewählt werden, daß je zwei der drei Funktionenpaare

$$\xi_1, \eta_1, \quad \xi_2, \eta_2, \quad \xi_3, \eta_3$$

das harmonische Doppelverhältnis haben. Wie in I S. 294 ist dazu notwendig und hinreichend, daß je zwei der drei Konstantenpaare

$$a_1, b_1, \quad a_2, b_2, \quad a_3, b_3$$

das harmonische Doppelverhältnis haben. Dies ist z. B. der Fall, wenn man annimmt:

(11) $$a_1 = 0,\ b_1 = \infty, \quad a_2 = 1,\ b_2 = -1, \quad a_3 = -i,\ b_3 = i,$$

also statt (10) im besonderen setzt:

(12) $$\begin{cases} \xi_1 = \dfrac{q}{\varkappa}, & \xi_2 = \dfrac{p+q}{\pi+\varkappa}, & \xi_3 = \dfrac{p+iq}{\pi+i\varkappa}, \\ \eta_1 = \dfrac{p}{\pi}, & \eta_2 = \dfrac{p-q}{\pi-\varkappa}, & \eta_3 = \dfrac{p-iq}{\pi-i\varkappa}. \end{cases}$$

Schließlich ist nur noch dafür Sorge zu tragen, daß die Determinante (22), S. 403, gleich $+1$ wird. Wie in I S. 294 u. f. zeigt man, daß dies der Fall ist, sobald

$$\frac{-2i \begin{vmatrix} 1 & a_1 + b_1 & a_1 b_1 \\ 1 & a_2 + b_2 & a_2 b_2 \\ 1 & a_3 + b_3 & a_3 b_3 \end{vmatrix}}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)}$$

gleich $+1$ wird. Setzen wir hierin zunächst nur die beiden letzten Wertepaare (11) ein, so wird der Ausdruck gleich

$$-\frac{a_1 + b_1}{a_1 - b_1}.$$

Da nun nach (11) außerdem $a_1 = 0$, $b_1 = \infty$ gesetzt wird, ist er in der Tat gleich $+1$. Somit sind nun alle Forderungen befriedigt.

Infolge von (12) wird:

$$\frac{1+\xi_1\eta_1}{\xi_1-\eta_1} = \frac{\pi\varkappa + pq}{\pi q - \varkappa p}; \qquad \frac{1-\xi_1\eta_1}{\xi_1-\eta_1} = \frac{\pi\varkappa - pq}{\pi q - \varkappa p},$$

$$\frac{1+\xi_2\eta_2}{\xi_2-\eta_2} = \frac{\pi^2 - \varkappa^2 + p^2 - q^2}{2(\pi q - \varkappa p)}, \qquad \frac{1-\xi_2\eta_2}{\xi_2-\eta_2} = \frac{\pi^2 - \varkappa^2 - p^2 + q^2}{2(\pi q - \varkappa p)},$$

$$\frac{1+\xi_3\eta_3}{\xi_3-\eta_3} = \frac{\pi^2 + \varkappa^2 + p^2 + q^2}{2i(\pi q - \varkappa p)}, \qquad \frac{1-\xi_3\eta_3}{\xi_3-\eta_3} = \frac{\pi^2 + \varkappa^2 - p^2 - q^2}{2i(\pi q - \varkappa p)}.$$

Nun können wir nach (14), S. 401, auch die vollständigen Differentiale

$$x_u\,du + x_v\,dv, \quad y_u\,du + y_v\,dv, \quad z_u\,du + z_v\,dv$$

der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z der gesuchten Fläche angeben. Es kommt:

$$(13)\quad \begin{cases} dx = \displaystyle\int \frac{i(\pi\varkappa + pq)(E\,du + F\,dv) - (\pi\varkappa - pq)D\,dv}{\sqrt{E}\,(\pi q - \varkappa p)}, \\ dy = \displaystyle\int \frac{i(\pi^2 - \varkappa^2 + p^2 - q^2)(E\,du + F\,dv) - (\pi^2 - \varkappa^2 - p^2 + q^2)D\,dv}{2\sqrt{E}(\pi q - \varkappa p)}, \\ dz = \displaystyle\int \frac{(\pi^2 + \varkappa^2 + p^2 + q^2)(E\,du + F\,dv) + i(\pi^2 + \varkappa^2 - p^2 - q^2)D\,dv}{2\sqrt{E}(\pi q - \varkappa p)}. \end{cases}$$

Aus diesen Werten findet man schließlich durch Quadraturen die Koordinaten x, y, z der Punkte der gesuchten Fläche als Funktionen von u und v. Damit ist unser Problem erledigt. Aber ehe wir das Ergebnis als Satz formulieren, muß noch ein Umstand beachtet werden: Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen setzten voraus, daß die Fundamentalgröße E nicht identisch gleich Null sei, wie damals zu Anfang, nämlich auf S. 394, ausdrücklich hervorgehoben worden war. Ist nun zunächst $E = 0$, aber $G \neq 0$, so kann man natürlich durch Vertauschen der Parameter doch wieder zu dem Falle $E = 0$ kommen. Nur wenn zugleich $E = 0$ und $G = 0$ ist, versagt das in dem vorigen und in diesem Paragraphen vorgetragene Verfahren. Nach Satz 14, S. 44, ist dies der Fall, wo alle Parameterlinien (u) und (v) Minimalkurven sind. Wie er zu behandeln ist, soll nachher gezeigt werden. Vorher formulieren wir unsere Ergebnisse so:

Satz 27: Sind E, F, G und L, M, N solche gegebene Funktionen von zwei Veränderlichen u und v, die den drei Fundamentalgleichungen genügen und für die D oder $\sqrt{EG - F^2}$ nicht identisch verschwindet, und sind E und G nicht beide identisch gleich Null, ist also etwa $E \neq 0$, so

wird eine Fläche mit den Parametern u und v, die E, F, G und L, M, N zu Fundamentalgrößen hat, dargestellt durch die Formeln:

$$x = \int \frac{i(\pi\varkappa + pq)(E\,du + F\,dv) - (\pi\varkappa - pq)D\,dv}{\sqrt{E}(\pi q - \varkappa p)},$$

$$y = \int \frac{i(\pi^2 - \varkappa^2 + p^2 - q^2)(E\,du + F\,dv) - (\pi^2 - \varkappa^2 - p^2 + q^2)D\,dv}{2\sqrt{E}(\pi q - \varkappa p)},$$

$$z = \int \frac{(\pi^2 + \varkappa^2 + p^2 + q^2)(E\,du + F\,dv) + i(\pi^2 + \varkappa^2 - p^2 - q^2)D\,dv}{2\sqrt{E}(\pi q - \varkappa p)}$$

Darin bedeuten $p, q, \pi, \varkappa$ diejenigen Funktionen von u und v, die sich ergeben, wenn man die allgemeine Lösung

$$\sigma = \frac{p(u,v)c + q(u,v)}{\pi(u,v)c + \varkappa(u,v)} \qquad (c = \text{konst.})$$

der unbeschränkt integrabeln totalen Riccatischen Differentialgleichung

$$d\sigma = \left[\frac{EM-(F+iD)L}{2D\sqrt{E}} + i\frac{E_uF + E_vE - 2F_uE}{2DE}\sigma + \frac{EM-(F-iD)L}{2D\sqrt{E}}\sigma^2\right]du$$
$$+ \left[\frac{EN-(F+iD)M}{2D\sqrt{E}} + i\frac{E_vF - G_uE}{2DE}\sigma + \frac{EN-(F-iD)M}{2D\sqrt{E}}\sigma^2\right]dv$$

bestimmt. Die Ermittelung dieser allgemeinen Lösung σ läßt sich auf die Aufgabe zurückführen, die allgemeine Lösung einer gewissen gewöhnlichen Riccatische Differentialgleichung, in der noch eine willkürliche Konstante vorkommt, zu finden. Jede Fläche mit denselben vorgeschriebenen Fundamentalgrößen ist mit der oben angegebenen kongruent, und umgekehrt hat jede mit jener Fläche kongruente Fläche dieselben Fundamentalgrößen, sobald man ihr in homologen Punkten dieselben Parameter u, v zuschreibt und sie entsprechend orientiert.

Wenn dagegen $E = G = 0$ ist, also alle Parameterlinien Minimalkurven sind, kann man so vorgehen: Die zwischen x_u, x_v, X bestehende Gleichung (4) auf S. 395 nimmt jetzt wegen $D^2 = -F^2$ die einfachere Gestalt an:

$$(14) \qquad 2x_u x_v = F(1 - X^2).$$

Nun setzen wir etwa an:

$$p = \frac{2x_v}{\sqrt{2F}}, \quad q = \frac{2x_u}{\sqrt{2F}},$$

so daß wie in (6), S. 397,

$$pq = 1 - X^2$$

ist. Außerdem haben wir jetzt:

(15) $$x_u = \tfrac{1}{2} q \sqrt{2F}, \quad x_v = \tfrac{1}{2} p \sqrt{2F}.$$

Die Überlegungen, die zu dem Gleichungensystem (10), S. 399, führten, bleiben die alten. Nur treten an die Stelle der damals berechneten Funktionen A, B, C und $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ andere. Nach den in (1), S. 393, rechts stehenden Formeln ist nämlich, weil die ebenda unter (2) angegebenen Größen λ_1, μ_1 und λ_2, μ_2 wegen $E = G = 0$ einfacher werden:

$$X_u = -\frac{M x_u + L x_v}{F}, \quad X_v = -\frac{N x_u + M x_v}{F}.$$

Werden hierin die Werte (15) eingesetzt, so kommt:

$$X_u = -\frac{Mq + Lp}{\sqrt{2F}}, \quad X_v = -\frac{Nq + Mp}{\sqrt{2F}}.$$

Da nun nach dem System (10), S. 399, X_u gleich $Cp + Aq$ und X_v gleich $\bar{C}p + \bar{A}q$ sein muß, ergibt sich:

(16) $$A = -\frac{M}{\sqrt{2F}}, \quad \bar{A} = -\frac{N}{\sqrt{2F}}, \quad C = -\frac{L}{\sqrt{2F}}, \quad \bar{C} = -\frac{M}{\sqrt{2F}}.$$

Ferner ist nach (15):

$$x_{uu} = \frac{1}{2} q_u \sqrt{2F} + \frac{1}{2} q \frac{F_u}{\sqrt{2F}}, \quad x_{uv} = \frac{1}{2} q_v \sqrt{2F} + \frac{1}{2} q \frac{F_v}{\sqrt{2F}}.$$

Werden nun hierin die Werte von x_{uu} und x_{uv} aus (1), S. 393, eingeführt, worin die Koeffizienten ψ_1, φ_2 und ψ_2 wegen (2) ebenda und wegen $E = G = 0$ gleich Null sind, während φ_1 gleich $F_u : F$ ist, so geht hervor:

$$LX + x_u \frac{F_u}{F} = \frac{1}{2} q_u \sqrt{2F} + \frac{1}{2} q \frac{F_u}{\sqrt{2F}}, \quad MX = \frac{1}{2} q_v \sqrt{2F} + \frac{1}{2} q \frac{F_u}{\sqrt{2F}}$$

oder wegen (15):

$$LX + \frac{1}{2} q \frac{F_u}{\sqrt{2F}} = \frac{1}{2} q_u \sqrt{2F}, \quad MX - \frac{1}{2} q \frac{F_v}{\sqrt{2F}} = \frac{1}{2} q_v \sqrt{2F}.$$

Nach dem System (10), S. 399, hat aber q_u den Wert $-Bq - 2CX$ und q_v den Wert $-\bar{B}q - 2\bar{C}X$, so daß mit Rücksicht auf die schon unter (16) berechneten Werte von C und $\bar{C}$ kommt:

(17) $$B = -\frac{F_u}{2F}, \quad \bar{B} = \frac{F_v}{2F}.$$

Nachdem hiermit A, B, C und $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ ermittelt worden sind, führen wir ξ und η geradeso wie im vorigen Paragraphen auf S. 400 ein. Dann ergibt sich aus (15):

$$x_u = \sqrt{2F} \frac{1}{\xi - \eta}, \quad x_v = -\sqrt{2F} \frac{\xi \eta}{\xi - \eta}.$$

Wie früher müssen $\sigma = \xi$ und $\sigma = \eta$ dem System

$$\sigma_u = A + B\sigma + C\sigma^2, \quad \sigma_v = \bar{A} + \bar{B}\sigma + \bar{C}\sigma^2$$

genügen, worin aber jetzt die Koeffizienten die Werte (16) und (17) haben. Somit besteht sowohl für $\sigma = \xi$ als auch für $\sigma = \eta$ die totale Riccatische Differentialgleichung

$$d\sigma = \left[-\frac{M}{\sqrt{2F}} - \frac{F_u}{2F}\sigma - \frac{L}{\sqrt{2F}}\sigma^2\right]du + \left[-\frac{N}{\sqrt{2F}} + \frac{F_v}{2F}\sigma - \frac{M}{\sqrt{2F}}\sigma^2\right]dv,$$

die wieder unbeschränkt integrabel ist.

Wieder sind statt des einen Funktionenpaares ξ, η ihrer drei

$$\xi_1, \eta_1, \quad \xi_2, \eta_2, \quad \xi_3, \eta_3$$

zu nehmen, die sämtlich der Riccatischen Gleichung genügen müssen, so daß also wieder die bisher ξ, η genannten Größen mit ξ_1, η_1 bezeichnet werden. Alsdann gilt der Ansatz:

$$(18)\quad \begin{cases} x_u = \sqrt{2F}\dfrac{1}{\xi_1 - \eta_1}, & x_v = -\sqrt{2F}\dfrac{\xi_1\eta_1}{\xi_1 - \eta_1}, & X = \dfrac{\xi_1 + \eta_1}{\xi_1 - \eta_1}, \\ y_u = \sqrt{2F}\dfrac{1}{\xi_2 - \eta_2}, & y_v = -\sqrt{2F}\dfrac{\xi_2\eta_2}{\xi_2 - \eta_2}, & Y = \dfrac{\xi_2 + \eta_2}{\xi_2 - \eta_2}, \\ z_u = \sqrt{2F}\dfrac{1}{\xi_3 - \eta_3}, & z_v = -\sqrt{2F}\dfrac{\xi_3\eta_3}{\xi_3 - \eta_3}, & Z = \dfrac{\xi_3 + \eta_3}{\xi_3 - \eta_3}. \end{cases}$$

Wenn man wieder die abkürzenden Bezeichnungen $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2$ wie im vorigen Paragraphen benutzt, erkennt man, daß die dort aufgestellten Bedingungen (18), (19), (20) zu denselben Ergebnissen wie damals führen, weil jetzt $E = G = 0$ ist.

Auf Grund der Formeln (18) oder

$$x_u = \tfrac{1}{2}\sqrt{2F}(\mathfrak{X}_1 - i\mathfrak{X}_2), \quad x_v = \tfrac{1}{2}\sqrt{2F}(\mathfrak{X}_1 + i\mathfrak{X}_2)$$

usw. erhalten wir daher jetzt unter Benutzung der auf S. 410 oben aufgestellten Gleichungen an Stelle von (13) die Gleichungen:

$$dx = \frac{\sqrt{2F}(\pi\varkappa\,du - pq\,dv)}{\pi q - \varkappa p}, \quad dy = \frac{\sqrt{2F}\,[(\pi^2 - \varkappa^2)\,du - (p^2 - q^2)\,dv]}{2(\pi q - \varkappa p)}$$

$$dz = \frac{\sqrt{2F}[(\pi^2 + \varkappa^2)\,du - (p^2 + q^2)\,dv]}{2i(\pi q - \varkappa p)},$$

d. h. es gilt der

Satz 28: Sind insbesondere als Fundamentalgrößen E, F, G und L, M, N solche Funktionen von u und v gegeben, von denen E und G identisch gleich Null sind, und erfüllen

sie die drei Fundamentalgleichungen, während $D = iF$ nicht identisch verschwindet, so sind

$$x = \int \frac{\sqrt{2F}(\pi \varkappa\, du - p q\, dv)}{\pi q - \varkappa p},$$

$$y = \int \frac{\sqrt{2F}[(\pi^2 - \varkappa^2)\, du - (p^2 - q^2)\, dv]}{2(\pi q - \varkappa p)},$$

$$z = \int \frac{\sqrt{2F}[(\pi^2 + \varkappa^2)\, du - (p^2 + q^2)\, dv]}{2i(\pi q - \varkappa p)}$$

die Gleichungen einer Fläche mit den gegebenen Fundamentalgrößen. Dabei bedeuten $p, q, \pi, \varkappa$ diejenigen Funktionen von u und v, die sich ergeben, wenn man die allgemeine Lösung

$$\sigma = \frac{p(u, v)c + q(u, v)}{\pi(u, v)c + \varkappa(u, v)} \qquad (c = \text{konst.})$$

der unbeschränkt integrabeln totalen Riccatischen Differentialgleichung

$$d\sigma = \left[-\frac{M}{\sqrt{2F}} - \frac{F_u}{2F}\sigma - \frac{L}{\sqrt{2F}}\sigma^2\right] du + \left[-\frac{N}{\sqrt{2F}} + \frac{F_v}{2F}\sigma - \frac{M}{\sqrt{2F}}\sigma^2\right] dv$$

bestimmt. Die Ermittelung der allgemeinen Lösung σ läßt sich auf die Aufgabe zurückführen, die allgemeine Lösung einer gewissen gewöhnlichen Riccatischen Differentialgleichung, in der noch eine willkürliche Konstante vorkommt, zu finden. Jede Fläche mit denselben vorgeschriebenen Fundamentalgrößen ist mit der oben angegebenen kongruent, und umgekehrt hat jede mit jener Fläche kongruente Fläche dieselben Fundamentalgrößen, sobald man ihr in homologen Punkten dieselben Parameter u, v zuschreibt und sie entsprechend orientiert.

Hiermit ist die Aufgabe, zu vorgeschriebenen Fundamentalgrößen, die den drei Fundamentalgleichungen Genüge leisten, die zugehörigen Flächen zu bestimmen, vollständig erledigt. Man sieht, daß sie nur die vollständige Integration einer gewöhnlichen Riccatischen Differentialgleichung, in der noch eine willkürliche Konstante vorkommt, und außerdem die Auswertung dreier vollständiger Differentiale durch Quadraturen verlangt.

§ 10. Funktionen des Ortes auf einer Fläche.

Nunmehr wollen wir eine Betrachtung anstellen, die die natürliche Verallgemeinerung von Überlegungen im 1. Bande, § 15 des ersten Abschnittes, ist: Es sei eine Fläche

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

mit den Parametern u und v, sowie eine Funktion

$$f(u, v)$$

der Parameter gegeben.

Zu jedem Punkte (x, y, z) oder (u, v) der Fläche gehört ein Wertepaar u, v der Parameter und zu diesem Wertepaare ein Wert der Funktion f, die deshalb eine Funktion des Ortes auf der Fläche (1) heißt.[1]

Gibt man einer Konstanten c einen bestimmten Wert, so stellt die Gleichung

$$f(u, v) = c$$

eine Kurve auf der Fläche dar (nach Satz 2, S. 12). So liegen auf der Fläche einfach unendlich viele Kurven[2]

$$f(u, v) = \text{konst.}$$

Längs jeder hat die Ortsfunktion einen konstanten Wert. Durchwandert der Flächenpunkt (u, v) irgend einen Weg, so wird er diese Kurvenschar durchsetzen, indem f nach und nach verschiedene Werte annimmt. Dabei wird die Geschwindigkeit, mit der sich f ändert, im allgemeinen auch veränderlich sein.

Diese Geschwindigkeit können wir so definieren: Der Punkt (u, v) oder P der Fläche wandere nach einer benachbarten Stelle P_1 oder $(u + \Delta u, v + \Delta v)$. Dann ist

$$\Delta f = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)$$

---

[1] In der Mechanik und Physik bezeichnet man derartige Funktionen als Potentiale auf der Fläche. Wenn man will, kann man der Funktion f eine physikalische Bedeutung geben. Sie mag z. B. die Belegung der Fläche mit einer Masse zum Ausdrucke bringen, indem $f(u, v)$ die Dichte der Masse an der Stelle (u, v) bedeutet, oder man kann sich vorstellen, die Fläche sei erwärmt und habe an der Stelle (u, v) die Temperatur $f(u, v)$, oder die Fläche sei beleuchtet und habe an der Stelle (u, v) die Helligkeit $f(u, v)$, u. dgl. mehr.

[2] Sie heißen in der Mechanik und Physik Äquipotential- oder Niveaukurven.

die zugehörige Zunahme des Wertes der Ortsfunktion. Bedeutet Δs die Länge des zurückgelegten Weges von P bis P_1, so wird man den Grenzwert von

$$\frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta s}$$

für $\lim \Delta u = 0$, $\lim \Delta v = 0$, falls er vorhanden ist, als die Geschwindigkeit definieren. Dabei seien Wege auf Minimalkurven der Fläche ausgeschlossen, weil auf ihnen Δs gleich Null ist.

In entsprechender Weise verfuhren wir in der Ebene, siehe I S. 122 u. f. Aber auf einer krummen Fläche gibt es noch eine andere Möglichkeit, eine Geschwindigkeit der Änderung der Ortsfunktion zu definieren. Ist nämlich $\Delta \vartheta$ der Winkel, den die Richtung der Flächennormale von P_1 mit der Richtung der Flächennormale von P bildet, so kann man auch den Quotienten

$$\frac{\Delta f}{\Delta \vartheta} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta \vartheta}$$

bilden und seinen Grenzwert für $\lim \Delta u = 0$, $\lim \Delta v = 0$, falls er vorhanden ist, als Geschwindigkeit bezeichnen. Dabei seien solche Wege ausgeschlossen, längs deren die Flächennormale ihre Richtung nicht ändert.

Zur Unterscheidung wollen wir die Grenzwerte

$$\lim \frac{\Delta f}{\Delta s} \quad \text{und} \quad \lim \frac{\Delta f}{\Delta \vartheta},$$

die wir mit

$$\frac{df}{ds} \quad \text{und} \quad \frac{df}{d\vartheta}$$

bezeichnen, die Weg- und die Winkelgeschwindigkeit der Ortsfunktion nennen.[1]

Wie immer sei

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

das Quadrat des Bogenelements der Fläche. Wenn L, M, N die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung bedeuten, K das Krümmungsmaß und H die mittlere Krümmung der Fläche ist, ergibt sich für das Quadrat des Winkeldifferentials $d\vartheta$, also des Richtungsunterschiedes unendlich benachbarter Flächennormalen, nach (10) und (14) auf S. 199:

$$d\vartheta^2 = H(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2) - K(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2).$$

---

[1] In der Mechanik und Physik heißt die Weggeschwindigkeit das Potentialgefälle.

Da ferner

$$df = f_u du + f_v dv$$

ist, definieren wir also die Wege- und die Winkelgeschwindigkeit der Ortsfunktion durch die beiden Formeln:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{df}{ds} = \dfrac{f_u du + f_v dv}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}}, \\ \dfrac{df}{d\vartheta} = \dfrac{f_u du + f_v dv}{\sqrt{H(L du^2 + 2M du dv + N dv^2) - K(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)}} \end{cases}$$

Dies sind allerdings nur dann die Grenzwerte von $\Delta f : \Delta s$ und $\Delta f : \Delta \vartheta$, wenn für die betrachtete Stelle (u, v) nicht etwa zugleich f_u und f_v gleich Null sind. Solche Stellen, wo f_u und f_v beide verschwinden, nennen wir singuläre Stellen der Ortsfunktion f. Wir wollen sie grundsätzlich von der Betrachtung ausschließen. Die Größen (2) sind Funktionen nicht nur von u und v, sondern auch von der eingeschlagenen Richtung $(dv : du)$ vom Flächenpunkte (u, v) aus. Sie sind außerdem zweiwertig. Ihre Quadrate dagegen sind einwertige Funktionen von u, v und $dv : du$. Setzen wir wie sonst $dv : du = k$, so stellen sich diese Quadrate so dar:

$$(3)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{df}{ds}\right)^2 = \dfrac{(f_u + f_v k)^2}{E + 2Fk + Gk^2}, \\ \left(\dfrac{df}{d\vartheta}\right)^2 = \dfrac{(f_u + f_v k)^2}{H(L + 2Mk + Nk^2) - K(E + 2Fk + Gk^2)}. \end{cases}$$

Diese beiden Größen sind auch unabhängig von der Art der Orientierung der Flächennormale, d. h. davon, wie man D, nämlich die Quadratwurzel aus $EG - F^2$, einwertig definieren will. Bei der ersten Größe ist dies selbstverständlich. Was die zweite betrifft, so hängen allerdings L, M, N und H, K von D ab. Es wurde aber schon auf S. 267 bemerkt, daß K unabhängig von der Art ist, wie man D einwertig macht. Dasselbe gilt nach XII (B) und XII (K) von den Produkten HL, HM und HN, da in ihnen D nur im Quadrate vorkommt.

Die Winkelgeschwindigkeit $df : d\vartheta$ läßt sich noch anders darstellen: Bildet man die Fläche (1) sphärisch ab, so ist $d\vartheta^2$ nichts anderes als das zu ds^2 gehörige Quadrat des Bogenelements $d\mathfrak{s}$ auf der Bildkugel, siehe S. 257. Da jedem Punkte (u, v) der Fläche ein Punkt (u, v) auf der Kugel entspricht, kann man $f(u, v)$ auch als Ortsfunktion auf der Bildkugel ansehen. Es erhellt also, daß $df : d\vartheta$ nichts anderes ist als die Weggeschwindigkeit $df : d\mathfrak{s}$ der Ortsfunktion auf der Kugel. In der Tat kann man wegen (5), S. 257,

die zweite Formel (3) entsprechend der ersten Formel (3) auch so schreiben:

$$(4) \qquad \left(\frac{df}{d\vartheta}\right)^2 = \left(\frac{df}{d\mathfrak{s}}\right)^2 = \frac{(f_u + f_v k)^2}{\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}k + \mathfrak{G}k^2},$$

wo $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ die Fundamentalgrößen erster Ordnung auf der Bildkugel bedeuten.[1] Wir werden nun zunächst Eigenschaften der Weggeschwindigkeit $df:ds$ ermitteln; indem wir dann von der Fläche (1) zur Bildkugel übergehen, können wir daraus leicht Eigenschaften der Winkelgeschwindigkeit $df:d\vartheta$ ableiten.

Um uns von der Art der Änderung der Ortsfunktion f auf verschiedenen Wegelementen ds vom Punkte P oder (u, v) aus eine Anschauung zu machen, tragen wir auf jeder Wegrichtung von P aus eine Strecke $P\mathfrak{P}$ gleich der zugehörigen Weggeschwindigkeit $df:ds$ ab. Ist nämlich irgend eine Fortschreitungsrichtung (k) oder $(dv:du)$ vom Punkte P aus gewählt worden, so ist das zugehörige Bogenelement ds, je nachdem man im einen oder anderen Sinne von P aus auf der zugehörigen Tangente fortschreitet, gleich dem einen oder anderen Werte der Quadratwurzel

$$(5) \qquad ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Jedesmal muß man den zugehörigen Wert von

$$(6) \qquad \frac{df}{ds} = \frac{f_u\,du + f_v\,dv}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}$$

von P aus als Strecke auftragen. Da nun bei der Änderung des Fortschreitungssinnes ds und $df:ds$ beide mit -1 multipliziert werden, erhellt, daß man doch auf jeder Tangente von P nur zu e i n e r aufzutragenden Strecke $P\mathfrak{P}$ gelangt. Zu jedem Werte von k gehört also nur e i n Radiusvektor $P\mathfrak{P}$ in der Tangentenebene von P. Die Koordinaten von $\mathfrak{P}$ sind leicht zu finden. Denn die zu k gehörige Tangente des Flächenpunktes P oder (x, y, z) hat zunächst in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Gleichungen

$$\mathfrak{x} = x + (x_u + x_v k)t, \quad \mathfrak{y} = y + (y_u + y_v k)t, \quad \mathfrak{z} = z + (z_u + k z_v)t,$$

[1] Besonders anschaulich wird diese Deutung von $df:d\vartheta$ als Weggeschwindigkeit $df:d\mathfrak{s}$ auf der Kugel, wenn man unter f die Helligkeit der durch parallele Strahlen aus irgendwelchen verschiedenen Richtungen erleuchteten Fläche (1) an der Stelle (u, v) versteht (vgl. die 1. Anm. zu S. 415), denn nach S. 257 hat die Bildkugel alsdann an jeder Stelle dieselbe Helligkeit wie die Fläche (1) an der zugehörigen Stelle. Die Übertragung der Ortsfunktion f auf die Kugel wird hier also physikalisch bewirkt.

ausgedrückt mittels eines Parameters t. Wegen

$$\mathsf{S}(\mathfrak{x}-x)^2 = t^2\,\mathsf{S}(x_u + x_v k)^2 = t^2(E + 2Fk + Gk^2)$$

wird dieselbe Tangente auch mittels eines anderen Parameters τ so dargestellt:

$$\mathfrak{x} = x + \frac{x_u + x_v k}{\sqrt{E+2Fk+Gk^2}}\,\tau, \qquad \mathfrak{y} = y + \frac{y_u + y_v k}{\sqrt{E+2Fk+Gk^2}}\,\tau,$$

$$\mathfrak{z} = z + \frac{z_u + z_v k}{\sqrt{E+2Fk+Gk^2}}\,\tau.$$

Hier ist

$$\mathsf{S}(\mathfrak{x}-x)^2 = \tau^2,$$

so daß τ die vom Punkte P aus gemessenen Strecken auf der Tangente bedeutet, und zwar gemessen entsprechend der Festsetzung der Einwertigkeit der auftretenden Quadratwurzel (5). Setzt man nun den Wert (6) für τ ein, so gehen die Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ des Endpunktes $\mathfrak{P}$ der Strecke $P\mathfrak{P}$ hervor:

$$\mathfrak{x} = x + \frac{x_u + x_v k}{E+2Fk+Gk^2}(f_u + f_v k), \text{ usw.} \tag{7}$$

Sie sind also in der Tat frei von jeder Mehrwertigkeit, und so wird bestätigt, daß auf jeder Tangente des Flächenpunktes P nur ein Radiusvektor $P\mathfrak{P}$ liegt.

Fragen wir nun nach dem Orte der Endpunkte $\mathfrak{P}$ aller von P ausgehenden Radienvektoren, so erinnern wir uns vorteilhaft daran, daß sich im Falle einer Ortsfunktion in der Ebene in Satz 57, I S. 123, ein Kreis ergab, der durch P ging und dort die hindurchgehende Kurve $f(u, v) =$ konst. berührte. Wir vermuten, daß dies auch jetzt gilt, und werden, da wir dies Ziel vor Augen haben, den Beweis am bequemsten so führen:

Zunächst bestimmen wir die Richtung (k_1) der durch den Punkt P gehenden Kurve $f(u, v) =$ konst. Für sie ist

$$f_u + f_v k_1 = 0,$$

also

$$k_1 = -\frac{f_u}{f_v}. \tag{8}$$

Zweitens bestimmen wir die Richtung (k) von P aus, für die die Ableitung der Weggeschwindigkeit

$$\frac{df}{ds} = \frac{f_u + f_v k}{\sqrt{E+2Fk+Gk^2}}$$

hinsichtlich k verschwindet. Die dafür hervorgehende Bedingung

$$f_v(E + 2Fk + Gk^2) - (f_u + f_v k)(F + Gk) = 0$$

ist nur scheinbar quadratisch. In Wahrheit liefert sie nur einen Wert k, den wir mit k_2 bezeichnen wollen, nämlich den Wert

$$(9)\qquad k_2 = -\frac{E f_v - F f_u}{F f_v - G f_u}.$$

Nach (8) und (9) ist:

$$E + F(k_1 + k_2) + G k_1 k_2 = 0,$$

d. h. nach Satz 13, S. 39 u. f., sind die beiden Richtungen (k_1) und (k_2) zueinander senkrecht.

Der zu $k = k_1$ gehörige Wert von $df:ds$ ist, wie ja von vornherein klar ist, gleich Null. Im reellen Falle muß ferner k_2 derjenige Wert von k sein, für den der Radiusvektor $P\mathfrak{P}$, absolut genommen, sein Maximum erreicht. Da (k_2) zu (k_1) senkrecht ist, ergibt sich also entsprechend Satz 58, I S. 124:

Satz 29: Soll sich ein Punkt (u, v) auf einer reellen Fläche so bewegen, daß sich eine reelle Funktion $f(u, v)$ seines Ortes möglichst stark, verglichen mit dem zurückgelegten Wege, ändert, so muß er eine Kurve[1] beschreiben, die alle Kurven $f(u, v) =$ konst. senkrecht durchsetzt.

Wir dürfen nun vermuten, daß nicht nur im reellen Falle, sondern allgemein auf der zu k_2 gehörigen Tangente von P der von P ausgehende Durchmesser des fraglichen Kreises liegt. Deshalb gehen wir wie folgt vor: Eine beliebige Fortschreitungsrichtung (k) in der Tangentenebene von P bildet mit der Richtung (k_2) einen Winkel α, dessen Kosinus nach (21), S. 39, ist:

$$\cos\alpha = \frac{E + F(k_2 + k) + G k_2 k}{\sqrt{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}}$$

Wegen $EG - F^2 = D^2$ und nach (9) folgt:

$$\cos^2\alpha = \frac{D^2 (f_u + f_v k)^2}{(E f_v^2 - 2F f_v f_u + G f_u^2)(E + 2Fk + Gk^2)}.$$

Somit ist nach (3):

$$(10)\qquad \left(\frac{df}{ds}\right)^2 = \frac{E f_v^2 - 2F f_v f_u + G f_u^2}{D^2} \cos^2\alpha.$$

Da in dem ersten Faktor rechts k nicht mehr vorkommt, besagt dies: Trägt man die Größe

$$\frac{1}{D}\sqrt{E f_v^2 - 2F f_v f_u + G f_u^2}$$

[1] Dies ist eine Kurve stärksten Potentialgefälles oder Kraftlinie in der Mechanik und Physik.

als Strecke auf der zu k_2 gehörigen Tangente des Punktes P von P aus auf, so ist die senkrechte Projektion der Strecke auf die zu irgend einer Richtung (k) gehörige Tangente von P gleich dem zu k gehörigen Werte von $df:ds$. Dies aber bedeutet, daß in der Tat die Endpunkte $\mathfrak{P}$ aller Radienvektoren einen Kreis in der Tangentenebene bilden. Also gilt der

Satz 30: Die Weggeschwindigkeit $df:ds$, mit der sich eine Funktion $f(u,v)$ des Ortes P oder (u,v) auf einer Fläche mit den Parametern u und v beim Fortschreiten längs irgend einer Richtung von P aus ändert, ist gleich der von P aus in dieser Richtung gezogenen Sehne eines gewissen Kreises in der Tangentenebene von P, der in P insbesondere diejenige Richtung berührt, längs deren die Weggeschwindigkeit den Wert Null hat.

Dies ist die Verallgemeinerung des Satzes 57, I S. 123.

Aus (10) folgt weiterhin, daß der darin rechts stehende erste Faktor das Quadrat des Wertes von $df:ds$ für die Richtung (k_2) sein muß. In der Tat geht derselbe Wert hervor, wenn man in der ersten Formel (3) für k den Wert (9) von k_2 einsetzt. Der in Rede stehende Faktor wird abgekürzt mit $\triangle_{ff}$ bezeichnet. Es soll also sein:[1]

$$\triangle_{ff} = \frac{E f_v^2 - 2 F f_v f_u + G f_u^2}{E G - F^2}. \tag{11}$$

Im reellen Falle ist $\triangle_{ff}$ der größte Wert von allen zum Punkte P gehörigen Quadraten von Weggeschwindigkeiten $df:ds$ der Ortsfunktion f.

Einen Teil der Ergebnisse wollen wir noch so formulieren:

Satz 31: Bedeutet $f(u, v)$ eine Funktion des Ortes auf einer Fläche mit den Parametern u und v und den Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G, so ist die Weggeschwindigkeit $df:ds$, mit der sich der Wert der Funktion f beim Fortschreiten von einem Flächenpunkte (u, v) aus in irgend einer Richtung $(dv:du)$ oder (k) ändert, die Funktion von u, v und k:

$$\frac{df}{ds} = \frac{f_u + f_v k}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}}.$$

Die Ableitung dieser Funktion $df:ds$ nach k wird gleich Null für diejenige Richtung (k_2), die senkrecht ist zur Rich-

[1] Die besondere Wichtigkeit des Ausdruckes $\triangle_{ff}$ wird sich im nächsten Paragraphen herausstellen.

tung (k_1) der Tangente der durch den Punkt (u, v) gehenden Kurve $f =$ konst., und das Quadrat von $df:ds$ hat für die Richtung (k_2) den Wert

$$\triangle_{ff} = \frac{E f_v^2 - 2 F f_v f_u + G f_u^2}{EG - F^2}.$$

Im reellen Falle ist dies der größte Wert von allen zur Stelle (u, v) der Fläche gehörigen Quadraten der Weggeschwindigkeit $df:ds$.

Wenn man nun, wie oben erörtert wurde, die Ortsfunktion $f(u, v)$ auch auf die Bildkugel mittels sphärischer Abbildung überträgt, kommt man zur Weggeschwindigkeit $df:d\mathfrak{s}$ auf der Kugel, die nichts anderes als die Winkelgeschwindigkeit $df:d\vartheta$ auf der Fläche ist. Deshalb ergibt sich sofort:

Satz 32: Bedeutet $f(u, v)$ eine Funktion des Ortes auf einer Fläche mit den Parametern u, v, den Fundamentalgrößen E, F, G, L, M, N, dem Krümmungsmaße K und der mittleren Krümmung H, so ist die Winkelgeschwindigkeit $df:d\vartheta$, mit der sich der Wert der Funktion f beim Fortschreiten von einem Flächenpunkte (u, v) aus in irgend einer Richtung $(dv:du)$ oder (k) ändert, die Funktion von u, v und k:

$$\frac{df}{d\vartheta} = \frac{f_u + f_v k}{\sqrt{H(L + 2Mk + Nk^2) - K(E + 2Fk + Gk^2)}}.$$

Die Ableitung dieser Funktion $df:d\vartheta$ nach k wird gleich Null für diejenige Richtung (k_2), deren sphärisches Bild senkrecht ist zum sphärischen Bilde der Richtung (k_1) der Tangente der durch den Punkt (u, v) gehenden Kurve $f =$ konst., und das Quadrat von $df:d\vartheta$ hat für die Richtung (k_2) den Wert:

$$\frac{H(L f_v^2 - 2 M f_v f_u + N f_u^2) - K(E f_v^2 - 2 F f_v f_u + G f_u^2)}{K^2 (EG - F^2)}.$$

Im reellen Falle ist dies der größte Wert von allen zur Stelle (u, v) der Fläche gehörigen Quadraten der Winkelgeschwindigkeit $df:d\vartheta$.

Dieser Satz geht nämlich aus dem vorhergehenden Satze einfach dadurch hervor, daß man E, F, G durch

$$\mathfrak{E} = HL - KE, \quad \mathfrak{F} = HM - KF, \quad \mathfrak{G} = HN - KG$$

ersetzt. Vgl. dabei (8), S. 258. Zur Abkürzung führen wir die Bezeichnung

(12) $$\nabla_{ff} = H\frac{Lf_v^2 - 2Mf_vf_u + Nf_u^2}{EG - F^2}$$

ein. Dann stellt sich der im Satze 32 zuletzt angegebene Wert mit Rücksicht auf (11) so dar:

(13) $$\frac{1}{K^2}\nabla_{ff} - \frac{1}{K}\Delta_{ff}.$$

Im folgenden Paragraphen werden wir sehen, welche besondere Bedeutung den Ausdrücken Δ_{ff} und ∇_{ff} in der Flächentheorie zukommt.

§ 11. Differentialinvarianten einer Fläche hinsichtlich neuer Parameter.

In § 7 dieses Abschnittes betrachteten wir die Differentialinvarianten einer Fläche

(1) $$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

hinsichtlich der Bewegungen, denen man die Fläche unterwerfen kann. Wir fragten nämlich nach solchen Funktionen der Koordinaten x, y, z und ihrer partiellen Ableitungen beliebig hoher Ordnung nach u und v, die ungeändert bleiben, wenn man die Fläche irgend welchen Bewegungen unterwirft. Es zeigte sich in Satz 22, S. 387, daß diese Differentialinvarianten Funktionen der Fundamentalgrößen E, F, G, L, M, N und der partiellen Ableitungen beliebig hoher Ordnung der Fundamentalgrößen nach u und v sind, und umgekehrt, daß jede derartige Funktion eine Differentialinvariante gegenüber den Bewegungen ist.

Nunmehr sprechen wir von Differentialinvarianten der Fläche (1) hinsichtlich der Einführung neuer Parameter. Es mögen nämlich vermöge irgend zweier Gleichungen

(2) $$u = \lambda(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = \mu(\bar{u}, \bar{v}),$$

worin λ und μ voneinander unabhängige Funktionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ sein sollen, so daß also ihre Funktionaldeterminante

(3) $$\Phi = \frac{\partial\lambda}{\partial\bar{u}}\frac{\partial\mu}{\partial\bar{v}} - \frac{\partial\mu}{\partial\bar{u}}\frac{\partial\lambda}{\partial\bar{v}} \neq 0$$

ist, die neuen Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ eingeführt werden, wodurch eine neue Darstellung der Fläche (1), nämlich

$$x = \varphi(\lambda, \mu), \quad y = \chi(\lambda, \mu), \quad z = \psi(\lambda, \mu),$$

hervorgeht. Hier sind λ und μ die Funktionen (2) von $\bar{u}$ und $\bar{v}$, so daß x, y, z jetzt als Funktionen $\bar{\varphi}, \bar{\chi}, \bar{\psi}$ von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ dargestellt werden:

(4) $$x = \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}), \quad y = \bar{\chi}(\bar{u}, \bar{v}), \quad z = \bar{\psi}(\bar{u}, \bar{v}).$$

Alsdann betrachten wir eine Funktion J der durch (1) gegebenen Funktionen x, y, z von u und v und ihrer partiellen Ableitungen nach u und v bis zu beliebig hohen Ordnungen:

$$J(x, y, z, x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v, x_{uu}, \ldots),$$

die sich auch so schreiben läßt:

$$J(\varphi, \chi, \psi, \varphi_u, \varphi_v, \chi_u, \chi_v, \psi_u, \psi_v, \varphi_{uu}, \ldots).$$

Wenn man hierin u und v durch $\bar{u}$ und $\bar{v}$ sowie φ, χ, ψ durch $\bar{\varphi}$, $\bar{\chi}, \bar{\psi}$ ersetzt, kommt man zu einer zweiten entsprechend gebauten Funktion $\bar{J}$. Während J von u und v abhängt, ist $\bar{J}$ eine Funktion von $\bar{u}$ und $\bar{v}$. Wenn nun die Gleichung

$$J = \bar{J}$$

infolge der Gleichungen (2) besteht und zwar, wie auch immer die voneinander unabhängigen Funktionen λ und μ gewählt sein mögen, heißt J eine Differentialinvariante der Fläche hinsichtlich der Einführung neuer Parameter.

Hiernach sind diese Differentialinvarianten J Größen, die für die Fläche eine von der zufällig gewählten Darstellungsform unabhängige Bedeutung haben, also rein geometrische Eigenschaften der Fläche ausdrücken. Deshalb sind wir imstande, einige von ihnen anzugeben. Beispielsweise ist das Krümmungsmaß K eines gewöhnlichen Flächenpunktes (u, v) das Produkt aus den beiden Hauptkrümmungen der Stelle und deshalb offensichtlich eine Größe, die sich nicht ändert, wenn man die Fläche in anderer Weise analytisch darstellt. Wir haben auf S. 267 gesehen, daß auch die Art der Orientierung der Normalen der Fläche, d. h. die willkürliche Festsetzung der Einwertigkeit der Quadratwurzel D aus $EG - F^2$ keinen Einfluß auf den Wert von K hat. Die mittlere Krümmung H gehört zwar auch zu den Größen, die unabhängig von der zufälligen Art der analytischen Darstellung der Fläche sind, aber sie hängt doch noch von der Orientierung ab. Denn nach XII (B) sind nicht L, M, N, wohl aber DL, DM, DN von der Orientierung unabhängig, und nach XII (K) erhellt also, daß H in $-H$ übergeht, wenn die Orientierung geändert wird. Deshalb ist allerdings H selbst keine Differentialinvariante gegenüber der Einführung neuer Parameter, wohl aber das Quadrat von H.

Um auch analytisch zu bestätigen, daß K und H^2 Differentialinvarianten sind, müssen wir berechnen, wie sich die zu den neuen Parametern $\bar{u}, \bar{v}$ gehörigen Fundamentalgrößen $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ und $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$ durch die alten Fundamentalgrößen E, F, G und L, M, N ausdrücken. Aus

$$\bar{E} = \mathbf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{u}}\right)^2, \quad \bar{F} = \mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial \bar{u}}\frac{\partial x}{\partial \bar{v}}, \quad \bar{G} = \mathbf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{v}}\right)^2$$

gingen durch Einsetzen der infolge von (2) sich ergebenden Werte

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} x_u + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}} x_v, \qquad \frac{\partial x}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} x_u + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} x_v$$

usw. schon auf S. 17 unter (9) die Formeln:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \bar{E} &= \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\right)^2 E + 2\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}} F + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\right)^2 G, \\ \bar{F} &= \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} E + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\right) F + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} G, \\ \bar{G} &= \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\right)^2 E + 2\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} F + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}\right)^2 G \end{aligned}\right.$$

hervor. Durch fortgesetzte Differentiation von

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{u}}, \quad \frac{\partial x}{\partial \bar{v}} \quad \text{usw.}$$

nach $\bar{u}$ und $\bar{v}$ ergibt sich weiterhin mit Rücksicht auf (2):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \bar{u}^2} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\right)^2 x_{uu} + 2\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}} x_{uv} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\right)^2 x_{vv} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \bar{u}^2} x_u + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \bar{u}^2} x_v,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \bar{u}\,\partial \bar{v}} = \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} x_{uu} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\right) x_{uv} + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} x_{vv} &+ \\ + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \bar{u}\,\partial \bar{v}} x_u + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \bar{u}\,\partial \bar{v}} x_v&, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \bar{v}^2} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\right)^2 x_{uu} + 2\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} x_{uv} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}\right)^2 x_{vv} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \bar{v}^2} x_u + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \bar{v}^2} x_v.$$

Entsprechende Formeln gelten für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von y und z nach $\bar{u}$ und $\bar{v}$. Nach XII (B) ist nun zunächst:

$$\bar{D}\,\bar{L} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial \bar{u}^2} & \dfrac{\partial x}{\partial \bar{u}} & \dfrac{\partial x}{\partial \bar{v}} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial \bar{u}^2} & \dfrac{\partial y}{\partial \bar{u}} & \dfrac{\partial y}{\partial \bar{v}} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial \bar{u}^2} & \dfrac{\partial z}{\partial \bar{u}} & \dfrac{\partial z}{\partial \bar{v}} \end{vmatrix}$$

Setzt man in die Determinante die berechneten Werte ein, so erkennt man, daß in der ersten Reihe mit Rücksicht auf die zweite

und dritte Reihe je zwei Summanden, nämlich die mit x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v behafteten, gestrichen werden dürfen. Alsdann zerfällt die Determinante, wenn man ihre erste Reihe spaltet, in eine Summe von drei Determinanten, aus denen sich die Funktionaldeterminante Φ, siehe (3), herausheben läßt. Die drei verbleibenden Determinanten haben dann noch je einen Faktor

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\right)^2, \quad 2\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}, \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\right)^2$$

und werden nach Herausnehmen des Faktors infolge von XII (B) gleich DL, DM und DN. Somit kommt:

$$(6) \qquad \bar{D}\bar{L} = \Phi\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\right)^2 DL + 2\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}} DM + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\right)^2 DN\right].$$

Man erkennt aber, daß infolge von (5)

$$\bar{D}^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = \Phi^2(EG - F^2) = \Phi^2 D^2$$

wird. Somit ist, da man ja $\bar{D}$ und D in verschiedener Weise einwertig machen kann, allgemein zu setzen:

$$(7) \qquad \bar{D} = \varepsilon \Phi D,$$

wobei ε entweder $+1$ oder -1 bedeutet. Führen wir diesen Wert in (6) ein, und berechnen wir entsprechend auch $\bar{M}$ und $\bar{N}$, so kommt:

$$(8) \qquad \begin{cases} \bar{L} = \varepsilon\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\right)^2 L + 2\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}} M + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\right)^2 N\right], \\ \bar{M} = \varepsilon\left[\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} L + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\right) M + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} N\right], \\ \bar{N} = \varepsilon\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\right)^2 L + 2\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} M + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}\right)^2 N\right]. \end{cases}$$

Wie man sieht, d r ü c k e n s i c h $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$ d u r c h L, M, N g e r a d e s o a u s w i e $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ d u r c h E, F, G, a b g e s e h e n d a v o n, d a ß i n (8) n o c h d e r F a k t o r $\varepsilon = \pm 1$ v o r k o m m t.

Wenn man nun an Stelle der aus XII (K) zu entnehmenden Werte

$$(9) \qquad K = \frac{LN - M^2}{D^2}, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{D^2}$$

die Werte $\bar{K}$ und $\bar{H}$ in den überstrichenen Buchstaben schreibt und darin die Substitutionen (5), (7) und (8) macht, findet man ohne weiteres mit Rücksicht auf den Wert (3) der Determinante Φ, daß

$$\bar{K} = K, \quad \bar{H} = \varepsilon H,$$

also $\bar{H}^2 = H^2$ wird. Somit hat sich aufs neue ergeben:

Satz 33: Durch die Einführung neuer Parameter auf einer Fläche, auch bei anderer Orientierung, wird weder ihr Krümmungsmaß K noch das Quadrat ihrer mittleren Krümmung H geändert.

Da E, F, G und D Funktionen der partiellen Ableitungen erster Ordnung von x, y, z nach u und v sind, dagegen L, M, N auch von den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung abhängen, also auch K und H nach (9), heißen K und H^2 Differentialinvarianten zweiter Ordnung. Allgemein heißt eine Differentialinvariante J, die von den partiellen Ableitungen von x, y, z nach u und v bis zur n^{ten} Ordnung abhängt, eine Differentialinvariante n^{ter} Ordnung.

Um aus den schon bekannten Differentialinvarianten K und H^2 Differentialinvarianten von höherer als zweiter Ordnung zu gewinnen, kann man nun so schließen: Ist f irgend eine Differentialinvariante der Fläche, so ist f auch als eine Funktion des Ortes auf der Fläche zu betrachten. Als solche hat sie für einen bestimmten Punkt (u, v) und eine bestimmte Fortschreitungsrichtung (k) nach den Erörterungen des letzten Paragraphen eine Weggeschwindigkeit $df:ds$ und eine Winkelgeschwindigkeit $df:d\vartheta$. Diese Geschwindigkeiten sind Funktionen von u, v und k, also keine Ortsfunktionen, da Ortsfunktionen nur von u und v abhängen. Es gibt jedoch nach den Sätzen 31 und 32, S. 421 u. f., gewisse ausgezeichnete Fortschreitungsrichtungen (k), die durch die Natur der Fläche bedingt und daher unabhängig von der analytischen Darstellung der Fläche sind, und nach diesen Richtungen (k) hin haben die Quadrate der beiden Geschwindigkeiten die Werte:

$$\Delta_{ff} \quad \text{und} \quad \frac{1}{K^2}\nabla_{ff} - \frac{1}{K}\Delta_{ff}, \tag{10}$$

vgl. (11), S. 421, und (13), S. 423. Ausführlich geschrieben ist dabei:

$$\Delta_{ff} = \frac{Ef_v^2 - 2Ff_vf_u + Gf_u^2}{D^2}, \quad \nabla_{ff} = H\frac{Lf_v^2 - 2Mf_vf_u + Nf_u^2}{D^2}. \tag{11}$$

Die Ausdrücke (10) sind Funktionen von u und v allein, und wir schließen daraus: Falls f eine Differentialinvariante ist, werden auch diese beiden Ausdrücke Differentialinvarianten sein. Dies wollen wir jetzt rechnerisch bestätigen. Da wir schon wissen, daß K eine Differentialvariante ist, genügt es zu beweisen: Wenn f eine Differentialinvariante ist, gilt dasselbe von Δ_{ff} und ∇_{ff}.

Beim Beweise ist zu bedenken, daß $f(u, v)$ als vorausgesetzte Differentialinvariante infolge von (2) die Bedingung

$$\bar{f}(\bar{u}, \bar{v}) = f(u, v)$$

erfüllt, d. h. wenn man in f die neuen Parameter $\bar{u}, \bar{v}$ einführt und die hervorgehende Funktion $\bar{f}$ nennt. Partielle Differentiation nach $\bar{u}$ und $\bar{v}$ gibt deshalb nach (2):

$$(12) \qquad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} f_u + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}} f_v, \qquad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} f_u + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} f_v.$$

Bildet man nun die Ausdrücke $\bar{\triangle}_{\bar{f}\bar{f}}$ und $\bar{\nabla}_{\bar{f}\bar{f}}$, die aus den durch (11) definierten Ausdrücken $\triangle_{ff}$ und ∇_{ff} hervorgehen, wenn man alle Zeichen überstreicht, und setzt man darin die Werte (5), (7), (8) und (12) sowie den Wert

$$\bar{H} = \varepsilon H$$

ein, so gehen wegen $\varepsilon^2 = 1$ in der Tat wieder $\triangle_{ff}$ und ∇_{ff} selbst hervor. Wir haben also den wichtigen

Satz 34: Ist $f(u, v)$ hinsichtlich der Einführung neuer Parameter eine Differentialinvariante einer Fläche mit den Parametern u, v und hat die Fläche die Fundamentalgrößen E, F, G, L, M, N sowie die mittlere Krümmung H, so sind auch die beiden Funktionen

$$\triangle_{ff} = \frac{E f_v^2 - 2 F f_v f_u + G f_u^2}{EG - F^2}, \qquad \nabla_{ff} = H \frac{L f_v^2 - 2 M f_v f_u + N f_u^2}{EG - F^2}$$

Differentialinvarianten der Fläche hinsichtlich der Einführung neuer Parameter.

Demnach ist auch der zweite Ausdruck (10) eine Differentialinvariante, falls f eine ist. Aber wir ziehen diesem Ausdrucke weiterhin den einfacheren Ausdruck ∇_{ff} vor.

Da $\triangle_{ff}$ und ∇_{ff} nur bedingsweise Differentialinvarianten sind, nämlich nur dann, wenn f selbst eine Differentialinvariante ist, bedeuten sie eigentlich nur Verfahren, mittels deren man durch Differentiation aus bekannten Differentialinvarianten neue findet. Deshalb nennt man sie Differentialparameter der Fläche hinsichtlich der Einführung neuer Parameter.

Leicht können wir aus $\triangle_{ff}$ und ∇_{ff} noch andere Differentialparameter konstruieren. Für unsere späteren Zwecke genügt es, dies mit $\triangle_{ff}$ zu tun, und zwar geschieht es so: Sind $f(u, v)$ und $g(u, v)$ zwei Differentialinvarianten, so gilt dasselbe von $f + g$, also auch von ∇_{ff}, wenn man darin f durch $f + g$ ersetzt. Somit ist

$$\frac{E(f_v + g_v)^2 - 2F(f_v + g_v)(f_u + g_u) + G(f_u + g_u)^2}{EG - F^2}$$

ein Differentialparameter. Rechnet man die Klammern aus, so ergibt sich eine Summe von drei Gliedern. Das erste Glied ist $\triangle_{ff}$, das letzte $\triangle_{gg}$, und das sind schon bekannte Differentialparameter. Das mittlere Glied ist, abgesehen vom Faktor 2, ein Ausdruck, den wir mit $\triangle_{fg}$ bezeichnen wollen, nämlich

$$\triangle_{fg} = \frac{E f_v g_v - F(f_v g_u + g_v f_u) + G f_u g_u}{EG - F^2}. \tag{13}$$

Die neue Bezeichnung $\triangle_{fg}$ ist deshalb gestattet, weil sie für $f = g$ wieder auf die alte Definition (11) von $\triangle_{ff}$ zurückkommt. Hiernach ist somit auch $\triangle_{fg}$ ein Differentialparameter.[1] Zu dem Satze 34 können wir mithin hinzufügen den

Satz 35: Sind $f(u, v)$ und $g(u, v)$ hinsichtlich der Einführung neuer Parameter Differentialinvarianten einer Fläche mit den Parametern u, v und hat die Fläche die Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G, so ist auch die Funktion

$$\triangle_{fg} = \frac{E f_v g_v - F(f_v g_u + g_v f_u) + G f_u g_u}{EG - F^2}$$

eine Differentialinvariante der Fläche hinsichtlich der Einführung neuer Parameter.

---

[1] Dieser Ausdruck $\triangle_{fg}$ ist ebenso wie der vorher definierte Ausdruck $\triangle_{ff}$ von Beltrami eingeführt worden in der Arbeit „Ricerche di analisi applicata alla geometria", Giornale di Mat. 2. Bd. (1865). Siehe auch: „Sulla teorica generale dei parametri differenziali", Mem. dell'Accad. delle Scienze di Bologna, 2. Serie, 8. Bd. (1869). Er bezeichnete die Differentialparameter $\triangle_{ff}$ und $\triangle_{fg}$ mit $\triangle_1 f$ und ∇_{fg}. Der Index 1 ergab sich daraus, daß er noch einen anderen Differentialparameter betrachtete, den wir nicht anwenden werden, den sogenannten zweiten, während $\triangle_1 f$ der erste genannt wird, und $\triangle_{fg}$ der gemischte heißt. Trotzdem die Beltramischen Bezeichnungen überall gebräuchlich sind, erscheinen sie uns nicht angemessen; namentlich behagt der Unterschied in den Bezeichnungen $\triangle_1 f$ und ∇_{fg} nicht, da ja ∇_{fg} für $f = g$ in $\triangle_1 f$ übergeht, was durch die Zeichen nicht zum Ausdrucke kommt. — Gelegentlich kam $\triangle_{ff}$ schon in Gauss' „Disquisitiones" in Art. 22 vor, wie man überhaupt naturgemäß bei vielen Rechnungen in der Flächentheorie notwendig auf diesen Ausdruck geführt wird. Lamé hatte in seinen „Leçons sur les cordonnées curvilignes", Paris 1859, schon mit voller Erkenntnis ihrer Bedeutung für die Ebene und für den Raum Differentialparameter angewandt. Aber erst Beltrami übertrug den Begriff systematisch auf Flächen.

Wenden wir die Ergebnisse auf die uns schon bekannten Differentialinvarianten K und H^2 an, d. h. ersetzen wir f oder g durch K oder H^2, so gehen als Differentialinvarianten die Funktionen

$$\triangle_{KK}, \quad \nabla_{KK}, \quad \triangle_{H^2H^2}, \quad \nabla_{H^2H^2}, \quad \triangle_{KH^2}$$

mittels der Prozesse $\triangle_{ff}$, ∇_{ff} und $\triangle_{fg}$ hervor. Insbesondere ist:

$$(14) \quad \begin{cases} \triangle_{KK} = \dfrac{E K_v^2 - 2 F K_v K_u + G K_u^2}{D^2}, \\ \nabla_{KK} = H \dfrac{L K_v^2 - 2 M K_v K_u + N K_u^2}{D^2}. \end{cases}$$

Da ferner

$$\frac{\partial (H^2)}{\partial u} = 2 H H_u, \qquad \frac{\partial (H^2)}{\partial v} = 2 H H_v$$

ist, wird:

$$\triangle_{H^2H^2} = 4 H^2 \triangle_{HH}, \qquad \nabla_{H^2H^2} = 4 H^2 \nabla_{HH},$$

und da H^2 selbst eine Differentialinvariante ist, sind also auch $\triangle_{HH}$ und ∇_{HH} Differentialinvarianten:

$$(15) \quad \begin{cases} \triangle_{HH} = \dfrac{E H_v^2 - 2 F H_v H_u + G H_u^2}{D^2}, \\ \nabla_{HH} = H \dfrac{L H_v^2 - 2 M H_v H_u + N H_u}{D^2}. \end{cases}$$

Schließlich ist nach (13)

$$\triangle_{KH^2} = 2 H \triangle_{KH}.$$

Mithin ist auch

$$(16) \qquad H \triangle_{KH} = H \frac{E K_v H_v - F(K_v H_u + H_v K_u) + G K_u H_u}{D^2}$$

eine Differentialinvariante.

Die Bedeutung der hier aufgestellten Invarianten geht nun noch viel weiter. Nach Satz 22, S. 387, bleibt nämlich eine Funktion der Koordinaten x, y, z der Fläche und ihrer partiellen Ableitungen nach u und v bis zu beliebig hoher Ordnung bei der Ausübung von irgendwelchen Bewegungen auf die Fläche dann und nur dann ungeändert, wenn sie eine Funktion der Fundamentalgrößen E, F, G, L, M, N und ihrer partiellen Ableitungen nach u und v ist. Dies trifft aber für K und H^2 zu, siehe XII (K). Außerdem sieht man, daß mittels der Differentialparameter $\triangle_{ff}$, ∇_{ff} und $\triangle_{fg}$ aus Funktionen f und g, die diese Eigenschaft haben, immer wieder Funktionen von derselben Art hervorgehen. Sie sind also Differentialparameter nicht nur hinsichtlich der Einführung neuer Parameter, sondern auch gegenüber aller Bewegungen. Infolge davon

sind daher die unter (14), (15) und (16) aufgestellten Funktionen so beschaffen, daß sie sich weder bei der Ausübung von Bewegungen noch bei der Einführung neuer Parameter ändern.

In der Folge werden wir nur vier von den fünf Funktionen (14), (15), (16) zu betrachten nötig haben; von ∇_{HH} können wir absehen. Das tun wir auch in dem folgenden Satze, auf dem die wichtigen abschließenden Betrachtungen des nächsten Paragraphen beruhen:

Satz 36: Sind E, F, G, L, M, N die Fundamentalgrößen einer Fläche mit den Parametern u und v, bedeutet ferner K ihr Krümmungsmaß und H ihre mittlere Krümmung, so haben die sechs Funktionen

$$K, \quad H^2,$$

$$\triangle_{KK} = \frac{EK_v^2 - 2FK_vK_u + GK_u^2}{EG - F^2}, \qquad \triangle_{HH} = \frac{EH_v^2 - 2FH_vH_u + GH_u^2}{EG - F^2},$$

$$H\triangle_{KH} = H\frac{EK_vH_v - F(K_vH_u + H_vK_u) + GK_uH_u}{EG - F^2},$$

$$\nabla_{KK} = H\frac{LK_v^2 - 2MK_vK_u + NK_u^2}{EG - F^2}$$

die Eigenschaft, ihre Werte weder bei der Ausübung irgend einer Bewegung auf die Fläche noch bei der Einführung irgendwelcher neuer Parameter zu ändern.

Damit dies Ergebnis vollkommen richtig verstanden werde, fügen wir hinzu: Es seien

$$(17) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

die Gleichungen irgend einer Fläche. Wir führen in irgend einer Weise neue Parameter $\bar{u}, \bar{v}$ ein und üben außerdem auf die Fläche irgend eine Bewegung aus. Dann geht eine mit der Fläche (17) kongruente Fläche

$$(18) \qquad \bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{y} = \bar{\chi}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{z} = \bar{\psi}(\bar{u}, \bar{v})$$

hervor, deren Fundamentalgrößen $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$ seien, deren Krümmungsmaß $\bar{K}$ und deren mittlere Krümmung $\bar{H}$ sei. Zu jedem Punkte (u, v) der Fläche (17) gibt es dann einen homologen Punkt $(\bar{u}, \bar{v})$ der Fläche (18). Berechnet man nun die sechs in Satz 36 angegebenen Funktionen für den Punkt (u, v) und berechnet man die entsprechend in den überstrichenen Zeichen zu definierenden sechs Funktionen für den homologen Punkt $(\bar{u}, \bar{v})$, so sind die einen sechs Werte den anderen sechs Werten gleich.

Ein vereinfachtes Analogon zu den sechs in Satz 36 angegebenen Größen sind bei einer Raumkurve mit der Bogenlänge s, der Krümmung k und der Torsion $\varkappa$ unter anderen die Größen:

$$k^2, \quad \left(\frac{dk}{ds}\right)^2, \quad \varkappa,$$

siehe Satz 25, I S. 276. Diese Größen ändern ihre Werte ebenfalls weder bei der Einführung eines neuen Parameters längs der Kurve noch bei der Ausübung einer Bewegung auf die Kurve. Da alle drei Größen Funktionen des einzigen bei einer Kurve vorkommenden Parameters sind, werden die beiden letzten, falls die Krümmung k nicht konstant ist, Funktionen von k^2. So kamen wir zu den in I S. 279 unter (3) aufgestellten Gleichungen

$$\left(\frac{dk}{ds}\right)^2 = U(k^2), \quad \varkappa = V(k^2),$$

die wir in I S. 280 die natürlichen Gleichungen der Kurve nannten. Es zeigte sich nämlich in Satz 28, I S. 285, daß zwei Kurven von nicht konstanter Krümmung einander dann und nur dann kongruent sind, wenn bei beiden dieselben beiden natürlichen Gleichungen bestehen.

Bei einer Fläche kommen nun zwei Parameter u und v vor. Sobald die Krümmung K und die mittlere Krümmung H nicht voneinander abhängig sind, werden u und v Funktionen von K und H^2, also auch die übrigen in Satz 36 angegebenen Differentialinvarianten. Es bestehen daher Gleichungen von der Form:

$$(19) \quad \begin{cases} \Delta_{KK} = \Phi_1(K, H^2), & \Delta_{HH} = \Phi_2(K, H^2), \\ H\Delta_{KH} = \Phi_3(K, H^2), & \nabla_{KK} = \Phi_4(K, H^2). \end{cases}$$

Wenn zwei Flächen kongruent sind wie die Flächen (17) und (18), und wenn auf der einen K und H voneinander unabhängig sind, also auch auf der andern, so bestehen dieselben vier Gleichungen (19) sowohl für die auf die eine als auch für die auf die andere Fläche bezüglichen Differentialinvarianten.

Hiernach liegt die Vermutung nahe, daß auch die Umkehrung gilt, d. h. daß zwei Flächen, die so beschaffen sind, daß weder auf der einen noch auf der anderen das Kümmungsmaß und die mittlere Krümmung voneinander abhängen, einander nur dann kongruent sind, wenn auf beiden Flächen dieselben vier Gleichungen (19) zwischen den sechs Differentialinvarianten bestehen. Ist dies richtig,

so werden wir die vier Gleichungen (19) mit vollem Rechte[1] als die natürlichen Gleichungen einer Fläche von der angegebenen Art bezeichnen dürfen. Im nächsten Paragraphen soll der Nachweis dafür gebracht werden.

§ 12. Die natürlichen Gleichungen einer Fläche von allgemeiner Art.

Diejenigen Flächen, auf denen das Krümmungsmaß K und die mittlere Krümmung H voneinander abhängige Funktionen der beiden Parameter sind, lassen wir in dem gegenwärtigen Paragraphen beiseite. Dies soll durch die Worte: Fläche von allgemeiner Art in der Überschrift zum Ausdrucke gebracht werden. Die hier auszuschließenden Flächen betrachten wir eingehend im nächsten Paragraphen.

Indem wir die gebräuchlichen Bezeichnungen für die Elemente einer vorgelegten Fläche mit den Parametern u und v benutzen, bilden wir wie in Satz 36, S. 431, die vier Funktionen:

$$(1)\quad \begin{cases} \triangle_{KK} = \frac{1}{D^2}(E K_v^2 - 2 F K_v K_u + G K_u^2), \\ \triangle_{HH} = \frac{1}{D^2}(E H_v^2 - 2 F H_v H_u + G H_u^2), \\ H \triangle_{KH} = \frac{H}{D^2}[E K_v H_v - F(K_v H_u + H_v K_u) + G K_u H_u], \\ \nabla_{KK} = \frac{H}{D^2}(L K_v^2 - 2 M K_v K_u + N K_u^2) \end{cases}$$

und nehmen an, daß sie sich durch K und H^2 in der Form

$$(2)\quad \begin{cases} \triangle_{KK} = \Phi_1(K, H^2), \quad \triangle_{HH} = \Phi_2(K, H^2), \\ H \triangle_{KH} = \Phi_3(K, H^2), \\ \nabla_{KK} = \Phi_4(K, H^2) \end{cases}$$

ausdrücken.

[1] Bianchi sagt in seinen „Vorlesungen über Differentialgeometrie", deutsch von Lukat, 1. Aufl. Leipzig 1899, 2. Aufl. ebenda 1910 (italienische Originalausgabe: „Lezioni di geometria differenziale" 1. Aufl. Pisa 1893, 2. Aufl. ebenda 1902), daß die beiden quadratischen Differentialformen

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

in Analogie mit der für eine Raumkurve eingeführten Bezeichnung die natürlichen Gleichungen einer Fläche genannt werden können (siehe z. B. 2. deutsche Aufl. S. 91). Ganz abgesehen davon, daß dies keine Gleichungen sind und auch nicht dadurch Gleichungen werden, daß man sie, wie es Bianchi tut, mit

Ferner liege eine zweite Fläche mit den Parametern $\bar{u}$ und $\bar{v}$ vor; ihre Elemente seien wie die der ersten Fläche, aber mit überstrichenen Buchstaben bezeichnet. Wir nehmen an, daß auch

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{\triangle}_{\bar{K}\bar{K}} = \Phi_1(\bar{K}, \bar{H}^2), \quad \bar{\triangle}_{\bar{H}\bar{H}} = \Phi_2(\bar{K}, \bar{H}^2), \\ \bar{H}\,\bar{\triangle}_{\bar{K}\bar{H}} = \Phi_3(\bar{K}, \bar{H}^2), \\ \bar{\nabla}_{\bar{K}\bar{K}} = \Phi_4(\bar{K}, \bar{H}^2) \end{cases}$$

sei, wo also Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 genau ebenso von $\bar{K}$ und $\bar{H}^2$ wie in (2) von K und H^2 abhängen sollen.

Unser Ziel ist, zu beweisen, daß beide Flächen einander kongruent sind. Nach Satz 24, S. 392, suchen wir dies dadurch zu erreichen, daß wir auf beiden Flächen geeignete Parameter derart einführen, daß alsdann die Fundamentalgrößen der ersten Fläche gleich den entsprechenden Fundamentalgrößen der zweiten Fläche werden.

Wenn beide Flächen kongruent wären, müßte zu jedem Punkte (u, v) der ersten Fläche ein Punkt $(\bar{u}, \bar{v})$ der zweiten Fläche homolog sein, und dabei müßte

$$(4) \qquad \bar{K} = K, \quad \bar{H}^2 = H^2$$

sein. Nun sind nach Voraussetzung K und H^2 voneinander unabhängige Funktionen von u nnd v und ebenso $\bar{K}$ und $\bar{H}^2$ voneinander unabhängige Funktionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$. Daher definieren die Gleichungen (4) die Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ als voneinander unabhängige Funktionen der Parameter u und v. Setzen wir sie in die Gleichungen der zweiten Fläche ein, so gelangen wir zu einer Darstellung dieser Fläche mittels der Parameter u und v, und da alle in (3) vorkommenden Größen Differentialinvarianten sind, bleiben die Gleichungen (3) auch nach der Einführung der neuen Parameter u und v die alten. Infolge von (4) sind nunmehr die auf die zweite Fläche bezüglichen Größen $\bar{K}$ und $\bar{H}^2$ genau die-

---

f und φ bezeichnet, ist die Analogie nach unserer Ansicht schon deshalb gar nicht vorhanden, weil sich ja diese beiden Ausdrücke bei der Einführung neuer Parameter ändern, vgl. die Formeln (5), S. 425, und (8), S. 426. In der ersten Auflage unseres Buches (1902) hatten wir auf S. 353 die natürlichen Gleichungen im wesentlichen schon so wie oben im Texte definiert; allerdings gaben wir ihnen damals eine speziellere Gestalt durch Einführung der Krümmungskurven als Parameterlinien und dadurch, daß wir die beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 statt K und H^2 benutzten. Wir werden auf S. 442 u. f. Gelegenheit nehmen, zu zeigen, wie diese besondere Form aus der allgemeinen Form (19), S. 432, hervorgeht.

selben Funktionen von u und v wie K und H^2. Insbesondere ist also $\bar{H}$ entweder identisch mit H oder mit $-H$. Im zweiten Falle ändern wir die Orientierung der Normalen der zweiten Fläche, so daß $\bar{H}$ gleich H wird (vgl. S. 424).

Da die Gleichungen (3) auch für die neue Darstellung der zweiten Fläche gelten und darin nunmehr überall $\bar{K}$ und $\bar{H}$ durch K und H ersetzt werden dürfen, sind ihre rechten Seiten identisch mit den rechten Seiten der Gleichungen (2). Außerdem ist $H \neq 0$, weil sonst K und H gegen die Voraussetzung voneinander abhängige Funktionen von u und v wären. Die Vergleichung von (2) mit (3) liefert demnach:

$$(5)\quad \begin{cases} \bar{\Delta}_{KK} = \Delta_{KK}, & \bar{\Delta}_{HH} = \Delta_{HH}, \\ \bar{\Delta}_{KH} = \Delta_{KH}, & \bar{\nabla}_{KK} = \nabla_{KK}. \end{cases}$$

Wenn wir die Fundamentalgrößen der zweiten, nunmehr wie die erste Fläche mittels u und v dargestellten Fläche immer noch mit $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$, $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ bezeichnen, also unter $\bar{D}^2$ die Größe $\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2$ verstehen, ist dabei entsprechend (1):

$$(6)\quad \begin{cases} \bar{\Delta}_{KK} = \dfrac{1}{\bar{D}^2}(\bar{E}K_v^2 - 2\bar{F}K_vK_u + \bar{G}K_u^2), \\ \bar{\Delta}_{HH} = \dfrac{1}{\bar{D}^2}(\bar{E}H_v^2 - 2\bar{F}H_vH_u + \bar{G}H_u^2), \\ H\bar{\Delta}_{KH} = \dfrac{H}{\bar{D}^2}[\bar{E}K_vH_v - \bar{F}(K_vH_u + H_vK_u) + \bar{G}K_uH_u], \\ \bar{\nabla}_{KK} = \dfrac{H}{\bar{D}^2}(\bar{L}K_v^2 - 2\bar{M}K_vK_u + \bar{N}K_u^2). \end{cases}$$

Die drei ersten Gleichungen (5), nämlich

$$\bar{\Delta}_{KK} = \Delta_{KK}, \quad \bar{\Delta}_{KH} = \Delta_{KH}, \quad \bar{\Delta}_{HH} = \Delta_{HH},$$

liefern demnach:

$$K_v^2\left(\frac{\bar{E}}{\bar{D}^2} - \frac{E}{D^2}\right) - 2K_vK_u\left(\frac{\bar{F}}{\bar{D}^2} - \frac{F}{D^2}\right) + K_u^2\left(\frac{\bar{G}}{\bar{D}^2} - \frac{G}{D^2}\right) = 0,$$

$$K_vH_v\left(\frac{\bar{E}}{\bar{D}^2} - \frac{E}{D^2}\right) - (K_vH_u + H_vK_u)\left(\frac{\bar{F}}{\bar{D}^2} - \frac{F}{D^2}\right) + K_uH_u\left(\frac{\bar{G}}{\bar{D}^2} - \frac{G}{D^2}\right) = 0,$$

$$H_v^2\left(\frac{\bar{E}}{\bar{D}^2} - \frac{E}{D^2}\right) - 2H_vH_u\left(\frac{\bar{F}}{\bar{D}^2} - \frac{F}{D^2}\right) + H_u^2\left(\frac{\bar{G}}{\bar{D}^2} - \frac{G}{D^2}\right) = 0.$$

Dies sind drei in

$$(7)\quad \frac{\bar{E}}{\bar{D}^2} - \frac{E}{D^2}, \quad \frac{\bar{F}}{\bar{D}^2} - \frac{F}{D^2}, \quad \frac{\bar{G}}{\bar{D}^2} - \frac{G}{D^2}$$

lineare homogene Gleichungen, deren Determinante den Wert

$$(K_u H_v - H_u K_v)^3$$

hat und daher von Null verschieden ist, weil K und H voneinander unabhängig sind. Mithin sind alle drei Differenzen (7) gleich Null. Da weder D^2 noch $\bar{D}^2$ verschwindet, ist $\bar{D}^2 : D^2$ eine von Null verschiedene Funktion von u und v. Bezeichnen wir sie mit τ, so kommt also:

$$\bar{E} = \tau E, \quad \bar{F} = \tau F, \quad \bar{G} = \tau G. \tag{8}$$

Die Gleichung

$$\bar{D}^2 = \tau D^2$$

läßt sich aber so schreiben:

$$\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = \tau (EG - F^2)$$

und liefert infolge von (8):

$$\tau^2 = \tau.$$

Wegen $\tau \neq 0$ ergibt sich hieraus $\tau = 1$, also nach (8):

$$\bar{E} = E, \quad \bar{F} = F, \quad \bar{G} = G.$$

Die Fundamentalgrößen erster Ordnung stimmen also auf beiden Flächen miteinander überein.

Dies Ergebnis gestattet uns, die Formeln zu vereinfachen. Nach Satz 18, S. 46, werden nämlich hiernach die Minimalkurven auf beiden Flächen durch dieselbe Differentialgleichung

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0$$

definiert, und da auf jeder der beiden Flächen zwei einfach unendliche Scharen von Minimalkurven vorhanden sind, können wir auf beiden Flächen zugleich dieselben neuen Parameter derart einführen, daß die Parameterlinien auf beiden Flächen die Minimalkurven werden. Man hat sich nun wieder daran zu erinnern, daß die Formeln (2) und (3) nur Differentialinvarianten enthalten, die bei der Einführung neuer Parameter gar nicht geändert werden. Infolgedessen können wir annehmen, daß diese neuen Parameter von vornherein auf beiden Flächen eingeführt worden seien.

Mithin dürfen wir voraussetzen, daß auf beiden Flächen die Parameterlinien (u) und (v) Minimalkurven seien, so daß sowohl $E = \bar{E} = 0$ als auch $G = \bar{G} = 0$ ist (vgl. auch Satz 14, S. 44). Da außerdem $F = \bar{F}$ ist, gibt jetzt XII (K):

$$K = \frac{LN - M^2}{-F^2} = \frac{\bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2}{-F^2}, \qquad H = \frac{2M}{F} = \frac{2\bar{M}}{F}. \tag{9}$$

Wir erinnern dabei daran, daß $F \neq 0$ ist, weil E und G verschwinden, vgl. S. 15.

Nach der zweiten Gleichung (9) stimmen die Fundamentalgrößen M und $\bar{M}$ auf beiden Flächen überein, und nach der ersten Gleichung (9) ist:

$$\bar{L}\bar{N} = LN. \tag{10}$$

Die drei ersten Gleichungen (5) sind jetzt befriedigt. Es bleibt die letzte Gleichung

$$\bar{\nabla}_{KK} = \nabla_{KK} \tag{11}$$

übrig. Nach (1) ist aber nunmehr

$$\nabla_{KK} = -\frac{H}{F^2}(LK_v^2 - 2MK_vK_u + NK_u^2)$$

und nach (6):

$$\bar{\nabla}_{KK} = -\frac{H}{F^2}(\bar{L}K_v^2 - 2MK_vK_u + \bar{N}K_u^2).$$

Mithin liefert (11):

$$\bar{L}K_v^2 + \bar{N}K_u^2 = LK_v^2 + NK_u^2. \tag{12}$$

Somit haben wir jetzt noch die Aufgabe, auf Grund von (10) und (12) zu beweisen, daß auch $\bar{L}$ und $\bar{N}$ mit L und N übereinstimmen oder auch durch Einführung passender neuer Parameter zur Übereinstimmung gebracht werden können, ohne daß dadurch die Übereinstimmung von $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{M}$ mit E, F, G, M gestört wird.

Zunächst erledigen wir einige besondere Fälle: Nach Voraussetzung ist

$$K_uH_v - H_uK_v \neq 0.$$

Ist nun insbesondere $K_u = 0$, so muß also $K_v \neq 0$ sein. Dann aber gibt (12) sofort $\bar{L} = L$. Sicher muß $L \neq 0$ sein, denn sonst wäre nach (9)

$$H^2 - 4K = 0,$$

was im Widerspruche damit steht, daß K und H voneinander unabhängig sind. Wegen $\bar{L} = L$ liefert demnach (10) auch $\bar{N} = N$. Eine entsprechende Schlußfolgerung läßt sich im Falle $K_v = 0$ machen. Sobald also K_u oder K_v gleich Null ist, stimmen auch $\bar{L}$ und L sowie $\bar{M}$ und M miteinander überein.

Deshalb dürfen wir von jetzt an $K_u \neq 0$, $K_v \neq 0$ voraussetzen. Nun läßt sich (10) so schreiben:

$$\bar{L}K_v^2 . \bar{N}K_u^2 = LK_v^2 . NK_u^2.$$

Diese Gleichung und die Gleichung (12) lehren, daß $L K_v^2$ und $N K_u^2$ die Wurzeln derselben quadratischen Gleichung sind wie $\bar{L} K_v^2$ und $\bar{N} K_u^2$. Daher ist entweder

(13) $$\bar{L} K_v^2 = L K_v^2, \quad \bar{N} K_u^2 = N K_u^2$$

oder

(14) $$\bar{L} K_v^2 = N K_u^2, \quad \bar{N} K_u^2 = L K_v^2.$$

Im Falle (13) ergibt sich wegen $K_u \neq 0$, $K_v \neq 0$ sofort $\bar{L} = L$, $\bar{N} = N$, d. h. auch dann herrscht Übereinstimmung von $\bar{L}$ und $\bar{N}$ mit L und N. Daher ist nur noch die Annahme (14) zu untersuchen.

Wegen $K_u \neq 0$, $K_v \neq 0$ ist

(15) $$\omega = \frac{K_u^2}{K_v^2}$$

eine von Null verschiedene Funktion von u und v. Benutzen wir sie, so gibt (14):

(16) $$\bar{L} = \omega N, \quad \bar{N} = \frac{1}{\omega} L.$$

Jetzt ziehen wir die Fundamentalgleichungen der Flächen heran. Für die hier vorliegende Annahme, daß die Parameterlinien auf beiden Flächen die Minimalkurven sind, haben wir die Fundamentalgleichungen unter (6) auf S. 336 besonders aufgestellt. Nach der ersten und dritten ist:

$$L_v = M_u - \frac{F_u}{F} M, \quad N_u = M_v - \frac{F_v}{F} M,$$

und weil die Fundamentalgleichungen auch auf der zweiten Fläche gelten, wo $\bar{M} = M$ und $\bar{F} = F$ ist, folgt daraus:

$$\bar{L}_v = L_v, \quad \bar{N}_u = N_u$$

oder

$$\frac{\partial (\bar{L} - L)}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial (\bar{N} - N)}{\partial u} = 0.$$

Demnach ist $\bar{L} - L$ eine Funktion U von u allein und $\bar{N} - N$ eine Funktion V von v allein, somit:

(17) $$\bar{L} = L + U(u), \quad \bar{N} = N + V(v).$$

Nach (16) kommt mithin:

(18) $$\omega N - L = U, \quad \frac{1}{\omega} L - N = V.$$

Multiplikation der zweiten Gleichung mit ω und Addition zur ersten gibt:

(19) $$U + \omega V = 0.$$

Wäre sowohl U als auch V gleich Null, so würde aus (17) sofort folgen, daß $\bar{L}$ mit L und $\bar{N}$ mit N übereinstimmte. Deshalb braucht nur noch der Fall untersucht zu werden, wo U und V nicht beide gleich Null sind. Es kann aber auch nicht einzeln $U = 0$ und $V \neq$ sein, da dies mit (19) wegen $\omega \neq 0$ im Widerspruche steht. Ebenso kann wegen (19) auch nicht $U \neq 0$ und $V = 0$ sein. Deshalb haben wir von jetzt an

$$U(u) \neq 0, \quad V(v) \neq 0$$

vorauszusetzen.

Aus (19) ergibt sich dann

$$\omega = -\frac{U}{V},$$

also aus (15):

$$\frac{K_u^2}{K_v^2} = -\frac{U}{V}$$

oder

(20) $$\frac{K_u}{K_v} = \frac{\sqrt{-U(u)}}{\sqrt{V(v)}}$$

bei passender Festsetzung der Einwertigkeit der Wurzeln. Nun ist die Funktion K von u und v ein Integral der Differentialgleichung $dK = 0$ oder

$$K_u\,du + K_v\,dv = 0,$$

die sich wegen (20) so schreiben läßt:

$$\sqrt{-U(u)}\,du + \sqrt{V(v)}\,dv = 0$$

und sofort in der Form

$$\int \sqrt{-U(u)}\,du + \int \sqrt{V(v)}\,dv = \text{konst.}$$

integriert werden kann. Nach I S. 131 ist daher das Integral K der Differentialgleichung eine Funktion von

$$\Omega = \int \sqrt{-U(u)}\,du + \int \sqrt{V(v)}\,dv$$

allein.

W A $U \neq 0$ und $V \neq 0$ ist, können wir

(21) $$\int \sqrt{-U(u)}\,du \quad \text{und} \quad \int \sqrt{V(v)}\,dv$$

als Parameter auf beiden Flächen einführen. Da die erste Funktion nur von u und die zweite nur von v abhängt, bleiben dann die Minimalkurven immer noch die Parameterlinien. Alles Vorhergehende bleibt also nach wie vor richtig. Wir dürfen daher voraussetzen, daß von vornherein gerade diese Parameter benutzt worden wären, d. h. daß die beiden Funktionen (21) u und v selbst sind. Dann aber ist $\Omega = u + v$ und mithin K eine Funktion von $u + v$ allein. Infolge davon wird $K_u = K_v$, also $\omega = 1$ nach (15) und somit nach (16) auch

$$\bar{L} = N, \quad \bar{N} = L. \tag{22}$$

Wenn wir schließlich auf der ersten Fläche die Parameter vertauschen und dabei die Orientierung der Fläche ebenfalls ändern, d. h. D durch $-D$ ersetzen, gehen

$$E, \; F, \; G, \; L, \; M, \; N$$

nach XI (A) und XII (B) in

$$G, \; F, \; E, \; N, \; M, \; L$$

über. Da $E = G = 0$ war, bleibt dann nach wie vor $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$ und $M = \bar{M}$, aber jetzt sind L und N miteinander zu vertauschen, so daß statt (22) noch $\bar{L} = L$ und $\bar{N} = N$ hervorgeht. Mithin stimmen die Fundamentalgrößen der ersten Fläche mit denen der zweiten Fläche überein.

In jedem Falle also kann man auf beiden Flächen Parameter u und v derart einführen, daß die Fundamentalgrößen der ersten Fläche identisch werden mit den entsprechenden Fundamentalgrößen der zweiten Fläche, womit wie gesagt nach Satz 24, S. 392, die Kongruenz beider Flächen bewiesen ist. Unser Ergebnis ist der

Satz 37: Liegen zwei Flächen vor, von denen die erste die Parameter u und v und die Fundamentalgrößen E, F, G, L, M, N, die zweite die Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ und die Fundamentalgrößen $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$ hat und sind auf der ersten Fläche das Krümmungsmaß K und die mittlere Krümmung H voneinander unabhängige Funktionen von u und v, so kann die erste Fläche mit der zweiten Fläche nur dann kongruent sein, wenn auch auf der zweiten Fläche das Krümmungsmaß $\bar{K}$ und die mittlere Krümmung $\bar{H}$ voneinander unabhängige Funktionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ sind. Besteht diese Unabhängigkeit, so bildet man zur Entschei-

dung, ob beide Flächen miteinander kongruent sind, bei der ersten Fläche die Differentialinvarianten

$$\triangle_{KK} = \frac{EK_v^2 - 2FK_vK_u + GK_u^2}{EG - F^2}, \quad \triangle_{HH} = \frac{EH_v^2 - 2FH_vH_u + GH_u^2}{EG - F^2},$$

$$H\triangle_{KH} = H\frac{EK_vH_v - F(K_vH_u + H_vK_u) + GK_uH_u}{EG - F^2},$$

$$\nabla_{KK} = H\frac{LK_v^2 - 2MK_vK_u + NK_u^2}{EG - F^2}$$

und bei der zweiten Fläche in entsprechender Weise die Differentialinvarianten

$$\bar{\triangle}_{\bar{K}\bar{K}}, \quad \bar{\triangle}_{\bar{H}\bar{H}}, \quad \bar{H}\bar{\triangle}_{\bar{K}\bar{H}}, \quad \bar{\nabla}_{\bar{K}\bar{K}}.$$

Beide Flächen sind einander dann und nur dann kongruent, wenn sich diese letzten vier Größen genau ebenso als Funktionen von $\bar{K}$ und $\bar{H}^2$ darstellen wie die vier Größen

$$\triangle_{KK}, \quad \triangle_{HH}, \quad H\triangle_{KH}, \quad \nabla_{KK}$$

als Funktionen von K und H^2.

Deshalb sollen die vier Gleichungen

$$(23) \quad \begin{cases} \triangle_{KK} = \Phi_1(K, H^2), & \triangle_{HH} = \Phi_2(K, H^2), \\ H\triangle_{KH} = \Phi_3(K, H^2), & \nabla_{KK} = \Phi_4(K, H^2), \end{cases}$$

die auf einer Fläche, bei der K und H voneinander unabhängig sind, bestehen, die natürlichen Gleichungen der Fläche[1] heißen. Sie gelten für alle mit der Fläche kongruenten Flächen und sonst für keine Fläche.

---

[1] Es ist merkwürdig, daß in Cesàros schon in I S. 92 genannten Werke: „Vorlesungen über natürliche Geometrie", deutsch von Kowalewski, Leipzig 1901, wo man sie am ehesten erwarten sollte, keine natürlichen Gleichungen einer Fläche vorkommen. Wie bei Bianchi, vgl. die Anm. zu S. 433, ist vielmehr auch bei Cesàro nur ein unvollkommener Ersatz dafür gegeben (in § 154). Zuerst hat sich mit dem Kongruenzprobleme der Flächen eingehender Lie beschäftigt und zwar in der Abhandlung: „Zur Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen", Leipziger Berichte 1896. Dort benutzte Lie und nach seinem Vorgange auch der Verf. in der ersten Auflage dieses Buches (1902) die Gleichungen, durch die sich die vier Größen

$$\frac{\partial R_1}{\partial_u s}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial_u s}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial_v s}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial_v s},$$

von denen auf S. 443 die Rede sein wird, als Funktionen der beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 darstellen. Dies Verfahren ist noch unvollkommen, weil dabei mehrwertige Funktionen nicht zu vermeiden sind.

Welche geometrische Bedeutung diese natürlichen Gleichungen haben, erkennt man leicht durch Einführung eines Systems von Parameterlinien, das besonders nahe mit den anschaulichen geometrischen Eigenschaften der Fläche verknüpft ist, nämlich des Netzes der Krümmungskurven. Die Fläche hat wirklich ein Netz von solchen Kurven, denn nach S. 215 trifft dies nur nicht für die Flächen mit lauter außergewöhnlichen Punkten zu, auf denen jedoch $H^2 = 4K$ nach S. 284 ist, also K und H gegen die Voraussetzung voneinander abhängig sind.

Sind die Parameterlinien (v) und (u) die Krümmungskurven, so ist nach Satz 77, S. 221, sowohl $F = 0$ als auch $M = 0$. Da die Fortschreitungsrichtungen der Kurven (v) und (u) zu $k = 0$ und $k = \infty$ gehören, gibt XII(D) die zugehörigen Hauptkrümmungsradien:

$$R_1 = \frac{E}{L}, \qquad R_2 = \frac{G}{N}.$$

Ferner sind die Bogenelemente der Parameterlinien (v) und (u) nach (15), S. 36:

$$d_u s = \sqrt{E}\,du, \qquad d_v s = \sqrt{G}\,dv.$$

Eine Ortsfunktion $f(u, v)$ hat also beim Fortschreiten längs der einen bzw. anderen Richtung die Weggeschwindigkeiten (vgl. S. 417):

$$\frac{\partial f}{\partial_u s} = \frac{f_u}{\sqrt{E}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial_v s} = \frac{f_v}{\sqrt{G}}.$$

In diesen speziellen Formeln ziehen wir es der Deutlichkeit halber vor, die partiellen Differentiationszeichen anzuwenden. Mithin drücken sich die vier Differentialinvarianten so aus:

$$\Delta_{KK} = \left(\frac{\partial K}{\partial_u s}\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial_v s}\right)^2, \qquad \Delta_{HH} = \left(\frac{\partial H}{\partial_u s}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial_v s}\right)^2,$$

$$H\Delta_{KH} = H\left(\frac{\partial K}{\partial_u s}\frac{\partial H}{\partial_u s} + \frac{\partial K}{\partial_v s}\frac{\partial H}{\partial_v s}\right), \qquad \nabla_{KK} = H\left[\frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial K}{\partial_u s}\right)^2 + \frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial K}{\partial_v s}\right)^2\right].$$

Da überdies nach XII (K)

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}, \qquad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{24}$$

ist, bestimmen also die erste und letzte Gleichung (23) die Größen

$$\frac{\partial K}{\partial_u s} \quad \text{und} \quad \frac{\partial K}{\partial_v s}$$

als allerdings zweiwertige Funktionen von R_1 und R_2. Die beiden anderen Gleichungen ergeben darauf auch die Größen

$$\frac{\partial H}{\partial_u s} \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial_v s}$$

als mehrwertige Funktionen von R_1 und R_2. Wegen (24) ist weiterhin:

$$\frac{\partial K}{\partial_u s} = -\frac{1}{R_1^2 R_2}\frac{\partial R_1}{\partial_u s} - \frac{1}{R_1 R_2^2}\frac{\partial R_2}{\partial_u s},$$

$$\frac{\partial H}{\partial_u s} = -\frac{1}{R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial_u s} - \frac{1}{R_2^2}\frac{\partial R_2}{\partial_u s}.$$

Demnach ergeben sich die Größen

$$\frac{\partial R_1}{\partial_u s} \quad \text{und} \quad \frac{\partial R_2}{\partial_u s},$$

d. h. die Weggeschwindigkeiten der Ortsfunktionen R_1 und R_2 in der Richtung der Krümmungskurve (v), als allerdings mehrwertige Funktionen von R_1 und R_2, und schließlich drücken sich ebenso die Größen

$$\frac{\partial R_1}{\partial_v s} \quad \text{und} \quad \frac{\partial R_2}{\partial_v s}$$

aus. Die natürlichen Gleichungen der Fläche geben also an, wie sich die vier Ableitungen der beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 nach den Bogenlängen der Krümmungskurven als Funktionen von R_1 und R_2 selbst darstellen. Aber die Ableitungen sind ebensowenig wie R_1 und R_2 einwertige Funktionen, während in den natürlichen Gleichungen (23) nur einwertige Funktionen auftreten. Deshalb sind die Gleichungen (23) den soeben angedeuteten vorzuziehen.[1]

Schließlich sei noch erwähnt, daß die Aufstellung der natürlichen Gleichungen (23) für eine vorgelegte Fläche

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

nur Differentiationen und Eliminationen verlangt.

§ 13. Flächen, deren Krümmungsmaß und mittlere Krümmung voneinander abhängige Funktionen sind.

Bei der im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten Theorie der Kongruenz von Flächen schlossen wir diejenigen Flächen aus, bei denen das Krümmungsmaß K und die mittlere Krümmung H voneinander abhängige Funktionen der beiden Parameter u und v sind. Diese Flächen bilden eine Familie für sich insofern, als eine Fläche von dieser Art nur mit solchen Flächen kongruent sein kann, die derselben Familie angehören.

---

[1] Vgl. die Anm. zu S. 433 insbes. auf S. 434.

Zu den Flächen, auf denen K und H voneinander abhängig sind, gehören zunächst die in § 17 des 2. Abschnittes betrachteten und erledigten Flächen mit einer und nur einer Schar von Minimalgeraden sowie die Flächen mit zwei Scharen von Minimalgeraden, nämlich die Kugeln und Ebenen. Denn alle diese Flächen zusammen sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß sie nur außergewöhnliche Punkte haben, d. h. daß auf ihnen

$$H^2 - 4K = 0$$

ist, siehe S. 284. Von diesem besonderen Falle dürfen wir daher im folgenden absehen. Demnach betrachten wir hier nur noch Flächen, die nicht lauter außergewöhnliche Punkte haben, denen vielmehr in Punkten allgemeiner Lage Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 zukommen. Da nach XII (K)

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}, \qquad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ist, sind alsdann die zu untersuchenden Flächen auch zu kennzeichnen als diejenigen Flächen, bei denen die beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 voneinander abhängige Funktionen sind. Man sagt auch: Es sind diejenigen Flächen, bei denen die beiden Hauptkrümmungsradien durch eine Relation verbunden sind.[1] Man sieht sofort, daß zu diesen Flächen alle nicht-zylindrischen Minimalflächen gehören, da auf ihnen $R_1 + R_2 = 0$ ist, siehe S. 308. Ferner gehören hierher alle Flächen konstanter Krümmung außer den in Satz 115, S. 294, angegebenen Flächen mit Minimalgeraden und außer den Kugeln und Ebenen. Auch die Rotationsflächen gehören hierher, denn nach S. 138 sind die beiden Hauptkrümmungsradien einer Rotationsfläche Funktionen von nur einer Veränderlichen, nämlich von der Bogenlänge der Meridiankurve.

Da wir die Flächen mit lauter außergewöhnlichen Punkten beiseite lassen, können wir wie auf S. 442 annehmen, daß die Parameterlinien die Krümmungskurven seien. Ehe wir uns aber

[1] Daß diese Flächen eine besondere Rolle spielen, bemerkte zuerst Weingarten, dem man eine Reihe wichtiger Untersuchungen darüber verdankt. Nach ihm nennt man sie Weingartensche Flächen oder auch kürzer W-Flächen. Wir erwähnen namentlich die Abhandlungen: „Über eine Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen“, Journal f. d. r. u. a. Math. 59. Bd. (1861), „Über die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Funktion des andern ist“, ebenda 62. Bd. (1862).

zu den zu betrachtenden Flächen insbesondere wenden, wollen wir die Gelegenheit benutzen, einmal alle diejenigen Formeln zusammenzustellen, die aus unseren allgemeinen Formeln hervorgehen, wenn auf einer beliebigen Fläche mit gewöhnlichen Punkten die Parameterlinien die Krümmungskurven sind.

Nach Satz 77, S. 221, und nach XI (C) ist in diesem Falle

(1) $$F = M = 0, \quad D^2 = EG.$$

Die Fundamentalgleichungen (9), (10), (11), S. 338 u. f., nehmen daher die Form an:

(2) $$\begin{cases} L_v = \frac{1}{2} E_v \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right), \\ LN = -\frac{1}{2} E_{vv} - \frac{1}{2} G_{uu} + \frac{1}{4} \frac{E_v^2 + E_u G_u}{E} + \frac{1}{4} \frac{G_u^2 + E_v G_v}{G}, \\ N_u = \frac{1}{2} G_u \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right). \end{cases}$$

Ferner ist, wenn R_1 denjenigen Hauptkrümmungsradius bezeichnet, der zur Tangente der Krümmungskurve (v) gehört:

(3) $$R_1 = \frac{E}{L}, \quad R_2 = \frac{G}{N},$$

vgl. S. 442, so daß die erste und dritte Fundamentalgleichung auch so geschrieben werden können:

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{E}{R_1} = \frac{1}{2} E_v \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{G}{R_2} = \frac{1}{2} G_u \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

oder:

(4) $$\frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\sqrt{E}}{R_1} = \frac{1}{R_2 - R_1} \frac{\partial R_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\sqrt{G}}{R_2} = \frac{1}{R_1 - R_2} \frac{\partial R_2}{\partial u}.$$

Hierin treten die Wurzeln nur scheinbar auf, so daß wir über ihre Einwertigkeit nichts festzusetzen brauchen. Die zweite Fundamentalgleichung (2) läßt sich wegen (3) so schreiben:

$$-\frac{\sqrt{EG}}{R_1 R_2} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{E_v}{2\sqrt{EG}}$$

oder:

(5) $$-\frac{\sqrt{EG}}{R_1 R_2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right).$$

Auch hier treten die Wurzeln nur scheinbar auf.

Nach XII (R) kommt ferner wegen (1) und (3):

(6) $$\begin{cases} X_u = -\frac{x_u}{R_1}, & Y_u = -\frac{y_u}{R_1}, & Z_u = -\frac{z_u}{R_1}, \\ X_v = -\frac{x_v}{R_2}, & Y_v = -\frac{y_v}{R_2}, & Z_v = -\frac{z_v}{R_2}. \end{cases}$$

Die Formeln (1) bis (6) gelten für beliebige Flächen, vorausgesetzt, daß ihre Parameterlinien (u) und (v) die Krümmungskurven sind.

Wir wollen nun diejenigen Flächen betrachten, auf denen eine Gleichung zwischen den beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 besteht:

$$\Omega(R_1, R_2) = 0.$$

Im besonderen kann diese Gleichung die Form $R_1 =$ konst. oder $R_2 =$ konst. haben. Es ist leicht, alle Flächen, auf denen einer der Hauptkrümmungsradien konstant ist, zu ermitteln. Ist nämlich z. B.

$$R_1 = \text{konst.},$$

so lehren die drei ersten Formeln (6), daß die Ausdrücke

$$x + R_1 X, \quad y + R_1 Y, \quad z + R_1 Z$$

von u frei sind. Dies sind die Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ des Mittelpunktes des ersten Hauptkrümmungskreises des Flächenpunktes (u, v). Sie hängen also nur von v ab, d. h. der geometrische Ort der Mittelpunkte der ersten Hauptkrümmungskreise ist eine Kurve $\mathfrak{c}$, indem zu allen Punkten einer Krümmungskurve (v) derselbe Mittelpunkt gehört. Aber noch mehr, aus:

$$\mathfrak{x} = x + R_1 X, \quad \mathfrak{y} = y + R_1 Y, \quad \mathfrak{z} = z + R_1 Z$$

folgt, daß längs der Kurve $\mathfrak{c}$ mit dem Parameter v

$$\mathfrak{x}' = x_v + R_1 X_v, \quad \mathfrak{y}' = y_v + R_1 Y_v, \quad \mathfrak{z}' = z_v + R_1 Z_v$$

ist. Somit wird

$$\mathsf{S}\,\mathfrak{x}'(x - \mathfrak{x}) = -R_1 \mathsf{S}(x_v + R_1 X_v) X = -R_1 \mathsf{S}\, X x_v - R_1^2 \mathsf{S}\, X X_v.$$

Nach XI (H) und XI (I) gilt daher die in x, y, z lineare Gleichung:

$$\mathsf{S}\,\mathfrak{x}'(x - \mathfrak{x}) = 0.$$

Da $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ nur von v abhängen, heißt dies: Jede Kurve (v) liegt in einer Ebene, die durch den zugehörigen Mittelpunkt ($\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$) geht und deren Normale Richtungskosinus proportional zu $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ hat und deshalb der Tangente der Mittelpunktskurve $\mathfrak{c}$ im Punkte ($\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$) parallel ist. Da alle Punkte (x, y, z) der Kurve (v) vom zu-

gehörigen Mittelpunkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ denselben Abstand R_1 haben, ist daher jede Kurve (v) ein Kreis vom konstanten Radius R_1, dessen Mittelpunkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ auf einer Kurve $\mathfrak{c}$ liegt und dessen Ebene zur Tangente von $\mathfrak{c}$ in diesem Mittelpunkte senkrecht ist. Also ist die Fläche eine Röhrenfläche (vgl. das 2. Beispiel und Fig. 79, S. 220).

Stillschweigend haben wir hierbei vorausgesetzt, daß die konstante Größe R_1 endlich sei. Wird $R_1 = \infty$, so ist $L = 0$ nach (3), d. h. wegen (1) auch $LN - M^2 = 0$. Die Fläche ist dann abwickelbar, nach Satz 28, S. 266. Umgekehrt leuchtet ein, daß auf jeder abwickelbaren Fläche der eine Hauptkrümmungsradius unendlich groß ist, denn die Krümmungskurven der einen Schar sind hier nach S. 215 die Erzeugenden, und die Normalen der Fläche längs einer Erzeugenden sind einander parallel, nach Satz 9, I S. 376, treffen sich also erst im Unendlichen.

Sollen beide Hauptkrümmungsradien einer Fläche konstant sein, so sind verschiedene Fälle denkbar: Sind zunächst R_1 und R_2 beide endlich, aber verschieden, so folgt aus (4), daß E nur von u und G nur von v abhängt, so daß das Quadrat des Bogenelements ist:

$$ds^2 = E(u)\,du^2 + G(v)\,dv^2.$$

Indem man $\int\sqrt{E}\,du$ und $\int\sqrt{G}\,dv$ als neue Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ einführt, bringt man es alsdann auf die Form:

$$ds^2 = d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2.$$

Dies aber ist das Quadrat des Bogenelements in der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten $\bar{u}, \bar{v}$, so daß die Fläche abwickelbar wäre; nach I S. 383 u. f. Dann aber wäre ein Hauptkrümmungsradius unendlich groß, so daß sich ein Widerspruch ergibt. Daher ist, wenn R_1 und R_2 konstant und endlich sein sollen, nur der Fall $R_1 = R_2$ möglich. Aber dann sind alle Punkte der Fläche außergewöhnlich, es handelt sich eben um eine der ausgeschlossenen Kugeln.

Ist R_1 konstant und endlich, aber $R_2 = \infty$, so ist die Fläche einerseits eine Röhrenfläche mit lauter kongruenten Kreisen (v) und andererseits abwickelbar. Dabei müssen die Geraden der Fläche als Krümmungskurven (u) jene Kreise senkrecht schneiden. Aber die Tangenten der Kurven (u) sind nach S. 220 den Tangenten der Mittelpunktskurve $\mathfrak{c}$ parallel. Also ist der Ort der Kreismitten eine Gerade, die Fläche daher ein Rotationszylinder.

Sind endlich R_1 und R_2 beide unendlich groß, so artet der Zylinder in die Ebene aus. Daher gilt der

Satz 38: Ist einer der Hauptkrümmungsradien einer Fläche konstant und endlich, so ist die Fläche eine Röhrenfläche; wird er unendlich groß, so wird sie insbesondere eine abwickelbare Fläche. Der Fall, wo beide Hauptkrümmungsradien konstant, aber endlich und verschieden sind, kommt gar nicht vor. Ist der eine endlich und konstant, während der andere unendlich groß wird, so wird die Fläche ein Rotationszylinder. Werden beide unendlich groß, so wird die Fläche eine Ebene.

Da wir somit die Flächen kennen, auf denen wenigstens ein Hauptkrümmungsradius konstant ist, können wir von jetzt an von ihnen absehen. Wir wollen jetzt diejenigen Flächen untersuchen, auf denen eine Gleichung zwischen den beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 besteht:

$$\Omega(R_1, R_2) = 0 \tag{7}$$

und weder R_1 noch R_2 konstant ist und überdies $R_1 \neq R_2$ ist.

Infolge von (7) ist R_1 als Funktion von R_2 oder umgekehrt R_2 als Funktion von R_1 aufzufassen. Aus (4) folgt dann, daß von den beiden Funktionen

$$\log \frac{\sqrt{E}}{R_1} - \int \frac{dR_1}{R_2 - R_2}, \qquad \log \frac{\sqrt{G}}{R_2} - \int \frac{dR_2}{R_1 - R_2}$$

die erste von u allein und die zweite von v allein abhängt, so daß

$$E = R_1^2\, U(u)\, e^{2\int \frac{dR_1}{R_2 - R_1}}, \qquad G = R_2^2\, V(v)\, e^{2\int \frac{dR_2}{R_1 - R_2}} \tag{8}$$

wird, wo U nur von u und V nur von v abhängt. Unter dem ersten Integral ist natürlich für R_2 die aus (7) folgende Funktion von R_1 zu setzen, unter dem zweiten dagegen für R_1 die aus (7) folgende Funktion von R_2. Weder U noch V kann gleich Null sein, weil sonst $D = 0$ wäre.

Wenn wir jetzt neue Parameter

$$\bar{u} = \int \sqrt{U}\, du, \qquad \bar{v} = \int \sqrt{V}\, dv$$

einführen, wobei die Krümmungskurven nach wie vor die Parameterlinien bleiben, da $\bar{u}$ nur von u und $\bar{v}$ nur von v abhängt, werden die Koordinaten x, y, z Funktionen von $\bar{u}$, $\bar{v}$, und zwar ist:

$$x_{\bar{u}} \sqrt{U} = x_u, \qquad x_{\bar{v}} \sqrt{V} = x_v$$

usw., so daß nach XI (A) für die neuen Fundamentalgrößen $\bar{E}$, $\bar{G}$ kommt:

$$\bar{E} = \mathsf{S}\,\bar{x}_u^{\,2} = \mathsf{S}\,\frac{x_u^2}{U^2} = \frac{E}{U}, \qquad \bar{G} = \frac{G}{V},$$

also nach (8):

$$\bar{E} = R_1^{\,2} e^{2\int \frac{dR_1}{R_2 - R_1}}, \quad \bar{G} = R_2^{\,2} e^{2\int \frac{dR_2}{R_1 - R_2}}.$$

Wir dürfen annehmen, wir hätten schon vor der Aufstellung der Formeln (1) bis (6) die neuen Parameter benutzt, d. h. wir dürfen annehmen, daß in den Formeln (1) bis (6) die Größen E und G die soeben gefundenen Werte $\bar{E}$, $\bar{G}$ haben, also:

(9) $$E = R_1^{\,2} e^{2\int \frac{dR_1}{R_2 - R_1}}, \quad G = R_2^{\,2} e^{2\int \frac{dR_2}{R_1 - R_2}}$$

sei.

Dabei haben wir in der ersten Formel (9) die Größe R_2 als Funktion von R_1 und in der zweiten Formel (9) die Größe R_1 als Funktion von R_2 aufgefaßt, definiert durch (7). Wir können natürlich auch R_1 und R_2 beide als Funktionen einer dritten Größe, einer Hilfsveränderlichen w auffassen, z. B. dieser:

(10) $$w = e^{\int \frac{dR_1}{R_1 - R_2}}.$$

Wenn wir aus (7) die Größe R_2 als Funktion von R_1 berechnen und in diesen Ausdruck w einsetzen, wird w eine Funktion von R_1 allein, die keine Konstante ist. Umgekehrt ist dann auch R_1 eine Funktion von w, etwa:

(11) $$R_1 = \vartheta(w).$$

Wegen (10) ist alsdann

$$\frac{1}{R_1 - R_2}\,\frac{dR_1}{dw} = \frac{1}{w}$$

oder

$$\frac{\vartheta'}{\vartheta - R_2} = \frac{1}{w},$$

woraus folgt:

(12) $$R_2 = \vartheta - w\,\vartheta'.$$

Wenn wir unter $\vartheta(w)$ irgend eine Funktion der Hilfsveränderlichen w verstehen und darauf R_1 und R_2 durch die Formeln (11) und (12) als Funktionen von w definieren, wird die Elimination von w aus (11) und (12) eine Gleichung (7) zwischen R_1 und R_2 geben. Man erkennt also, daß man die Gleichung (7) durch die beiden Gleichungen (11) und (12) ersetzen kann.

Wenn wir nun die Werte (11) und (12) in (9) einführen, wobei infolge von (11) und (12):

$$dR_1 = \vartheta' dw, \qquad dR_2 = -w\vartheta'' dw$$

ist, kommt, weil dann auch (10) besteht:

(13) $$E = \frac{\vartheta^2}{w^2},$$

während

$$G = (\vartheta - w\vartheta')^2 e^{-2\int \frac{\vartheta''}{\vartheta'} dw},$$

also

(14) $$G = a\left(\frac{\vartheta - w\vartheta'}{\vartheta'}\right)^2 \qquad (a = \text{konst.})$$

wird. Wenn wir statt v einen neuen Parameter $\bar{v} = cv$ einführen, wobei c eine Konstante bedeute, sind x, y, z Funktionen der neuen Parameter:

$$\bar{u} = u, \qquad \bar{v} = cv,$$

und nunmehr wird:

$$x_{\bar{u}} = x_u, \qquad x_{\bar{v}} = \frac{1}{c} x_v$$

usw., so daß die neuen Fundamentalgrößen $\bar{E}$ und $\bar{G}$ nach XI (A) sind:

$$\bar{E} = \mathbf{S}\,\bar{x}_u^{\,2} = \mathbf{S}\,x_u^{\,2} = E, \qquad \bar{G} = \mathbf{S}\,\bar{x}_v^{\,2} = \frac{1}{c^2}\,\mathbf{S}\,x_v^{\,2} = \frac{G}{c^2}.$$

Wählen wir $c^2 = a$, so kommt also nach (13) und (14)

$$\bar{E} = \frac{\vartheta^2}{w^2}, \qquad \bar{G} = \left(\frac{\vartheta - w\vartheta'}{\vartheta'}\right)^2.$$

Da auch nach Einführung der neuen Parameter die Krümmungskurven die Parameterlinien sind, dürfen wir wieder annehmen, wir hätten von vornherein, v o r Aufstellung der Formeln von (1) an, diese besonderen Parameter benutzt, d. h. wir dürfen setzen:

(15) $$E = \frac{\vartheta^2}{w^2}, \qquad G = \left(\frac{\vartheta - w\vartheta'}{\vartheta'}\right)^2.$$

Nach (3), (11), (12) und (15) kommt außerdem noch:

$$L = \frac{E}{R_1} = \frac{\vartheta}{w^2}, \qquad N = \frac{G}{R_2} = \frac{\vartheta - w\vartheta'}{\vartheta'^2}.$$

Also hat sich ergeben:

Satz 39: Besteht auf einer Fläche, die keine Schar von Minimalgeraden enthält, eine Gleichung zwischen den beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2, ist aber weder

R_1 noch R_2 konstant, so kann man die Fundamentalgrößen der Fläche durch Einführung geeigneter Parameter u, v auf die Form bringen:

$$E = \frac{\vartheta^2}{w^2}, \quad F = 0, \quad G = \left(\frac{\vartheta - w\vartheta'}{\vartheta'}\right)^2,$$
$$L = \frac{\vartheta}{w^2}, \quad M = 0, \quad N = \frac{\vartheta - w\vartheta'}{\vartheta'^2},$$

während

$$R_1 = \vartheta, \quad R_2 = \vartheta - w\vartheta'$$

ist. Dabei bedeutet w eine Funktion der Parameter u, v der Fläche und ϑ eine Funktion von w allein.

Es fragt sich nun aber, ob man w irgendwie als Funktion von u, v und ϑ irgendwie als Funktion von w wählen darf. Wir wissen nach Satz 25, S. 392, daß zu gegebenen Fundamentalgrößen in der Tat Flächen vorhanden sind, falls die Fundamentalgleichungen erfüllt werden. Wenn wir die im Satze 39 angegebenen Fundamentalgrößen benutzen, werden nun die Fundamentalgleichungen wegen $F = M = 0$ die Gleichungen (2). Ferner sind dann R_1 und R_2 durch (3) gegeben. Man überzeugt sich sofort, daß die im Satze angegebenen Werte von R_1 und R_2 die Gleichungen (3) erfüllen. Wir haben die Fundamentalgleichungen mittels (3) auf die Formen (4) und (5) gebracht. Die Gleichungen (4) werden augenscheinlich befriedigt, nicht so die Gleichung (5). Denn zunächst können wir für $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ nach dem Satze die Werte

$$\frac{\vartheta}{w}, \quad \frac{\vartheta - w\vartheta'}{\vartheta'}$$

nehmen, da die Wurzeln, wie schon bemerkt wurde, in (5) nur scheinbar auftreten. Alsdann aber kommen für

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$$

die Werte

$$-\frac{\vartheta'' w w_u}{\vartheta'^2} \quad \text{und} \quad -\frac{\vartheta' w_v}{w^2},$$

so daß die Gleichung (5), — die einzige noch zu erfüllende Bedingung —, die Form annimmt:

$$\frac{1}{w\vartheta'} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\vartheta'' w w_u}{\vartheta'^2} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\vartheta' w_v}{w^2}.$$

Wir finden also:

Satz 40: Nur dann, wenn man w so als Funktion von u und v und ϑ so als Funktion von w wählt, daß die Bedingung

$$\frac{1}{w\vartheta'} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\vartheta'' w w_u}{\vartheta'^2} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\vartheta' w_v}{w^2}$$

für alle Werte von u und v erfüllt wird, gibt es Flächen mit den in Satz 39 angegebenen Fundamentalgrößen.

Nehmen wir jetzt an, eine Fläche sei uns irgendwie durch ihre endlichen Gleichungen gegeben, ausgedrückt mittels zweier Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$:

(16) $$x = \varphi(\bar{u}, \bar{v}), \quad y = \chi(\bar{u}, \bar{v}), \quad z = \psi(\bar{u}, \bar{v}).$$

Wir können dann leicht entscheiden, ob sie zu den hier betrachteten Flächen gehört. Wir berechnen nämlich die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 als Funktionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ nach XII (K) und untersuchen, ob die Funktionaldeterminante von R_1 und R_2 hinsichtlich $\bar{u}$ und $\bar{v}$ gleich Null ist. Ist dies der Fall, so besteht eine Gleichung zwischen R_1 und R_2, sonst nicht. Wenn eine Gleichung besteht, ergibt sie sich, indem man aus den gefundenen Werten von R_1 und R_2 etwa $\bar{u}$ eliminiert, wobei dann zugleich $\bar{v}$ von selbst verschwinden muß.

Wir wollen nun annehmen, bei der Fläche (16) sei wirklich eine solche Gleichung vorhanden, die nach R_2 aufgelöst etwa ergebe:

(17) $$R_2 = \varrho(R_1),$$

indem wir den Fall $R_1 =$ konst. beiseite lassen, und wollen uns fragen, wie man alsdann die in Satz 39 benutzten Parameter u und v findet, die vorläufig ja noch unbekannte Funktionen der in (16) auftretenden Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$ sind. Es muß eine noch unbekannte Funktion w von u, v und eine noch unbekannte Funktion ϑ von w geben, so daß in Gemäßheit des Satzes

$$R_1 = \vartheta, \quad R_2 = \vartheta - w\vartheta'$$

wird. Natürlich kann w auch als Funktion der Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ aufgefaßt werden. Als solche aber kann sie und zugleich ϑ leicht berechnet werden, denn nach (17) ist zu fordern:

$$\vartheta - w\vartheta' = \varrho(\vartheta)$$

oder, da ϑ nur von w abhängt:

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta - \varrho(\vartheta)} = \frac{dw}{w},$$

woraus durch eine Quadratur hervorgeht:

$$\int \frac{d\vartheta}{\vartheta - \varrho(\vartheta)} = \log w + \text{konst.}$$

Ist die Quadratur ausgeführt, so gibt die Auflösung dieser Gleichung nach ϑ die gesuchte Funktion ϑ von w, wobei noch eine willkürliche Konstante auftritt. Nun folgt, da R_1 als Funktion von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ bekannt ist, aus

$$R_1 = \vartheta(w)$$

durch Auflösung nach w auch der Wert von w als Funktion der ursprünglichen Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$.

Jetzt gehen wir daran, die zugehörigen Parameter u und v als Funktionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ zu finden. Sind

(18) $$u = \lambda(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = \mu(\bar{u}, \bar{v})$$

diese unbekannten Funktionen, so ist längs der Krümmungskurven (u) bzw. (v) der Fläche $du = 0$ bzw. $dv = 0$, d. h. entweder

(19) $$\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} d\bar{u} + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} d\bar{v} = 0$$

oder

(20) $$\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}} d\bar{u} + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} d\bar{v} = 0.$$

Nun aber lautet die Differentialgleichung der Krümmungskurven in den ursprünglichen Parametern $\bar{u}$, $\bar{v}$, wenn $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$, $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ die zugehörigen als Funktionen von $\bar{u}$, $\bar{v}$ bekannten Fundamentalgrößen bedeuten, nach XII (U) so:

$$\begin{vmatrix} d\bar{v}^2 & \bar{E} & \bar{L} \\ -d\bar{u}\,d\bar{v} & \bar{F} & \bar{M} \\ d\bar{u}^2 & \bar{G} & \bar{N} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $d\bar{v} : d\bar{u}$, die sich in zwei lineare Gleichungen zerspalten läßt. Es ergeben sich dabei etwa die Gleichungen

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{u}} = \alpha(\bar{u}, \bar{v}), \quad \frac{d\bar{v}}{d\bar{u}} = \beta(\bar{u}, \bar{v})$$

als die Differentialgleichungen der Krümmungskurven. Darin sind α und β bekannte Funktionen von $\bar{u}$, $\bar{v}$. Nun muß (19) durch den einen, (20) durch den anderen Wert von $d\bar{v} : d\bar{u}$ befriedigt werden, d. h. es muß sein:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} \alpha = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} \beta = 0.$$

Dies sind zwei Bedingungen für die unbekannten Funktionen λ und μ von $\bar{u}$ und $\bar{v}$, aus denen folgt:

$$(21) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} = -\alpha \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}} = -\beta \frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}.$$

Außerdem wissen wir, daß die noch unbekannten auf u und v bezüglichen Fundamentalgrößen E, F, G den in (9), S. 17, aufgestellten Bedingungen genügen, die sich infolge von (21), da $\bar{F} = 0$ sein muß, vereinfachen:

$$(22) \qquad \begin{cases} \bar{E} = \alpha^2 E \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\right)^2 + \beta^2 G \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}\right)^2, \\ \bar{F} = -\alpha E \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\right)^2 - \beta G \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}\right)^2, \\ \bar{G} = E \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\right)^2 + G \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}\right)^2. \end{cases}$$

Nun sind uns zwar E, F, G als Funktionen von u und v unbekannt, aber wir können sie als Funktionen von $\bar{u}$, $\bar{v}$ darstellen. Denn sie müssen die in Satz 39 angegebenen Werte haben, und darin sind uns ϑ und w, wie wir sahen, als Funktionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ bekannt, so daß wir also E, F, G als Funktionen von $\bar{u}$, $\bar{v}$ kennen, wobei allerdings noch eine willkürliche Konstante auftritt. In den Gleichungen (22) sind also nur

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}$$

unbekannte, alle anderen Größen dagegen bekannte Funktionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$, und außerdem tritt eine noch nicht näher bestimmte Konstante auf. Da $\alpha \neq \beta$ ist, weil sonst die beiden Scharen von Krümmungskurven zusammenfallen würden, ergeben schon zwei der drei Gleichungen (22) durch Auflösen nach

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}$$

diese Größen als bekannte Funktionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$. Es kann sein, daß dabei die noch auftretende Konstante beliebig bleiben darf oder aber bestimmt gewählt werden muß, damit die drei Gleichungen (22) einander nicht widersprechen. Aus (21) ergeben sich weiterhin auch

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}$$

als Funktionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$. Entweder tritt in den Ausdrücken für diese vier partiellen Ableitungen noch eine willkürliche Konstante auf oder nicht. Da es jedenfalls Funktionen λ und μ geben muß,

weil der Satz 39 gilt, werden für einen gewissen Wert der Konstanten die gefundenen Ausdrücke den Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial \bar{v}}\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{v}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}$$

Genüge leisten, so daß sich durch je eine Quadratur auch λ und μ selbst als Funktionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ bestimmen lassen. Da wir somit die Gleichungen (18) zwischen den ursprünglichen Parametern $\bar{u}, \bar{v}$ und den neuen Parametern u, v kennen, macht die Zurückführung der Flächengleichungen (16) auf diejenige Form, die in Satz 39 benutzt worden ist, keine Schwierigkeiten mehr. Zugleich haben wir die endlichen Gleichungen

$$\lambda(\bar{u}, \bar{v}) = \text{konst.}, \qquad \mu(\bar{u}, \bar{v}) = \text{konst.}$$

der Krümmungskurven gefunden. Daher hat sich noch ergeben:

Satz 41: Besteht auf einer Fläche eine Gleichung zwischen ihren beiden Hauptkrümmungsradien, so verlangt die Bestimmung ihrer Krümmungskurven nur Eliminationen und Quadraturen.[1]

In dem besonderen Fall einer Röhrenfläche haben wir dies schon auf S. 220 erkannt.

Die Formeln des Satzes 39 lehren, daß man auf den hier betrachteten Flächen Parameter u und v in der Art einführen kann, daß alle sechs Fundamentalgrößen Funktionen von nur einer Funktion $w(u, v)$ werden. Diese Eigenschaft ist charakteristisch: Kann man nämlich auf einer Fläche Parameter u und v so einführen, daß alle sechs Fundamentalgrößen nur von einer Funktion w von u und v abhängen, so werden nach XII (K) auch R_1 und R_2 Funktionen von w allein, so daß zwischen R_1 und R_2 eine Gleichung besteht. Demnach gilt der

Satz 42: Auf einer Fläche mit den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 lassen sich dann und nur dann Parameter u und v derart einführen, daß alle sechs Fundamental-

[1] Siehe Lie, „Über Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind", Archiv for Math. og Naturv. 4. Bd. (1880), oder die Übersetzung dieser Abhandlung: „Sur les surfaces dont les rayons de courbure ont entre eux une relation", Bulletin des sciences math. 2. Serie, 4. Bd. (1880). Insbesondere für die Minimalflächen, die ja zu den Flächen des Satzes 41 gehören, ist der Satz schon früher von Roberts bewiesen orden: „Sur la surface dont les rayons de courbure sont égaux, mais dirigés en sens opposés", Journ. de Math. p. et appl. 1. Serie, 11. Bd. (1846).

größen voneinander abhängig werden, sobald zwischen R_1 und R_2 eine Gleichung besteht.

Auf Grund der vorhergehenden Betrachtungen kann man das Problem der Kongruenz zweier Flächen, bei denen zwischen R_1 und R_2 eine Gleichung vorhanden ist, lösen. Wir begnügen uns jedoch nur mit dieser Andeutung sowie mit der Bemerkung, daß man auch für die Flächen von dieser Art natürliche Gleichungen (vgl. S. 441) aufstellen kann, mit deren Hilfe dasselbe Problem lösbar wird. —

Zu den hier untersuchten Flächen gehören insbesondere die Flächen, auf denen die mittlere Krümmung

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

konstant ist. Werden in diese Gleichung die Werte von R_1 und R_2 eingesetzt, so gibt Satz 39 für ϑ die Bedingung

$$\frac{(H\vartheta - 1)\,d\vartheta}{(H\vartheta - 2)\,\vartheta} = \frac{dw}{w},$$

die beiderseits integriert werden kann, weil hier H eine Konstante bedeutet. Es kommt:

$$\frac{1}{2}\log(H\vartheta - 2)\,\vartheta = \log w + \text{konst.} \tag{23}$$

oder:

$$\vartheta = \frac{1 + \sqrt{1 + c\,w^2}}{H} \qquad (c = \text{konst.}) \tag{24}$$

Weiterhin ist nach Satz 39 auch

$$\frac{E}{G} = \frac{\vartheta^2 (H\vartheta - 2)^2}{w^4} = \frac{c^2}{H^2},$$

also konstant.

Nach Satz 29, S. 69, folgt hieraus, daß die Parameterlinien ein Isothermennetz bilden. Ehe wir dies als Satz formulieren, erinnern wir daran, daß dabei die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden ausgeschlossen sind, auf denen entweder nur diese Minimalgeraden Krümmungskurven sind oder — im Falle der Kugeln und Ebenen — jede Kurve als Krümmungskurve zu bezeichnen ist. Siehe S. 215. Wir sagen also:

Satz 43: Auf einer Fläche von konstanter mittlerer Krümmung, die keine Schar von Minimalgeraden enthält, bilden die Krümmungskurven ein Isothermennetz.[1]

[1] Bonnet, „Note sur la théorie générale des surfaces", Comptes Rendus 37. Bd. (1853). Siehe auch die in der ersten Anm. auf S. 272 genannte Abhandlung.

Allerdings gilt die Schlußfolgerung von (23) auf (24) nicht im Falle $H = 0$, d. h. im Falle einer Minimalfläche (nach S. 300). Vielmehr kommt dann $\vartheta = cw^2$, also nach Satz 39:

$$\frac{E}{G} = 4c^2. \tag{25}$$

Mithin wird $E:G$ auch in diesem Falle konstant, so daß der Satz 43 auch für die nicht-zylindrischen Minimalflächen (vgl. Satz 122, S. 307) richtig ist. Das ergab sich schon in Satz 132, S. 317.

Ferner lautet die Differentialgleichung der Minimalkurven einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung, da auch $F = 0$ ist, nach XI (*O*) im Falle $H \neq 0$:

$$c^2 du^2 + H dv^2 = 0,$$

woraus einzeln

$$c\,du + iH dv = 0 \quad \text{und} \quad c\,du - iH dv = 0$$

folgt. Mithin sind

$$cu \pm iHv = \text{konst.}$$

die endlichen Gleichungen der beiden Scharen von Minimalkurven. Im Falle $H = 0$ dagegen ergibt sich:

$$2cu \pm iv = \text{konst.}$$

Da die Einführung der hier benutzten Parameter bloß Eliminationen und Quadraturen erfordert, kann man also die Minimalkurven einer in irgend einer Art vorgelegten Fläche konstanter mittlerer Krümmung durch Eliminationen und Quadraturen bestimmen.[1] Insbesondere ergibt sich dies für die Minimalflächen auch aus den Betrachtungen auf S. 324, wenn man sie auf die nicht-reellen Minimalflächen sinngemäß ausdehnt.

Auch auf alle Flächen konstanter Krümmung K, abgesehen von den in Satz 114, S. 294, bestimmten Flächen konstanter Krümmung mit Scharen von Minimalgeraden, ist der Satz 39 anwendbar. Er gibt hier

$$\vartheta(\vartheta - w\vartheta') = \frac{1}{K}$$

oder

$$\frac{1}{2}\frac{d(\vartheta^2)}{\vartheta^2 - \frac{1}{K}} = \frac{dw}{w},$$

woraus durch Integration folgt:

$$\frac{1}{2}\log\left(\vartheta^2 - \frac{1}{K}\right) = \log w + \text{konst.}$$

[1] Nach Lie, siehe die Abhandlungen in der Anmerkung zu S. 455.

oder auch:

$$\vartheta^2 = \frac{1}{K} + c\,w^2 \qquad (c = \text{konst.}).$$

Nach demselben Satze ist weiterhin:

$$L\vartheta' = \frac{\vartheta\vartheta'}{w^2} = \frac{c}{w}, \qquad M = 0, \qquad N\vartheta' = \frac{1}{K c w}.$$

Die Differentialgleichung der Haupttangentenkurven nimmt also nach XII (X) die einfache Gestalt an:

$$K c^2 du^2 + dv^2 = 0$$

und liefert die beiden einzelnen Gleichungen:

$$\pm c\sqrt{K}\,du + dv = 0,$$

woraus folgt, daß

$$\pm c\sqrt{K}\;\;u + \;\;v = \text{konst.}$$

die endlichen Gleichungen der Haupttangentenkurven sind. Hieraus und aus Satz 41 folgt also:

Satz 44: Die Krümmungskurven und Haupttangentenkurven einer Fläche konstanter Krümmung lassen sich durch Eliminationen und Quadraturen bestimmen.

§ 14. Merkmale der Verbiegbarkeit von Flächen aufeinander.

Ehe wir die in der Überschrift angedeutete Untersuchung aufnehmen, wollen wir einige Bemerkungen allgemeinerer Art über den auch in dieser Untersuchung auftretenden und auf S. 429 unter (13) definierten Differentialparameter

$$(1) \qquad \triangle_{fg} = \frac{E f_v g_v - F(f_v g_u + g_v f_u) + G f_u g_u}{EG - F^2}$$

vorausschicken.

Zunächst eine Bemerkung, die sich auf die Einführung neuer Parameter bei einer Fläche

$$(2) \qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

bezieht. Wir sahen, wie sich aus den Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G der Fläche die Werte der Fundamentalgrößen $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ gewinnen lassen, die zu neuen Parametern $\bar{u}$, $\bar{v}$ gehören. Sind nämlich $\lambda(\bar{u}, \bar{v})$ und $\mu(\bar{u}, \bar{v})$ zwei voneinander unabhängige Funktionen und setzt man

$$u = \lambda(\bar{u}, \bar{v}), \qquad v = \mu(\bar{u}, \bar{v}),$$

so kann man $\bar{u}$ und $\bar{v}$ als die hierdurch definierten neuen Parameter benutzen, und dann gelten für $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ die Formeln (9), S. 17, die auf S. 425 unter (5) wiederkehrten. Nun lassen sich diese Formeln mit Hilfe des Differentialparameters Δ_{fg} einfacher schreiben.

Wir wissen, daß Δ_{fg} bei der Einführung neuer Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ seinen Wert behält, falls f und g ihre Werte behalten, siehe Satz 35, S. 429. Dies aber ist der Fall, wenn wir unter f und g zwei voneinander unabhängige Funktionen von u und v verstehen und neue Parameter $\bar{u}, \bar{v}$ vermöge der Gleichungen

$$(3) \qquad \bar{u} = f(u, v), \qquad \bar{v} = g(u, v)$$

einführen. Denn eben wegen dieser Gleichungen sind dann die Werte von f und g für den Punkt $(\bar{u}, \bar{v})$ in der neuen Darstellung dieselben wie für d e n s e l b e n durch die alten Parameter u, v dargestellten Punkt (u, v). Mithin ist

$$(4) \qquad \bar{\Delta}_{\bar{f}\bar{f}} = \Delta_{ff}, \quad \bar{\Delta}_{\bar{f}\bar{g}} = \Delta_{fg}, \quad \bar{\Delta}_{\bar{g}\bar{g}} = \Delta_{gg}.$$

Dabei soll natürlich entsprechend (1) allgemein:

$$\bar{\Delta}_{\bar{f}\bar{g}} = \frac{\bar{E}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{v}}\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{v}} - \bar{F}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{v}}\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{v}}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}}\right) + \bar{G}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{u}}}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}$$

sein. Da nun nach (3)

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} = 1, \qquad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{v}} = 0,$$
$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{u}} = 0, \qquad \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{v}} = 1$$

ist, wird

$$\bar{\Delta}_{\bar{f}\bar{f}} = \frac{\bar{G}}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}, \qquad \bar{\Delta}_{\bar{f}\bar{g}} = \frac{-\bar{F}}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}, \qquad \bar{\Delta}_{\bar{g}\bar{g}} = \frac{\bar{E}}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2},$$

so daß also (4) gibt:

$$\frac{\bar{G}}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = \Delta_{ff}, \qquad \frac{-\bar{F}}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = \Delta_{fg}, \qquad \frac{\bar{E}}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = \Delta_{gg}.$$

Subtrahiert man vom Produkte der ersten und dritten Gleichung das Quadrat der zweiten, so kommt:

$$\frac{1}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = \Delta_{ff}\Delta_{gg} - \Delta^2_{fg}.$$

Einsetzen dieses Wertes gibt daher:

$$(5) \quad \bar{E} = \frac{\Delta_{gg}}{\Delta_{ff}\Delta_{gg} - \Delta^2_{fg}}, \quad \bar{F} = \frac{-\Delta_{fg}}{\Delta_{ff}\Delta_{gg} - \Delta^2_{fg}}, \quad \bar{G} = \frac{\Delta_{ff}}{\Delta_{ff}\Delta_{gg} - \Delta^2_{fg}}.$$

Somit gilt der

Satz 45: Führt man auf einer Fläche mit den Parametern u und v neue Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ vermöge zweier voneinander unabhängiger Funktionen

$$\bar{u} = f(u, v), \qquad \bar{v} = g(u, v)$$

ein, so sind

$$\bar{E} = \frac{\Delta_{gg}}{\Delta_{ff}\,\Delta_{gg} - \Delta^2_{fg}}, \quad \bar{F} = \frac{-\Delta_{fg}}{\Delta_{ff}\,\Delta_{gg} - \Delta^2_{fg}}, \quad \bar{G} = \frac{\Delta_{ff}}{\Delta_{ff}\,\Delta_{gg} - \Delta^2_{fg}}$$

die Fundamentalgrößen erster Ordnung der Fläche in bezug auf die neuen Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$.

Natürlich können die Formeln (5) nur eine andere Schreibweise der Formeln (9), S. 17, sein. Sie gehen in der Tat aus diesen hervor, wenn man annimmt, daß infolge von (3)

$$u = \lambda(\bar{u}, \bar{v}), \qquad v = \mu(\bar{u}, \bar{v})$$

sei. Denn hiernach ist ja

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}$$

und andererseits nach (3):

$$f_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + f_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} = 1, \quad f_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + f_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} = 0,$$

$$g_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + g_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} = 0, \quad g_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + g_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} = 1,$$

mithin:

$$f_u \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} + f_v \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}} = 1, \quad f_u \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} + f_v \frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} = 0,$$

$$g_u \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} + g_v \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}} = 0, \quad g_u \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} + g_v \frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} = 1.$$

Hieraus aber berechnet man:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} = \frac{g_v}{f_u g_v - g_u f_v}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}} = \frac{-g_u}{f_u g_v - g_u f_v},$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} = \frac{-f_v}{f_u g_v - g_u f_v}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} = \frac{f_u}{f_u g_v - g_u f_v}.$$

Setzt man nun diese Werte in die Formeln (9), S. 17, ein, so gehen in der Tat diejenigen Gleichungen hervor, die abgekürzt in der Form (5) dargestellt werden können.

Hierzu fügen wir noch einige kleinere und gelegentlich nützliche Bemerkungen: Wenn $f(u, v)$ eine Funktion von u und v ist, für die der Differentialparameter Δ_{ff} verschwindet, hat man nach (1):

(6) $$E f_v^2 - 2 F f_v f_u + G f_u^2 = 0.$$

Nun stellt $f(u,v) =$ konst. eine einfach unendliche Schar von Kurven auf der Fläche dar, vorausgesetzt, daß f nicht selbst bloß eine Konstante ist. Die Fortschreitungsrichtungen $(dv:du)$ längs der Kurven der Schar werden durch

$$f_u du + f_v dv = 0$$

bestimmt. Da hiernach $f_u : f_v = -dv:du$ ist, ergibt (6):

$$E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2 = 0,$$

was nach XI (*O*) besagt, daß die Kurven $f =$ konst. Minimalkurven sind. Der Schluß ist umkehrbar, mithin folgt der

Satz 46: Damit eine Kurvenschar $f(u,v) =$ konst. auf einer Fläche mit den Parametern u und v eine der beiden Scharen von Minimalkurven der Fläche darstelle, ist notwendig und hinreichend, daß der Differentialparameter Δ_{ff} identisch verschwindet, während f selbst nicht bloß eine Konstante ist.

Weiterhin wollen wir jetzt unter $f(u,v)$ und $g(u,v)$ zwei Funktionen von u und v verstehen, die derart beschaffen seien, daß die Kurven $f(u,v) =$ konst. und $g(u,v) =$ konst. zusammen ein Orthogonalsystem auf der Fläche definieren. Da die beiden Scharen die durch

$$dv:du = -f_u : f_v \quad \text{bzw.} \quad dv:du = -g_u : g_v$$

bestimmten Fortschreitungsrichtungen haben, ist dann nach Satz 13, S. 39:

$$E f_v g_v - F(f_v g_u + g_v f_u) + G f_u g_u = 0,$$

d. h. $\Delta_{fg} = 0$. Auch dieser Schluß ist umkehrbar; man muß nur noch voraussetzen, daß keine der beiden Scharen $f =$ konst. und $g =$ konst. aus Minimalkurven bestehe, d. h. daß nach Satz 46 sowohl $\Delta_{ff} \neq 0$ als auch $\Delta_{gg} \neq 0$ sei. Danach gilt der

Satz 47: Zwei Kurvenscharen $f(u,v) =$ konst. und $g(u,v) =$ konst. auf einer Fläche mit den Parametern u und v bilden dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn der Differentialparameter Δ_{fg} identisch gleich Null ist, dagegen weder der Differentialparameter Δ_{ff} noch der Differentialparameter Δ_{gg} identisch verschwindet.

Nach diesen Bemerkungen, die zu machen sich erst hier die passende Gelegenheit bot, gehen wir nun an die in der Überschrift des Paragraphen angedeutete Untersuchung: Nach Satz 7, S. 353,

sind zwei Flächen dann und nur dann aufeinander verbiegbar, wenn es auf beiden Flächen solche Parameter gibt, in denen die Fundamentalgrößen erster Ordnung der einen Fläche mit den entsprechenden der anderen Fläche identisch werden. Aber wir wissen noch nicht, wie man die Frage beantworten kann, ob derartige Parameter bei zwei gegebenen Flächen vorhanden sind.

Zur Beantwortung der Frage verwenden wir natürlich Differentialinvarianten gegenüber der Einführung neuer Parameter, und zwar hier nur solche, die sich allein mit Hilfe der Fundamentalgrößen erster Ordnung und ihrer partiellen Ableitungen nach den Parametern darstellen lassen. Beispielsweise ist das Krümmungsmaß K nach Satz 6, S. 350, und nach Satz 33, S. 427, eine derartige Größe.

Wir nehmen nun an, es seien zwei Flächen

$$(7) \qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

und

$$(8) \qquad \bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}), \qquad \bar{y} = \bar{\chi}(\bar{u}, \bar{v}), \qquad \bar{z} = \bar{\psi}(\bar{u}, \bar{v}),$$

in den laufenden Koordinaten x, y, z bzw. $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ und mit den Parametern u, v bzw. $\bar{u}, \bar{v}$ gegeben. Die Fundamentalgrößen erster Ordnung der ersten Fläche seien E, F, G, die der zweiten $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$. Ferner nehmen wir an, es seien zwei Funktionen von E, F, G und ihren partiellen Ableitungen bis zu irgendwelchen Ordnungen

$$f(E, F, G, E_u, E_v, \ldots) \quad \text{und} \quad g(E, F, G, E_u, E_v, \ldots)$$

bekannt, die erstens bei der Einführung neuer Parameter auf der ersten Fläche (7) ungeändert bleiben und zweitens voneinander unabhängige Funktionen von u und v sind.

Sollen dann die beiden Flächen aufeinander verbiegbar sein, so müssen nach dem Vorhergehenden in solchen Punkten (u, v) und $(\bar{u}, \bar{v})$ der beiden Flächen, die einander bei der Verbiegung entsprechen, die Größen f, g mit denjenigen Größen, die man ebenso für die zweite Fläche (8) bilden kann, nämlich mit den Größen

$$f(\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{E}_{\bar{u}}, \bar{E}_{\bar{v}}, \ldots), \qquad g(\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{E}_{u}, \bar{E}_{\bar{v}}, \ldots)$$

übereinstimmen, d. h. einander entsprechende Punktepaare (u, v) und $(\bar{u}, \bar{v})$ sind durch die beiden Gleichungen:

$$(9) \qquad \begin{cases} f(E, F, G, E_u, E_v, \ldots) = f(\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{E}_{\bar{u}}, \bar{E}_{\bar{v}}, \ldots), \\ g(E, F, G, E_u, E_v, \ldots) = g(\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{E}_{\bar{u}}, \bar{E}_{\bar{v}}, \ldots) \end{cases}$$

miteinander verknüpft. Die linken Seiten dieser Gleichungen enthalten nur u und v, die rechten nur $\bar{u}$ und $\bar{v}$. Außerdem sind sie nach u, v auflösbar, da die linken Seiten nach Voraussetzung voneinander unabhängige Funktionen von u und v sind. Wären nun die rechten Seiten nicht ebenfalls voneinander unabhängige Funktionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$, so bestände zwischen ihnen eine Gleichung, so daß die Gleichungen (9) auch eine Gleichung zwischen den linken Seiten nach sich zögen. Da diese nicht für alle Wertepaare u, v bestehen könnte, weil die linken Seiten voneinander unabhängig sind, hieße dies, daß nur für eine Kurve auf der ersten Fläche die Größen f und g mit denen auf der zweiten Fläche übereinstimmten. Dann also wäre die Verbiegung unmöglich. Wir müssen daher voraussetzen, daß auch die rechten Seiten von (9) voneinander unabhängige Funktionen der Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ seien, so daß die Gleichungen (9) diejenige Zuordnung zwischen den Punkten (u, v) und $(\bar{u}, \bar{v})$ beider Flächen definieren, die bei der Verbiegung auftritt, wenn diese Verbiegung überhaupt möglich ist, was wir ja noch nicht wissen.

Nach Satz 35, S. 429, sind nun

$$\Delta_{ff}, \quad \Delta_{fg}, \quad \Delta_{gg}$$

drei Funktionen von E, F, G und ihren Ableitungen, die mit f und g selbst bei der Einführung neuer Parameter ungeändert bleiben. Ist die Verbiegung möglich, so muß also auch

$$(10) \qquad \Delta_{ff} = \bar{\Delta}_{\bar{f}\bar{f}}, \qquad \Delta_{fg} = \bar{\Delta}_{\bar{f}\bar{g}}, \qquad \Delta_{gg} = \bar{\Delta}_{\bar{g}\bar{g}}$$

sein. Hierin sollen natürlich $\bar{f}, \bar{g}$ die rechten Seiten von (9) sein und die Differentialparameter rechts für die zweite Fläche, d. h. mittels $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$, gebildet werden.

Dies alles sind notwendige Bedingungen für die Verbiegbarkeit. Jetzt wollen wir zeigen, daß sie auch hinreichen. Wir setzen also voraus, daß diejenigen Funktionen u, v von $\bar{u}, \bar{v}$, die durch (9) definiert werden, auch die drei Gleichungen (10) für alle Werte von $\bar{u}, \bar{v}$ erfüllen.

Zum Beweise führen wir auf beiden Flächen zugleich neue Parameter $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ ein, indem wir auf der ersten

$$(11) \qquad \mathfrak{u} = f, \qquad \mathfrak{v} = g$$

und auf der zweiten

$$(12) \qquad \mathfrak{u} = \bar{f}, \qquad \mathfrak{v} = \bar{g}$$

setzen, was wir dürfen, weil f, g hinsichtlich u, v und $\bar{f}, \bar{g}$ hinsichtlich $\bar{u}, \bar{v}$ nach Voraussetzung voneinander unabhängig sind. Dann

nehmen die Quadrate der Bogenelemente beider Flächen neue Formen an, etwa:

$$ds^2 = \mathfrak{E}\,d\mathfrak{u}^2 + 2\,\mathfrak{F}\,d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v} + \mathfrak{G}\,d\mathfrak{v}^2,$$

$$d\bar{s}^2 = \bar{\mathfrak{E}}\,d\mathfrak{u}^2 + 2\,\bar{\mathfrak{F}}\,d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v} + \bar{\mathfrak{G}}\,d\mathfrak{v}^2.$$

Nach Satz 45 ist dabei insbesondere

$$(13)\qquad \mathfrak{E} = \frac{\Delta_{gg}}{\Delta_{ff}\,\Delta_{gg} - \Delta^2_{fg}}, \qquad \bar{\mathfrak{E}} = \frac{\bar{\Delta}_{\bar{g}\bar{g}}}{\bar{\Delta}_{\bar{f}\bar{f}}\,\bar{\Delta}_{\bar{g}\bar{g}} - \bar{\Delta}^2_{\bar{f}\bar{g}}}.$$

Infolge von (11) und (12) ist aber $f = \bar{f}$, $g = \bar{g}$, so daß die Gleichungen (9) erfüllt sind, die nach Voraussetzung die Gleichungen (10) nach sich ziehen. Diese haben nun nach (13) die Gleichung $\mathfrak{E} = \bar{\mathfrak{E}}$ zur Folge. Ebenso erkennt man, daß $\mathfrak{F} = \bar{\mathfrak{F}}$ und $\mathfrak{G} = \bar{\mathfrak{G}}$ wird, so daß bei beiden Flächen die Quadrate der Bogenelemente für den Fall der Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ übereinstimmen.

Also folgt:

Satz 48: Kennt man bei einer Fläche

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

zwei derartige voneinander unabhängige Funktionen

$$f(E, F, G, E_u, E_v \ldots) \quad \text{und} \quad g(E, F, G, E_u, E_v \ldots)$$

der Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G und ihrer Ableitungen nach u und v, die bei der Einführung neuer Parameter ungeändert bleiben, so kann man die Frage, ob und wie sich die Fläche auf eine andere gegebene Fläche

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{y} = \bar{\chi}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{z} = \bar{\psi}(\bar{u}, \bar{v})$$

verbiegen läßt, stets durch Eliminationen entscheiden. Man berechnet nämlich die Fundamentalgrößen erster Ordnung $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ der zweiten Fläche und bildet die Funktionen

$$\bar{f} = f(\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{E}_{\bar{u}}, \bar{E}_{\bar{v}} \ldots) \quad \text{und} \quad \bar{g} = g(\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{E}_{\bar{u}}, \bar{E}_{\bar{v}} \ldots),$$

die aus den beiden bekannten Funktionen f und g dadurch hervorgehen, daß man E, F, G durch $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ und u, v durch $\bar{u}$, $\bar{v}$ ersetzt. Damit nunmehr die Verbiegung möglich sei, ist notwendig und hinreichend, daß erstens $\bar{f}$ und $\bar{g}$ bei Einführung neuer Parameter auf der zweiten Fläche ungeändert bleiben, daß sie zweitens voneinander unabhängige Funktionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ seien und daß drittens die aus

$$f = \bar{f}, \quad g = \bar{g}$$

folgenden Funktionen u und v von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ auch die drei Gleichungen

$$\triangle_{ff} = \bar{\triangle}_{\bar{f}\bar{f}}, \quad \triangle_{fg} = \bar{\triangle}_{\bar{f}\bar{g}}, \quad \triangle_{gg} = \bar{\triangle}_{\bar{g}\bar{g}}$$

für alle Werte von $\bar{u}, \bar{v}$ erfüllen, wobei sich die Differentialparameter $\triangle$ auf die erste, die Differentialparameter $\bar{\triangle}$ auf die zweite Fläche beziehen. Zugleich geben die aus den Gleichungen $f = \bar{f}$, $g = \bar{g}$ folgenden Funktionen u und v von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ an, wie die Punkte (u, v) der einen Fläche den Punkten $(\bar{u}, \bar{v})$ der anderen Fläche entsprechen.

Als Funktion f kann man, wie gesagt, das Krümmungsmaß K und als Funktion g die Differentialinvariante $\triangle_{KK}$ benutzen (vgl. Satz 36, S. 431), die sich ja ebenfalls durch E, F, G und ihre Ableitungen allein ausdrückt. Dies geht nur dann nicht, wenn entweder $K =$ konst. oder aber $\triangle_{KK}$ von K abhängig ist. Im Falle $K =$ konst. handelt es sich um Flächen konstanter Krümmung, bei denen die Frage der Verbiegbarkeit durch Satz 21, S. 382, erledigt ist. Im Falle, wo $\triangle_{KK}$ eine Funktion von K ist, kann man andere Hilfsmittel benutzen, aber wir haben nicht die Absicht, auf diesen besonderen Fall einzugehen.[1]

Auch von den Formeln des hier schließenden Abschnittes ist eine Anzahl in Tafeln des Anhanges zusammengestellt worden. Tafel XVI enthält die Ableitungen zweiter Ordnung der rechtwinkligen Koordinaten und Tafel XVII die Fundamentalgleichungen. Tafel XVIII und XIX bringen eine Reihe von Formeln für die speziellen Fälle, wo die Parameterkurven entweder die Minimalkurven oder die Krümmungskurven sind. Einige Formeln sind freilich im Texte nicht vorgekommen. Sie ergeben sich aber aus den allgemeinen, wenn man darin $E = G = 0$ oder $F = M = 0$ setzt. Tafel XX endlich bezieht sich auf die Differentialparameter.

[1] Die vollständige Behandlung des Problems der Verbiegbarkeit sehe man nach bei Darboux, „Leçons sur la théorie générale des surfaces“, 3. partie, Paris 1894.

Vierter Abschnitt.

Kurven auf der Fläche.

§ 1. Geodätische Kurven.

Der letzte Abschnitt soll den Kurven auf der Fläche gewidmet sein. Bisher haben wir drei besondere Kurvenarten auf der Fläche besprochen, die Minimalkurven, die Krümmungskurven und die Haupttangentenkurven. Unter den übrigen Kurven auf der Fläche haben die kürzesten Linien, die man auf der Fläche zwischen je zwei Punkten ziehen kann, ein besonderes Interesse. Ihrer Untersuchung ist der größte Teil dieses Abschnittes gewidmet. Zum Schlusse des Abschnittes entwickeln wir alsdann die wichtigsten Formeln für beliebige Kurven auf der Fläche. —

Zur Vorbereitung der Untersuchung wollen wir zunächst ein Problem aus der Kurventheorie behandeln:

Es sei eine Kurve im Raume gegeben, und sie soll eine unendlich kleine Änderung erfahren. Wir fragen, wie sich dabei ihre Bogenlänge ändert. Dabei sehen wir von den Minimalkurven erster und zweiter Ordnung und von den Geraden ab und benutzen als Parameter längs der Kurve ihre Bogenlänge s. Es sei

$$x = \varphi(s), \quad y = \chi(s), \quad z = \psi(s) \tag{1}$$

die Darstellung der Kurve. Eine unendlich kleine Änderung ergibt sich, wenn wir alle Punkte der Kurve nach einem gewissen Gesetze in neue Lagen bringen, die von ihren alten Lagen unendlich wenig verschieden sind. Die Formeln werden am bequemsten, wenn wir diese Änderung analytisch nicht in bezug auf das Koordinatensystem (x, y, z), sondern in bezug auf das begleitende Dreikant des Kurvenpunktes zum Ausdrucke bringen. (Vgl. I S. 219.) Der Punkt P oder (x, y, z) oder (s) der Kurve (1) möge eine unend-

lich kleine Verrückung nach einem Punkte $\bar{P}$ erfahren, deren Projektionen auf seine Tangente, Haupt- und Binormale die Längen

(2) $$\xi(s)\,\varepsilon, \quad \eta(s)\,\varepsilon, \quad \zeta(s)\,\varepsilon$$

haben, wobei ε längs der Kurve eine und dieselbe nach Null strebende Größe bedeute und ξ, η, ζ irgend drei Funktionen von s sein sollen. Es läßt sich leicht feststellen, um welche Größen $\delta x, \delta y, \delta z$ bei der Verrückung die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z wachsen. Wir wenden den Satz an, wonach die Projektion einer Strecke $P\bar{P}$ auf eine der Koordinatenachsen gleich der Summe der Projektionen der Seiten eines solchen ungeschlossenen Vielecks ist, das von P nach $\bar{P}$ geht. Indem wir den Punkt P zuerst um $\xi\varepsilon$ auf der Tangente, den neuen Punkt darauf um $\eta\varepsilon$ parallel der Hauptnormale und endlich den neuen Punkt wieder um $\zeta\varepsilon$ parallel der Binormale weiterführen, gelangt er in die Lage $\bar{P}$. Die drei Strecken $\xi\varepsilon$, $\eta\varepsilon$, $\zeta\varepsilon$ bilden also ein Vieleck, wie wir es brauchen. Sind α, β, γ; l, m, n; λ, μ, ν die Richtungskosinus der Tangente, der Haupt- und der Binormale von P, so folgt hieraus:

$$\delta x = (\alpha\xi + l\eta + \lambda\zeta)\,\varepsilon, \quad \delta y = (\beta\xi + m\eta + \mu\zeta)\,\varepsilon, \quad \delta z = (\gamma\xi + n\eta + \nu\zeta)\,\varepsilon.$$

Nach Tafel III können wir die Richtungskosinus aus (1) als Funktionen von s berechnen. Alsdann sind

(3) $$\begin{cases} \bar{x} = x + (\alpha\xi + l\eta + \lambda\zeta)\,\varepsilon, \\ \bar{y} = y + (\beta\xi + m\eta + \mu\zeta)\,\varepsilon, \\ \bar{z} = z + (\gamma\xi + n\eta + \nu\zeta)\,\varepsilon \end{cases}$$

die Gleichungen der neuen Kurve, die von der Kurve (1) unendlich wenig abweicht, ausgedrückt mittels des Parameters s.

Jedem Bogenelement ds der alten Kurve (1) entspricht ein Bogenelement $d\bar{s}$ der neuen Kurve (3). Wir wollen es berechnen. Zu diesem Zwecke differenzieren wir die Formeln (3) nach s. Nach III (B) und III (C) ergibt sich dann, wenn $1:r$ und $1:\varrho$ die Krümmung und die Torsion der Kurve (1) bedeuten:

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \left[1 + \left(\xi' - \frac{\eta}{r}\right)\varepsilon\right]\alpha + \left[\frac{\xi}{r} + \eta' + \frac{\zeta}{\varrho}\right]\varepsilon\, l + \left[\zeta' - \frac{\eta}{\varrho}\right]\varepsilon\,\lambda.$$

Entsprechend gehen $d\bar{y}:ds$ und $d\bar{z}:ds$ hervor, wenn auf der rechten Seite α, l, λ durch β, m, μ bzw. γ, n, ν ersetzt werden. Quadrieren und Summieren der drei Formeln liefert nach II (A):

$$\frac{\mathbf{S}\,d\bar{x}^2}{ds^2} = \left[1 + \left(\xi' - \frac{\eta}{r}\right)\varepsilon\right]^2 + \left[\frac{\xi}{r} + \eta' + \frac{\zeta}{\varrho}\right]^2\varepsilon^2 + \left[\zeta' - \frac{\eta}{\varrho}\right]^2\varepsilon^2.$$

Es ist aber

$$\mathsf{S}\, d\bar{x}^2 = d\bar{s}^2.$$

Also kommt, wenn wir nach Potenzen von ε ordnen:

$$\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 = 1 + 2\left(\xi' - \frac{\eta}{r}\right)\varepsilon + (\ldots)\varepsilon^2.$$

Den Koeffizienten von ε^2 haben wir nur angedeutet, da er für das Folgende unwichtig ist. Ziehen wir die Quadratwurzel aus und orientieren wir die Bogenlänge der neuen Kurve im selben Sinne wie die der alten, so daß $d\bar{s}:ds$ für $\varepsilon = 0$ gleich Eins wird, so folgt hieraus:

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = 1 + \left(\xi' - \frac{\eta}{r}\right)\varepsilon + \ldots$$

oder:

$$(4) \qquad d\bar{s} - ds = \left(\xi' - \frac{\eta}{r}\right) ds . \varepsilon + \ldots,$$

wobei die höheren Potenzen von ε nur angedeutet worden sind.

Die Bogenlänge s sei von $s = 0$ bis $s = \sigma$ erstreckt. Ihr Anfangspunkt sei P_0, ihr Endpunkt P_1. Diesen Punkten entsprechen Punkte $\bar{P}_0$ und $\bar{P}_1$ der neuen Kurve, und der Bogenlänge σ entspricht daher eine Bogenlänge $\bar{\sigma}$ der neuen Kurve. Aus (4) geht durch Integration von 0 bis σ die Differenz $\bar{\sigma} - \sigma$ hervor:

$$\bar{\sigma} - \sigma = \int_0^{\sigma} \left(\xi' - \frac{\eta}{r}\right) ds . \varepsilon + \ldots$$

Insbesondere ist hierin

$$\int_0^{\sigma} \xi'\, ds = \xi(\sigma) - \xi(0).$$

Wenn wir insbesondere annehmen, daß die der alten Kurve $P_0 P_1$ unendlich benachbarte Kurve ebenfalls von P_0 ausgehe und in P_1 endige, daß also $\xi(s)$, $\eta(s)$ und $\zeta(s)$ für $s = 0$ und $s = \sigma$ gleich Null seien, wird das soeben angegebene Integral gleich Null. Nunmehr kommt:

$$\bar{\sigma} - \sigma = -\int_0^{\sigma} \frac{\eta}{r}\, ds . \varepsilon + \ldots,$$

und es gilt der

Satz 1: Ändert man eine von P_0 nach P_1 gehende Kurve, die keine Minimalkurven erster oder zweiter Ordnung und auch keine Gerade ist, unendlich wenig mit festgehaltenen Endpunkten, und hat die Verrückung, die der allgemeine,

zur Bogenlänge $P_0 P = s$ gehörige Punkt P der Kurve erfährt, einen Wert, dessen Projektion auf die Hauptnormale des Punktes P gleich $\eta(s)\varepsilon$ ist, wobei ε eine nach Null strebende von s unabhängige Größe bedeute, so ist die Differenz zwischen der Länge $\bar{\sigma}$ der neuen Kurve $P_0 P_1$ und der Länge σ der alten Kurve $P_0 P_1$ gegeben durch:

$$\bar{\sigma} - \sigma = -\int_0^\sigma \frac{\eta}{r} ds . \varepsilon + \ldots$$

Hierin ist r der Krümmungsradius der alten Kurve an der Stelle P oder (s); die mit höheren Potenzen von ε behafteten Summanden sind nur angedeutet.

Jetzt wollen wir annehmen, die Kurve sei reell und liege auf einer reellen Fläche, so daß also die Minimalkurven erster und zweiter Ordnung von vornherein ausgeschlossen sind. Außerdem sollen den Punkten der Kurve nur unendlich kleine reelle Verrückungen auf der Fläche selbst erteilt werden, und wie bisher sollen die Endpunkte P_0 und P_1 dabei fest bleiben. Die Verrückungen sind alsdann der Einschränkung unterworfen, daß jeder Punkt der Kurve in der zugehörigen Tangentenebene der Fläche bleiben soll. Sind X, Y, Z die Richtungskosinus der Flächennormale, so drückt sich diese Einschränkung nach (3) so aus: Es soll

$$\xi \mathbf{S} \alpha X + \eta \mathbf{S} l X + \zeta \mathbf{S} \lambda X = 0 \tag{5}$$

sein. Die drei Summen hierin sind die Kosinus der Winkel, die die Flächennormale der betrachteten Kurvenstelle mit der Tangente, Haupt- und Binormale bildet. Diese Forderung zeigt, daß die in Satz 1 auftretende Größe η auch jetzt noch beliebig reell gewählt werden darf, da die Bedingung (5) alsdann eine Gleichung zwischen ξ und ζ wird, die sich durch geeignete reelle Wahl von ξ und ζ erfüllen läßt. Dies ist nur dann nicht der Fall, wenn die Bedingung (5) frei von ξ und ζ wird, d. h. wenn $\mathbf{S} \alpha X = \mathbf{S} \lambda X = 0$ ist, wenn also die Flächennormale auf der rektifizierenden Ebene (vgl. I S. 415) senkrecht steht und daher mit der Hauptnormale der Kurve zusammenfällt.

Solange dies nicht längs der ganzen Kurve der P_0 bis P_1 der Fall ist, kann man also die Kurve immer noch unendlich wenig auf der Fläche derart ändern, daß $\bar{\sigma} - \sigma$ von derselben Ordnung wie ε unendlich klein wird. Tritt dagegen der besondere Fall ein, d. h. liegt die Hauptnormale der Kurve in der Flächennormale, so

ergibt (5), daß überall $\eta = 0$ sein muß, so daß das Glied erster Ordnung in der Reihenentwicklung für $\bar{\sigma} - \sigma$ fortfällt.

Nicht nur von den Minimalkurven erster und zweiter Ordnung sahen wir ab, sondern auch von den Geraden. Da die Fläche aber reelle Geraden enthalten kann, ist auch über diesen Fall etwas zu sagen.

Bei einer Geraden liegt die Sache nun so, daß $\bar{\sigma} - \sigma$ bei jeder unendlich kleinen Verrückung ihrer Punkte bei festgehaltenen Endpunkten P_0 und P_1 unendlich klein von höherer als erster Ordnung wird. Denn wenn wir die Gerade als x-Achse wählen und die Verrückungen

$$\delta x = \xi(x)\varepsilon, \quad \delta y = \eta(x)\varepsilon, \quad \delta z = \zeta(x)\varepsilon$$

anwenden, so daß

$$\bar{x} = x + \xi(x)\varepsilon, \quad \bar{y} = \eta(x)\varepsilon, \quad \bar{z} = \zeta(x)\varepsilon$$

die Gleichungen der neuen Kurve sind, wird

$$d\bar{s}^2 = \mathsf{S}\, d\bar{x}^2 = dx^2 + 2\xi' dx^2.\varepsilon^2 + \ldots,$$

also, da $ds = dx$ ist:

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = 1 + \xi'\varepsilon + \ldots,$$

oder

$$d\bar{s} - ds = \xi' ds.\varepsilon + \ldots$$

Ist P_0 etwa der Anfangspunkt ($x = 0$), während P_1 zu $x = \sigma$ gehört, so kommt durch Integration von $s = 0$ bis $s = \sigma$:

$$\bar{\sigma} - \sigma = \int_0^\sigma \xi' ds.\varepsilon + \ldots = [\xi(\sigma) - \xi(0)]\,\varepsilon + \ldots$$

Da aber P_0 und P_1 fest bleiben sollen, ist $\xi(0) = 0$ und $\xi(\sigma) = 0$. Also wird $\bar{\sigma} - \sigma$ in der Tat in ε von höherer als erster Ordnung. Da diese Betrachtung ganz unabhängig davon war, ob die Verrückungen nur auf einer Fläche, auf der die Gerade liegt, gestattet sein sollen, ergibt sich demnach allgemein der

Satz 2: Geht eine reelle Kurve auf einer reellen Fläche von einem Punkte P_0 nach einem Punkte P_1 und werden den Punkten der Kurve solche Verrückungen erteilt, die mit einer nach Null strebenden Größe ε in derselben Ordnung unendlich klein sind und nur auf der Fläche selbst stattfinden sollen, während insbesondere die beiden Punkte P_0 und P_1 selbst fest bleiben, so erfährt die Bogenlänge der Kurve von P_0 bis P_1 dabei eine Änderung, die bei jeder

erlaubten Verrückung nur dann stets von höherer Ordnung als ε unendlich klein wird, wenn die Kurve entweder eine Gerade ist oder ihre Hauptnormalen überall mit den Flächennormalen zusammenfallen.

Ist die reelle Kurve keine Gerade, so gilt nach Satz 1 die Formel:

$$\bar{\sigma} - \sigma = -\int_0^\sigma \frac{\eta}{r}\, ds . \varepsilon + \dots$$

Das Vorzeichen der rechten Seite ist bei hinreichend kleinem ε gleich dem des angegebenen ersten Gliedes. Soll nun die Kurve die kürzeste auf der Fläche von P_0 bis P_1 zu ziehende Linie sein, so darf jedenfalls keine unendlich benachbarte, ebenfalls von P_0 bis P_1 gehende reelle Flächenkurve kürzer sein, d. h. es muß $\bar{\sigma} - \sigma \geqq 0$ gefordert werden. Solange aber η nicht überall längs der Kurve von P_0 bis P_1 verschwindet, können wir, indem wir im Notfalle einfach das Zeichen von ε wechseln, stets zum Ergebnisse $\bar{\sigma} - \sigma < 0$ kommen. Die Kurve von P_0 bis P_1 kann also höchstens dann eine kürzeste Linie auf der Fläche von P_0 bis P_1 sein, wenn überall $\eta = 0$ ist, d. h. wenn die Hauptnormalen der Kurve Flächennormalen sind. Aber das Umgekehrte ist hiermit nicht bewiesen, d. h. es steht nicht fest, daß eine reelle Flächenkurve von P_0 bis P_1 eine kürzeste Flächenkurve zwischen P_0 und P_1 ist, sobald ihre Hauptnormalen mit den Flächennormalen zusammenfallen. Es verhält sich hier ähnlich, wie bei den Flächen kleinsten Inhaltes innerhalb einer gegebenen geschlossenen reellen Kurve, von denen wir auf S. 299 u. f. sahen, daß sie zu den Minimalflächen gehören, während wir nicht bewiesen und es auch nicht richtig ist, daß jede reelle Minimalfläche innerhalb der geschlossenen Kurve wirklich eine Fläche kleinsten Inhaltes wäre. Jedenfalls aber haben wir gesehen:

Satz 3: Eine kürzeste unter allen reellen Flächenkurven, die zwei Punkte einer reellen Fläche verbinden, hat stets die Eigenschaft, daß ihre Hauptnormalen Flächennormalen sind, es sei denn, daß sie eine Gerade ist.

Da wir die Frage, wann eine Kurve auf der Fläche eine kürzeste ist, hier nicht erschöpfend behandeln können, liegt das Bedürfnis vor, für diejenigen Kurven, zu denen sie nach dem Vorhergehenden gehört, einen gemeinsamen Namen zu haben. Diese Kurven wären diejenigen, deren Hauptnormalen Flächennormalen

sind, und außerdem die etwa auf der Fläche vorhandenen Geraden. Nun ist aber zu bemerken, daß es auch imaginäre Flächenkurven gibt, deren Hauptnormalen Flächennormalen sind. Außerdem ist zu beachten, daß es imaginäre Kurven ohne Hauptnormalen gibt. Anstatt zu sagen, die Hauptnormalen einer gewissen Flächenkurve sind Flächennormalen, kann man aber auch sagen: die Schmiegungsebenen der Kurve enthalten die jeweiligen Flächennormalen.

Wir nennen nun alle Flächenkurven, die entweder Geraden sind oder deren Schmiegungsebenen die jeweiligen Flächennormalen enthalten, geodätische Kurven. Man muß wohl beachten, daß die Gesamtheit dieser Kurven größer ist als die der Flächenkurven, die entweder Geraden sind oder deren Hauptnormalen Flächennormalen sind. Denn es gibt ja Kurven ohne Hauptnormalen, nämlich die Minimalkurven erster Ordnung, denen aber sehr wohl Schmiegungsebenen zukommen, die jedoch Minimalebenen sind (vgl. I S. 462).

Nach dem Vorhergehenden gehören jedenfalls die kürzesten Flächenkurven zu den geodätischen Kurven. —

In I S. 364 definierten wir schon gewisse Kurven auf abwickelbaren Flächen als geodätische Kurven, nämlich diejenigen, die bei der Abwickelung derartiger Flächen auf die Ebene in Geraden übergehen. Es erhellt, daß sie im reellen Falle gewiss kürzeste Linien auf solchen Flächen sind und daher auch nach unserer jetzigen Definition zu den geodätischen Kurven gehören. Das gilt auch, wenn sie imaginär sind. Enthalten nämlich die Schmiegungsebenen einer Kurve auf einer abwickelbaren Fläche die jeweiligen Flächennormalen, so sind die rektifizierenden Ebenen der Kurve die Tangentenebenen der Fläche, so daß die Fläche selbst die rektifizierende Fläche der Kurve ist, die deshalb bei der Abwickelung auf die Ebene in eine Gerade übergeht.

Obgleich Betrachtungen aus der Mechanik eigentlich nicht hierher gehören, wollen wir doch nicht unterlassen, die folgende einfache Überlegung anzugeben, die wohl zuerst zur Feststellung des Kennzeichens für geodätische Kurven geführt hat:[1] Über eine starr

[1] Im Jahre 1697 stellte Joh. Bernoulli im Journal des Savans das Problem, die kürzesten Linien auf einer Fläche, insbesondere auf einer Rotationsfläche zu bestimmen. In einem Briefe an Leibniz aus demselben Jahre teilte er mit, daß er die Aufgabe auf eine Differentialgleichung zurückgeführt habe. Leibniz antwortete darauf, daß er schon früher eine Methode zur Lösung gefunden habe, jedoch zur wirklichen Durchführung der Rechnung nicht gekommen sei. Auf Aufforderung setzte Leibniz seine Methode in einem Briefe

gedachte Fläche sei zwischen zwei Punkten ein völlig biegsamer, aber unausdehnbarer Faden gespannt, so daß er eine kürzeste Linie ist. Sind dann A, B, C drei einander unendlich benachbarte Punkte der Kurve (siehe Fig. 94), so erleidet der mittlere Punkt B zwei Spannkräfte, eine in der Richtung des Elements BA, eine in der Richtung des Elements BC. Die Mittelkraft liegt in der Ebene ABC, die nach I S. 222 die Schmiegungsebene der Kurve in B ist. Da nun die Kurve auf der starr gedachten Fläche im Gleichgewichte ist, wird die Mittelkraft durch den Widerstand der Fläche in B aufgehoben. Dieser Widerstand wirkt aber in der Flächennormale von B. Folglich liegt die Flächennormale in der Schmiegungsebene von B; sie ist die Hauptnormale von B.

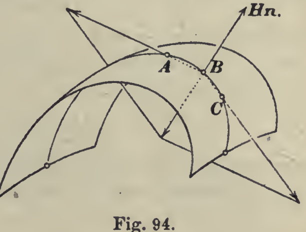


Fig. 94.

Um nun die analytische Bedingung für eine nicht geradlinige geodätische Kurve zu gewinnen, d. h. für eine solche Kurve auf einer Fläche

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v), \tag{6}$$

die in jedem ihrer Punkte eine durch die zugehörige Flächennormale gehende Schmiegungsebene hat, verfahren wir so: Nach S. 12 wird eine Flächenkurve dadurch definiert, daß für u und v Funktionen eines Parameters t gesetzt werden; die Kurve wird dann

an JOH. BERNOULLI 1698 auseinander (siehe „GOT. GUL. LEIBNITII et JOHAN. BERNOULLI commercium philosophicum et mathematicum", Lausanne und Genf 1745, wieder abgedruckt in „LEIBNIZENS mathematischen Schriften", hgg. von GERHARDT, 1. Abt. 3. Bd., Halle 1855). Die Andeutung, die er gab, zeigt, daß er sich vorstellte: Zwei unendlich benachbarte Punkte A und C der Fläche seien auf der fraglichen Kurve angenommen; auf der Schnittlinie ihrer Tangentenebenen, durch die er sich dort die Fläche ersetzt dachte, muß man dann einen Punkt B so bestimmen, daß $AB + BC$ ein Minimum wird. JOH. BERNOULLI antwortete darauf in demselben Jahre (siehe die oben erwähnten Sammelwerke), daß er eine andere Methode gefunden habe, die sich darauf gründe, daß die Ebene durch drei benachbarte Punkte der gesuchten Kurve auf der Tangentenebene der Fläche senkrecht stehe. Vermutlich war BERNOULLIS Überlegung diejenige, die wir oben geben. Vgl. hierzu STÄCKEL, „Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien", Leipziger Berichte 1893. Daselbst wird auch der Ursprung der Bezeichnung: geodätisch aufgedeckt.

durch (6) mittels des Parameters t dargestellt. Deuten die Striche die Differentiation nach t an, so ist also längs der Kurve

$$(7)\qquad \begin{cases} x' = x_u u' + x_v v', \\ x'' = x_{uu} u'^2 + 2 x_{uv} u' v' + x_{vv} v'^2 + x_u u'' + x_v v'', \end{cases}$$

und entsprechend drücken sich y', y'' und z', z'' aus. Die Schmiegungsebene hat nun in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ nach (4), I S. 222, die Gleichung

$$\mathsf{S}(y'z'' - z'y'')(\mathfrak{x} - x) = 0$$

und enthält also die Flächennormale, wenn die Richtungskosinus X, Y, Z dieser Normale die Gleichung

$$\mathsf{S}(y'z'' - z'y'')X = 0$$

befriedigen. Diese notwendige und hinreichende Bedingung für eine nicht geradlinige geodätische Kurve auf der Fläche kann so geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} x' & x'' & X \\ y' & y'' & Y \\ z' & z'' & Z \end{vmatrix} = 0.$$

Wir formen sie durch einen Kunstgriff um, der schon gelegentlich angewandt wurde, z. B. auf S. 213, und überhaupt in der Flächentheorie öfters nützlich ist, nämlich durch Multiplikation mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix} \neq 0,$$

die ja nach XI (L) gleich $D \neq 0$ ist. Dann kommt zunächst:

$$\begin{vmatrix} \mathsf{S}\, x_u x' & \mathsf{S}\, x_v x' & \mathsf{S}\, X x' \\ \mathsf{S}\, x_u x'' & \mathsf{S}\, x_v x'' & \mathsf{S}\, X x'' \\ \mathsf{S}\, x_u X & \mathsf{S}\, x_v X & \mathsf{S}\, X^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Hierin sind die Elemente der letzten Zeile nach XI (H) und (J) gleich 0, 0, 1. Demnach bleibt:

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} \mathsf{S}\, x_u x' & \mathsf{S}\, x_v x' \\ \mathsf{S}\, x_u x'' & \mathsf{S}\, x_v x'' \end{vmatrix} = 0.$$

Nach (7) ist nun einzeln mit Rücksicht auf XI (A) und XVI (C)

$$\mathsf{S}\, x_u x' = E u' + F v', \quad \mathsf{S}\, x_v x' = F u' + G v',$$

$$\mathsf{S}\, x_u x'' = \tfrac{1}{2} E_u u'^2 + E_v u' v' + (F_v - \tfrac{1}{2} G_u) v'^2 + E u'' + F v'',$$
$$\mathsf{S}\, x_v x'' = (F_u - \tfrac{1}{2} E_v) u'^2 + G_u u' v' + \tfrac{1}{2} G_v v'^2 + F u'' + G v''.$$

Demnach lautet die Bedingung (8) so:

$$(9) \quad \begin{vmatrix} Eu' + Fv' & \tfrac{1}{2} E_u u'^2 + E_v u' v' + (F_v - \tfrac{1}{2} G_u) v'^2 + Eu'' + Fv'' \\ Fu' + Gv' & (F_u - \tfrac{1}{2} E_v) u'^2 + G_u u' v' + \tfrac{1}{2} G_v v'^2 + Fu'' + Gv'' \end{vmatrix} = 0.$$

Wie man sieht, enthält sie als Koeffizienten der Ableitungen u', v', u'', v'' nur die Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G und ihre Ableitungen von der ersten Ordnung.

Wir können nun leicht sehen, daß sie auch für die etwa auf der Fläche vorhandenen Geraden gilt. Denn längs einer Geraden sind die Verhältnisse $x':y':z'$ konstant, so daß etwa:

$$x' = \varrho a, \quad y' = \varrho b, \quad z' = \varrho c \quad (a, b, c = \text{konst.})$$

ist, wo ϱ eine Funktion von t bedeutet. Hier ist:

$$x'' = \varrho' a, \quad y'' = \varrho' b, \quad z'' = \varrho' c,$$

so daß die Gleichung (8) und daher auch die Gleichung (9) erfüllt wird.

Somit gilt der

Satz 4: Eine Flächenkurve ist dann und nur dann geodätisch, wenn längs ihrer die Parameter u und v der Fläche solche Funktionen eines dritten Parameters t sind, deren Ableitungen u', v' und u'', v'' die Bedingung

$$\begin{vmatrix} Eu' + Fv' & \tfrac{1}{2} E_u u'^2 + E_v u' v' + (F_v - \tfrac{1}{2} G_u) v'^2 + Eu'' + Fv'' \\ Fu' + Gv' & (F_u - \tfrac{1}{2} E_v) u'^2 + G_u u' v' + \tfrac{1}{2} G_v v'^2 + Fu'' + Gv'' \end{vmatrix} = 0$$

erfüllen, worin E, F, G die Fundamentalgrößen erster Ordnung der Fläche bedeuten.

Die Bedingungsgleichung wird nur mit dem Faktor u' multipliziert erscheinen, sobald man die Elemente der ersten Zeile der Determinante durch diejenigen ersetzt, die sich ergeben, wenn man die Elemente der Zeile mit u' bzw. v' multipliziert und dann addiert. Das erste Element der ersten Zeile wird dann der Ausdruck

$$\Omega = E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2$$

und das zweite:

$$\tfrac{1}{2} E_u u'^3 + (\tfrac{1}{2} E_v + F_u) u'^2 v' + (\tfrac{1}{2} G_u + F_v) u' v'^2 + \tfrac{1}{2} G_v v'^3$$
$$+ E u' u'' + F(u' v'' + v' u'') + G v' v''$$

oder die Hälfte von

$$(E_u u' + E_v v') u'^2 + 2(F_u u' + F_v v') u' v' + (G_u u' + G_v v') v'^2$$
$$+ 2 E u' u'' + 2 F(u' v'' + v' u'') + 2 G v' v'',$$

und dies ist nichts anderes als die Ableitung von Ω nach t. Nun aber ist der Ausdruck Ω nach XI(O) gleich Null für die Minimalkurven der Fläche, d. h. dann, wenn man u und v so als Funktionen von t wählt, daß die Flächenkurve eine Minimalkurve wird. Alsdann ist mithin auch die Ableitung von Ω nach t gleich Null. Somit erhellt:

Satz 5: Die Minimalkurven einer Fläche gehören zu den geodätischen Kurven der Fläche.

Anders ausgesprochen:

Satz 6: Die Flächennormalen der Punkte einer Minimalkurve der Fläche liegen in den jeweiligen Schmiegungsebenen der Kurve.

Dies leuchtet auch geometrisch ein, denn die Schmiegungsebene eines Punktes P einer Minimalkurve ist nach I S. 462 eine Minimalebene, also eine Ebene, die den Kegel der von P ausgehenden Minimalgeraden berührt und zwar längs derjenigen Minimalgeraden g, die Tangente der Kurve in P ist. Die Flächennormale von P muß nun auf dieser Tangente senkrecht stehen, d. h. nach Satz 63, I S. 457, in der Polarebene der Geraden g hinsichtlich jenes Kegels liegen. Da aber die Gerade g selbst Mantellinie des Kegels ist, fällt ihre Polarebene mit der Tangentenebene des Kegels längs g, d. h. mit der Schmiegungsebene von P zusammen. Mithin liegt die Flächennormale von P in der Tat in der Schmiegungsebene von P. —

Will man feststellen, unter welcher Bedingung die Parameterlinien (u) der Fläche geodätische Kurven sind, so kann man als Funktionen u und v von t geradezu $u =$ konst., $v = t$ wählen. Dann gibt (9)

$$\begin{vmatrix} F & F_v - \frac{1}{2} G_u \\ G & \frac{1}{2} G_v \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$F G_v - 2 G F_v + G G_u = 0.$$

Ebenso ergibt sich

$$F E_u - 2 E F_u + E E_v = 0$$

als Bedingung dafür, daß die Parameterlinien (v) geodätisch sind. Also:

Satz 7: Auf einer Fläche mit den Parametern u und v und den Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G sind die Parameterlinien (u) bzw. (v) dann und nur dann geodätische Kurven, wenn die Bedingung

$$F G_v - 2 G F_v + G G_u = 0$$

bzw. die Bedingung

$$F E_u - 2 E F_u + E E_v = 0$$

erfüllt ist.

Längs einer Flächenkurve, die nicht zu den Parameterlinien (u) gehört, ist der Parameter u nicht konstant, so daß u als die Hilfsveränderliche t gewählt werden kann. Dann ist $u' = 1$, $u'' = 0$ und

$$v' = \frac{dv}{du}, \qquad v'' = \frac{d^2 v}{du^2},$$

so daß sich aus Satz 4 ergibt:

Satz 8: Auf einer Fläche mit den Parametern u und v und den Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G ist — abgesehen von den Parameterlinien (u) selbst — eine Kurve dann und nur dann geodätisch, wenn v längs der Kurve eine Funktion von u ist, die der Bedingung

$$\begin{vmatrix} E + F\frac{dv}{du} & \frac{1}{2}E_u + E_v\frac{dv}{du} + \left(F_v - \frac{1}{2}G_u\right)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + F\frac{d^2v}{du^2} \\ F + G\frac{dv}{du} & F_u - \frac{1}{2}E_v + G_u\frac{dv}{du} + \frac{1}{2}G_v\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + G\frac{d^2v}{du^2} \end{vmatrix} = 0$$

Genüge leistet.

Stellt man sich die Aufgabe, die geodätischen Kurven einer gegebenen Fläche zu ermitteln, so sind E, F, G gegebene Funktionen von u und v, und es handelt sich darum, v so als Funktion von u zu bestimmen, daß sie zusammen mit ihren beiden Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach u die soeben angegebene Gleichung für alle Werte von u befriedigt. Diese Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung[1] für die gesuchte Funktion v von u.

[1] Obwohl Joh. Bernoulli 1697 im Briefwechsel mit Leibniz (vgl. die Anm. zu S. 472) mitteilte, daß er die Differentialgleichung der geodätischen Kurven gefunden habe, hat doch zuerst Euler sie angegeben, nämlich in der Abhandlung: „De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente", Comment. Acad. Petropolitanae, 3. Bd. (ad annum 1728), Petersburg 1732. Erst 1742 stellte Joh. Bernoulli die Gleichung im 4. Bande seiner „Opera omnia", Lausanne und Genf, auf. Auch Euler

Allerdings ist es nur in seltenen Fällen möglich, diese Differentialgleichung zu integrieren. Wohl aber kann man aus der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen entnehmen, daß aus dem Umstande, daß $d^2v:du^2$ in der Differentialgleichung nie fehlt, weil diese zweite Ableitung den Koeffizienten $EG - F^2 \neq 0$ hat, die Folgerung hervorgeht, daß jede Fläche eine zweifach unendliche Schar von geodätischen Kurven enthält, während sie nur einfach unendlich viele Minimalkurven, Krümmungskurven und Haupttangentenkurven hat. Während von einem Flächenpunkte nur zwei Minimalkurven, höchstens zwei Krümmungskurven und höchstens zwei Haupttangentenkurven ausgehen, lehrt jene allgemeine Theorie: Hat man einen regulären Punkt auf der Fläche gewählt und außerdem irgend eine seiner Fortschreitungsrichtungen, so gibt es eine und nur eine geodätische Kurve, die von dem Punkte in der gewählten Richtung ausgeht.

Wir betrachten jetzt zwei einfache Beispiele.

1. Beispiel: Auf einer abwickelbaren Fläche sind die geodätischen Kurven diejenigen, die sich bei der Ausbreitung der Fläche auf die Ebene als Geraden darstellen (vgl. S. 472). Zwischen zwei Punkten in der Ebene kann man

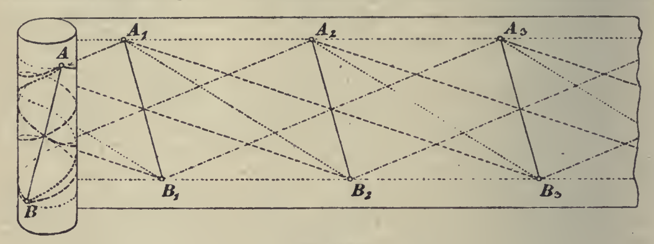


Fig. 95.

aber stets eine Gerade ziehen, woraus folgt, daß es zwischen zwei beliebigen Punkten einer abwickelbaren Fläche stets wenigstens eine geodätische Kurve gibt. Dabei nehmen wir an, daß beide Punkte auf demselben Mantel der Fläche liegen (vgl. I S. 357). Es kann vorkommen, daß es zwischen beiden Punkten unendlich viele geodätische Kurven gibt, wenn nämlich die Abwickelung der Fläche auf die Ebene periodisch ist, so daß ein und derselbe Punkt der Fläche bei der Ausbreitung auf die Ebene unendlich oft wiederkehrt. Man sieht dies am deutlichsten im Falle eines Rotations-

ging von der Betrachtung der Spannungen in einem über die Fläche gelegten Faden aus. Erst Lagrange leitete die wesentliche Eigenschaft der geodätischen Kurven aus der geometrischen Bedingung für kürzeste Linien zwischen zwei Punkten der Fläche ab in seinem „Calcul des fonctions", Paris 1806 (auch Oeuvres, 10. Bd.).

zylinders. Wickeln wir ihn auf die Ebene ab (siehe Fig. 95, S. 478), so kehrt eine und dieselbe Stelle A unendlich oft in der Abwickelung wieder, in den Lagen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Dasselbe gilt von einer Stelle B, der unendlich viele Lagen $B_1, B_2, B_3, \ldots$ in der Ebene entsprechen. Verbinden wir irgend einen der Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ mit irgend einem der Punkte $B_1, B_2, B_3, \ldots$ durch die Gerade, so gibt die Aufwickelung des Mantels auf den Zylinder eine geodätische Kurve, nämlich eine gemeine Schraubenlinie (vgl. I S. 212). Dabei geben die Geraden, die sich nur um eine der Perioden der Abwickelung voneinander unterscheiden, dieselbe Kurve, so die Geraden $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ usw.; ebenso $A_1 B_2$, $A_2 B_3$ usw. Diese Ergebnisse sind unabhängig davon, wie die Punkte A und B gegeneinander liegen. Wählen wir sie auch noch so dicht beieinander, so gibt es doch unendlich viele gemeine Schraubenlinien zwischen ihnen. Eine ist allerdings die kürzeste; in Fig. 95 ist es diejenige, die der Geraden $A_1 B_1$ entspricht. Aber alle sind geodätische Kurven.

2. Beispiel: Die Normalen einer Kugel sind ihre Radien. Die geodätischen Kurven der Kugel sind deshalb außer ihren Minimalgeraden (vgl. Satz 5 sowie Satz 32, S. 78) diejenigen Kurven, deren Schmiegungsebenen die Kugelmitte enthalten. Daraus folgt zunächst, daß alle diejenigen ebenen Kurven, in denen die Kugel von den Ebenen durch ihre Mitte geschnitten wird, also alle größten Kreise der Kugel geodätisch sind. Außerdem sind es keine geodätischen Kurven. Denn es wäre zu fordern, daß die Hauptnormalen die Radien sind; wird also der Mittelpunkt als Anfangspunkt gewählt und der Kugelradius als Längeneinheit, so sind die Richtungskosinus der Hauptnormale:

$$l = \varepsilon x, \qquad m = \varepsilon y, \qquad n = \varepsilon z,$$

wo $\varepsilon = +1$ oder -1 ist. Differentiation nach der Bogenlänge s der Kurve gibt nach III (C) und III (B):

$$\left(\varepsilon + \frac{1}{r}\right)\alpha + \frac{\lambda}{\varrho} = 0, \qquad \left(\varepsilon + \frac{1}{r}\right)\beta + \frac{\mu}{\varrho} = 0, \qquad \left(\varepsilon + \frac{1}{r}\right)\gamma + \frac{\nu}{\varrho} = 0,$$

wo α, β, γ die Richtungskosinus der Tangente und λ, μ, ν die der Binormale sind, während $1:r$ die Krümmung und $1:\varrho$ die Torsion bedeutet. Multiplikation mit α, β, γ bzw. λ, μ, ν und Addition gibt nach II (A):

$$\frac{1}{r} = -\varepsilon, \qquad \frac{1}{\varrho} = 0.$$

Nach der zweiten Gleichung sind die Kurven eben, siehe Satz 17, I S. 244, und nach der ersten haben sie die konstante Krümmung 1 oder -1. Wir kommen also nach Satz 29, I S. 51, zu den schon bestimmten Kreisen zurück.

Daß man in gewissen Fällen imstande ist, die Differentialgleichung der geodätischen Kurven, die in Satz 8 aufgestellt worden ist, vollständig zu integrieren, soll nun durch ein drittes und nicht so triviales Beispiel belegt werden.

3. Beispiel: Es liege eine Rotationsfläche[1] vor, deren Achse die z-Achse sei (vgl. das 3. Beispiel S. 47 u. f.):

[1] Jacob Bernoulli bestimmte in den Acta Eruditorum, Leipzig 1698, die geodätischen Kurven auf einer Rotationsfläche und gelangte durch Quadraturen

(10) $$x = p(u)\cos v, \quad y = p(u)\sin v, \quad z = q(u).$$

Wenn wir wie immer unter u die Bogenlänge der Meridiane verstehen, ist wie auf S. 48:

$$p'^2 + q'^2 = 1$$

und:

(11) $$E = 1, \quad F = 0, \quad G = p^2.$$

Nach Satz 7 sind also von den Breitenkreisen (u) nur diejenigen geodätische Kurven, für die $pp' = 0$ ist. Vom Falle $p = 0$ ist abzusehen, da er nur die in Punkte ausgearteten Breitenkreise liefert. Die Ableitung p' des Radius des Breitenkreises (u) ist gleich Null, wenn die Tangente der Meridiankurve der Drehachse parallel ist. Von den Breitenkreisen, die nicht in Punkte ausarten, sind also nur diejenigen geodätische Kurven, in denen die Fläche von Rotationszylindern um die z-Achse berührt wird. Sie heißen die **Kehlkreise** der Rotationsfläche. Die übrigen geodätischen Kurven bestimmen sich nach Satz 8 aus der Bedingung:

$$\begin{vmatrix} 1 & -pp'\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2 \\ p^2\dfrac{dv}{du} & 2pp'\dfrac{dv}{du} + p^2\dfrac{d^2v}{du^2} \end{vmatrix} = 0$$

oder

(12) $$\frac{d^2v}{du^2} + pp'\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + 2\frac{p'}{p}\frac{dv}{du} = 0.$$

Man kann diese Gleichung geometrisch deuten, wenn man den Winkel α einführt, den die gesuchte geodätische Kurve an der Stelle (u, v) mit dem Meridian (v) dieser Stelle bildet. Da längs der Meridiankurve (v) das Verhältnis $dv:du$ gleich Null, längs der geodätischen Linie gleich der in der vorstehenden Gleichung auftretenden ersten Ableitung von v ist, gibt (21), S. 39, wegen (11)

(13) $$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2}},$$

woraus für die in (12) vorkommende Ableitung $dv:du$ folgt:

$$\frac{dv}{du} = \varepsilon\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{p}$$

Wir haben hier den Faktor $\varepsilon = \pm 1$ hinzugefügt, weil wir über den Sinn, in dem der Winkel α gemessen werden soll, keine bestimmte Annahme gemacht haben. Längs der geodätischen Kurve ist nun wie v auch α eine Funktion von u, so daß die Differentiation nach u den folgenden Wert der zweiten Ableitung von v liefert:

$$\frac{d^2v}{du^2} = \varepsilon\left(\frac{1}{p\cos^2\alpha}\frac{d\alpha}{du} - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{p^2}p'\right).$$

---

zum Ziele, obgleich sein Verfahren fehlerhaft war. Alsdann stellte CLAIRAUT einen wichtigen Satz über die geodätischen Kurven auf Rotationsflächen auf, den wir ableiten werden. Siehe seine: „Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par M. Cassini avec plusieurs méthodes d'en tirer la grandeur et la figure de la terre"; Mém. de l'Acad. de Paris pour l'année 1733, Paris 1735.

Setzen wir die Werte der Ableitungen in (12) ein, so kommt:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{d\alpha}{du}+\frac{p'}{p}=0$$

oder:

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{d\sin\alpha}{du}+\frac{p'}{p}=0\,.$$

Diese Gleichung besagt, daß $p\sin\alpha$ konstant ist:

(14) $$p\sin\alpha=m \qquad (m=\text{konst.})$$

Da p der Radius des Breitenkreises ist, gilt also der

Satz 9: Längs einer solchen geodätischen Kurve einer Rotationsfläche, die keine Minimalkurve ist, hat das Produkt aus dem jeweiligen Radius des Breitenkreises und dem Sinus des Winkels, den die Kurve mit dem jeweiligen Meridian bildet, einen konstanten Wert.[1]

Da nach (13)

$$\sin^2\alpha=\frac{p^2\left(\frac{dv}{du}\right)^2}{1+p^2\left(\frac{dv}{du}\right)^2}$$

ist, läßt sich die Formel (14) so schreiben:

$$\frac{dv}{du}=\frac{m}{p\sqrt{p^2-m^2}}\,.$$

Hierin steht rechts eine Funktion von u allein. Eine Quadratur zeigt also, daß längs einer geodätischen Kurve der Rotationsfläche v eine Funktion von u sein muß von der Form:

(15) $$v=m\int\frac{du}{p\sqrt{p^2-m^2}}+\text{konst.} \qquad (m=\text{konst.}),$$

abgesehen natürlich immer von den Minimalkurven der Fläche.

Nach der Formel (14) kann man sich eine allgemeine Vorstellung von dem Verlaufe einer reellen geodätischen Kurve auf einer reellen Rotationsfläche machen: Wir können dabei p positiv annehmen wie auf S. 56. Ist nun z. B. für eine geodätische Kurve die Konstante m auch positiv, so ist der kleinste Wert, den p erreichen kann, der Wert m, für den $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ ist. Der Breitenkreis vom Radius m wird also von der Kurve berührt. Für noch kleinere Werte von p wird $m:p>1$, so daß die Kurve den Bereich derjenigen Breitenkreise meidet, deren Radius kleiner als m ist. Sie wird also am Kreise vom Radius m zu den Kreisen von größeren Radien umkehren; solange p wächst, nimmt α ab, d. h. die Kurve wird weniger steil gegen den Meridian. Wächst der Radius bis ins Unendliche, so nähert sich die Kurve einer Meridiankurve.

Insbesondere wollen wir die Ergebnisse auf Rotationsflächen von konstanter Krümmung K anwenden. Bei ihnen ist nach S. 138:

$$p''=-Kp\,.$$

[1] Dies ist der Satz von Clairaut, den wir in der letzten Anm. erwähnten.

In I S. 136 hatten wir unter (6) dieselbe Gleichung, nur stand dort x statt p, und die Veränderliche, nach der differenziert wurde, war nicht mit u, sondern mit s bezeichnet. Entsprechend (8), I S. 137, ist also

$$p = a \cos \sqrt{K} u + b \sin \sqrt{K} u \qquad (a = \text{konst.}, \quad b = \text{konst.})$$

die allgemeinste Funktion $p(u)$, für die die Rotationsfläche (10) die konstante Krümmung K hat. Wir haben nun vorausgesetzt, daß u die Bogenlänge auf den Meridianen bedeute. Ist c irgend eine Konstante, so ist aber auch

$$\bar{u} = u - c \tag{16}$$

die Bogenlänge auf den Meridianen, nur von einer anderen Stelle an gemessen. Dann ist:

$$p = a \cos \sqrt{K}(\bar{u} + c) + b \sin \sqrt{K}(\bar{u} + c)$$

oder:

$$p = \left(a \cos \sqrt{K} c + b \sin \sqrt{K} c\right) \cos \sqrt{K} \bar{u} + \\ + \left(-a \sin \sqrt{K} c + b \cos \sqrt{K} c\right) \sin \sqrt{K} \bar{u}:$$

Wir können die Konstante c so wählen, daß der Inhalt der zweiten Klammer gleich Null wird, indem wir nämlich

$$\operatorname{tg} \sqrt{K} c = \frac{b}{a},$$

also

$$\cos \sqrt{K} c = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \sqrt{K} c = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{17}$$

wählen. Dann wird

$$p = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \sqrt{K} \bar{u}.$$

Wir können uns jetzt vorstellen, wir hätten von vornherein schon die Bogenlänge durch $\bar{u}$ statt u ausgedrückt, und dürfen daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß in den Formeln (10) die Veränderliche u diese passender gewählte Bogenlänge sei, so daß wir

$$p = A \cos \sqrt{K} u \tag{18}$$

setzen dürfen, indem wir $\sqrt{a^2 + b^2}$ mit A bezeichnen.

Alsdann gibt (15):

$$v = \int \frac{m\, du}{A \cos \sqrt{K} u \sqrt{A^2 \cos^2 \sqrt{K} u - m^2}} + \text{konst.}$$

Diese Quadratur läßt sich ausführen, wenn man $\operatorname{ctg} \sqrt{K} u$ als neue Veränderliche t benutzt. Dann kommt nämlich:

$$\sin \sqrt{K} u = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, \qquad \cos \sqrt{K} u = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

und

$$du = -\frac{1}{\sqrt{K}} \sin^2 \sqrt{K} u \,.\, dt,$$

so daß sich für v ergibt:

$$v = -\frac{m}{A \sqrt{K}} \int \frac{dt}{t \sqrt{A^2 t^2 - m^2 (1 + t^2)}} + \text{konst.}$$

oder integriert:

$$v = \frac{1}{A\sqrt{K}} \arc\sin\left(\frac{m}{\sqrt{A^2 - m^2}} \cdot \frac{1}{t}\right) + \text{konst.},$$

also, wenn die mit $-A\sqrt{K}$ multiplizierte additive Konstante n genannt wird:

$$\sin(A\sqrt{K}v + n) = \frac{m}{\sqrt{A^2 - m^2}} \cdot \frac{1}{t}.$$

Wenn wieder $\operatorname{ctg}\sqrt{K}u$ für t gesetzt wird, kommt mithin:

(19) $$\sin(A\sqrt{K}v + n) = \frac{m}{\sqrt{A^2 - m^2}} \operatorname{tg}\sqrt{K}u.$$

Diese Gleichung zwischen u und v, die außer den durch den Wert (18) von p bedingten Konstanten K und A noch die willkürlichen Konstanten m und n enthält, stellt also die geodätischen Kurven der zur Annahme (18) gehörigen Rotationsfläche (10) von konstanter Krümmung K dar. Wir können die Gleichung auch so schreiben:

$$\cos n \,.\, \sin A\sqrt{K}v \,.\, \operatorname{ctg}\sqrt{K}u + \sin n \,.\, \cos A\sqrt{K}v \,.\, \operatorname{ctg}\sqrt{K}u = \frac{m}{\sqrt{A^2 - m^2}} \cdot$$

Wenn wir jetzt die neuen Parameter einführen:

(20) $$\bar{u} = \sin A\sqrt{K}v \,.\, \operatorname{ctg}\sqrt{K}u, \qquad \bar{v} = \cos A\sqrt{K}v \,.\, \operatorname{ctg}\sqrt{K}u,$$

nimmt sie die Form an:

$$\cos n \,.\, \bar{u} + \sin n \,.\, \bar{v} = \frac{m}{\sqrt{A^2 - m^2}},$$

wobei n und m die willkürlichen Konstanten sind. Mit m ist aber auch die rechte Seite eine willkürliche Konstante, etwa l, so daß wir haben:

(21) $$\cos n \,.\, \bar{u} + \sin n \,.\, \bar{v} = l \qquad (n, l = \text{konst.}).$$

Also hat sich ergeben:

Satz 10: Man kann auf einer Rotationsfläche konstanter Krümmung solche Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ einführen, mittels deren die geodätischen Kurven der Fläche durch die allgemeine lineare Gleichung

$$\text{konst.}\,\bar{u} + \text{konst.}\,\bar{v} = \text{konst.}$$

dargestellt werden.[1]

§ 2. Geodätische Abbildung von Flächen.

Die Differentialgleichung der geodätischen Kurven einer Fläche kann man nach Satz 4, S. 475, aufstellen, sobald man nur die Fundamentalgrößen erster Ordnung der Fläche als Funktionen der

[1] Dies zeigte Beltrami, siehe seine Abhandlung: „Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette“, Annali di Mat. p. ed appl., 1. Serie, 7. Bd. (1865).

Parameter kennt. Hieraus können wir einen wichtigen Schluß ziehen: Wenn es möglich ist, eine Fläche auf eine andere zu verbiegen, kann man entsprechenden Punkten beider Flächen gleiche Parameterwerte beilegen, und dann stimmen die Fundamentalgrößen erster Ordnung auf beiden Flächen nach Satz 7, S. 353, miteinander überein, folglich auch die Gleichung der geodätischen Kurven auf beiden Flächen, so daß sich ergibt:

Satz 11: Verbiegt man eine Fläche, so bleiben ihre geodätischen Kurven auch nach der Verbiegung geodätische Kurven.

Übrigens leuchtet dieser Satz für die kürzesten Kurven wegen der Längentreue bei der Verbiegung (vgl. S. 351) ohne weiteres ein, aber nicht jede geodätische Kurve ist eine kürzeste Linie.

Man kann nun die Frage aufwerfen, ob sich der Satz 11 umkehren läßt. Wenn wir diejenigen punktweisen Abbildungen einer Fläche, bei denen jeder geodätischen Kurve der einen Fläche eine geodätische Kurve der anderen entspricht, geodätische Abbildungen nennen, können wir die Frage so formulieren: Ist jede geodätische Abbildung eine Verbiegung?

Sicher braucht sie es für eine Rotationsfläche von konstanter Krümmung nicht zu sein. Denn nach Satz 10, S. 483, lassen sich auf einer Rotationsfläche konstanter Krümmung K solche Parameter u, v einführen, in denen die geodätischen Kurven der Fläche durch die allgemeine lineare Gleichung

$$\text{konst.}\, u + \text{konst.}\, v = \text{konst.}$$

dargestellt werden. Wenn man nun dem Punkte (u, v) dieser Fläche denjenigen Punkt einer Ebene zuordnet, der die rechtwinkligen Koordinaten u, v hat, liegt eine punktweise Abbildung der Fläche auf die Ebene vor. In der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten u, v ist aber eine lineare Gleichung in u und v die einer Geraden, d. h. einer geodätischen Kurve. Durchläuft der Punkt (u, v) auf der Fläche eine geodätische Kurve, so tut sein Bildpunkt (u, v) in der Ebene dasselbe, d. h. die Abbildung ist geodätisch. Sie ist aber keine Verbiegung, sobald das konstante Krümmungsmaß $K \neq 0$ ist, wegen Satz 9, S. 353.

Im Falle einer Rotationsfläche konstanter Krümmung ist die aufgeworfene Frage demnach zu verneinen. Dasselbe gilt überhaupt für Flächen konstanter Krümmung. Denn nach Satz 21, S. 382, läßt sich jede Fläche von der konstanten Krümmung K auf eine

Rotationsfläche von dieser Krümmung verbiegen, so daß sich Satz 10, S. 483, wegen Satz 11 so verallgemeinern läßt:

Satz 12: Auf jeder Fläche von konstanter Krümmung gibt es solche Parameter, in denen die geodätischen Kurven der Fläche durch die allgemeine lineare Gleichung dargestellt werden.

Indem wir nun dazu übergehen, die aufgeworfene Frage allgemein zu beantworten, bemerken wir gleich vorweg, daß wir erkennen werden, daß die Frage zwar im allgemeinen, bei beliebigen Flächen, zu bejahen, aber nicht nur für die Flächen von konstanter Krümmung, sondern auch für eine sie umfassende größere Familie von Flächen zu verneinen ist.

Wir nehmen also jetzt an, zwei Flächen seien geodätisch aufeinander abgebildet. Die Abbildung sei aber nicht etwa so beschaffen, daß einer und nur einer Schar von Minimalkurven der einen Fläche eine Schar von Minimalkurven auf der anderen Fläche entspreche. Diese Voraussetzungen sind im Falle der reellen Abbildung reeller Flächen stets erfüllt. Nach Satz 55, S. 109, gibt es auf der einen Fläche mindestens ein (im reellen Falle reelles) Orthogonalsystem, dem auf der anderen wieder ein (im reellen Falle reelles) Orthogonalsystem entspricht. Wählen wir die Kurven dieser Orthogonalsysteme als Parameterlinien, indem wir einander entsprechenden Kurven beider Systeme gleiche Parameterwerte u bzw. gleiche Parameterwerte v beilegen, so liegen also folgende Voraussetzungen vor:

Auf beiden Flächen bilden die Parameterlinien Orthogonalsysteme, und einander entsprechende Punkte beider Flächen gehören zu demselben Wertepaare der Parameter u, v. Nach Satz 15, S. 44, haben dann die Quadrate der Bogenelemente der beiden Flächen die Formen:

$$(1) \qquad ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2, \qquad d\bar{s}^2 = \bar{E}\,du^2 + \bar{G}\,dv^2,$$

indem $F = \bar{F} = 0$ ist. Weil $EG - F^2$ und $\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2$ von Null verschieden sein müssen, sind daher E, G, $\bar{E}$, $\bar{G}$ sämtlich von Null verschieden.

Die geodätischen Kurven der ersten Fläche genügen nach Satz 4, S. 475, der Gleichung:

$$2(u'v'' - v'u'') - \\ - \frac{E_v}{G}u'^3 + \left(2\frac{G_u}{G} - \frac{E_u}{E}\right)u'^2 v' + \left(\frac{G_v}{G} - 2\frac{E_v}{E}\right)u'v'^2 + \frac{G_u}{E}v'^3 = 0.$$

Bei der zweiten Fläche tritt an ihre Stelle die in $\bar{E}$ und $\bar{G}$ geschriebene Gleichung. Sollen nun die geodätischen Kurven beider Flächen einander entsprechen, so müssen beide Gleichungen für $u'v'' - v'u''$ denselben Wert liefern, wie auch $u':v'$ gewählt sein mag. Dies führt zu den vier Bedingungen:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{E_v}{G} = \dfrac{\bar{E}_v}{\bar{G}}, \qquad \dfrac{G_u}{E} = \dfrac{\bar{G}_u}{\bar{E}}, \\ 2\dfrac{G_u}{G} - \dfrac{E_u}{E} = 2\dfrac{\bar{G}_u}{\bar{G}} - \dfrac{\bar{E}_u}{\bar{E}}, \qquad \dfrac{G_v}{G} - 2\dfrac{E_v}{E} = \dfrac{\bar{G}_v}{\bar{G}} - 2\dfrac{\bar{E}_v}{\bar{E}} \end{cases}$$

Die beiden letzten Gleichungen kann man so schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial u} \ln\left(\frac{\bar{E}}{E} : \frac{\bar{G}^2}{G^2}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v} \ln\left(\frac{\bar{G}}{G} : \frac{\bar{E}^2}{E^2}\right) = 0.$$

Der erste Numerus ist somit eine Funktion von v allein, der zweite eine von u allein. Wird nun der erste Numerus mit V^3, der zweite mit U^3 bezeichnet, indem man unter V eine Funktion von v allein und unter U eine von u allein versteht, so darf man setzen:

$$(3)\qquad \bar{E} = \frac{E}{U^2 V}, \qquad \bar{G} = \frac{G}{U V^2}.$$

Dabei ist $U \neq 0$ und $V \neq 0$.

Jetzt bleibt noch die Befriedigung der beiden ersten Gleichungen (2) übrig. Einsetzen der Werte (3) gibt:

$$(4)\qquad (U - V)\frac{\partial \log E}{\partial v} = -V', \qquad (U - V)\frac{\partial \log G}{\partial u} = U'$$

Ist zunächst $U = V$, so müssen U und V beide dieselbe Konstante sein, weil U nur von u und V nur von v abhängt. Infolge davon wird dann nicht nur $U - V = 0$, sondern auch $U' = 0$ und $V' = 0$, so daß die Gleichungen (4) identisch befriedigt werden, während die Gleichungen (3) nur das Eine ergeben, daß

$$\bar{E} = cE, \qquad \bar{G} = cG \qquad (c = \text{konst.})$$

ist. Wird nunmehr die zweite Fläche vom Anfangspunkte aus ähnlich vergrößert, etwa auf das a-fache, so sind ihre Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ mit a zu multiplizieren. Deshalb treten $a^2\bar{E}$ und $a^2\bar{G}$ an die Stelle von $\bar{E}$ und $\bar{G}$. Nimmt man $a^2 = 1:c$ an, so zeigt sich mithin, daß für die in gewissem Maßstabe ähnlich vergrößerte zweite Fläche $\bar{E} = E$ und $\bar{G} = G$ wird. Da außerdem $\bar{F} = F = 0$ ist, ist alsdann die zweite Fläche nach Satz 7, S. 353, auf die erste verbiegbar. Nun wissen wir schon, siehe Satz 11, daß jede Verbiegung auch eine geodätische Abbildung ist, und es leuchtet von selbst ein,

daß die Abbildung geodätisch bleibt, wenn man die durch die Verbiegung gewonnene Fläche ähnlich vergrößert oder verkleinert, denn dabei geht ja jede geodätische Kurve augenscheinlich wieder in eine geodätische Kurve über.

Die Annahme $U = V$ liefert also nur bekannte Ergebnisse. Von Interesse ist nur noch der Fall $U \neq V$. Dann folgt aus (4)

$$\frac{\partial \log E}{\partial v} = \frac{\partial \log (U - V)}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \log G}{\partial u} = \frac{\partial \log (U - V)}{\partial u}$$

oder, wenn λ eine von Null verschiedene Funktion von u allein sowie μ eine von Null verschiedene Funktion von v allein bedeutet:

(5) $$E = \lambda(U - V), \qquad G = \mu(U - V),$$

so daß (3) noch

(6) $$\bar{E} = \lambda \frac{U - V}{U^2 V}, \qquad \bar{G} = \mu \frac{U - V}{U V^2}$$

liefert. Wir hätten nun von vornherein die Integrale

$$\int \sqrt{\lambda}\, du \quad \text{und} \quad \int \sqrt{\mu}\, dv,$$

die ja nur von u bzw. v abhängen, als die benutzten Parameter u und v einführen können, denn das ändert an der Voraussetzung nichts, daß die Parameterlinien (u) und (v) auf beiden Flächen Orthogonalsysteme bilden. Dies aber bedeutet, daß wir ohne Beeinträchtigung der Tragweite unserer Ergebnisse $\lambda = 1$ und $\mu = 1$ setzen dürfen. Dann gibt (5) und (6)

$$E = G = U - V, \qquad \bar{E} = \frac{U - V}{U^2 V}, \qquad \bar{G} = \frac{U - V}{U V^2},$$

so daß

(7) $$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2), \qquad d\bar{s}^2 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right)\left(\frac{du^2}{U} + \frac{dv^2}{V}\right)$$

die Quadrate der Bogenelemente beider Flächen sind. Wenn wir noch $-V$ statt V schreiben, haben wir somit den

Satz 13:[1] Soll eine Abbildung einer Fläche auf eine andere Fläche geodätisch sein und wird dabei nicht etwa eine und nur eine Schar von Minimalkurven der einen Fläche als ebensolche Schar auf der anderen abgebildet,

---

[1] Dieser Satz rührt her von Dini, „Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un' altra", Annali di Matem. 2. Serie, 3. Bd. (1869). Allerdings hat Dini die oben ausgesprochene Einschränkung nicht erwähnt, weil er nur reelle Abbildungen ins Auge faßte.

eine Möglichkeit, die bei reeller Abbildung nie eintritt, so ist die Abbildung im allgemeinen eine solche Beziehung zwischen beiden Flächen, bei der die zweite Fläche aus der ersten durch irgend eine Verbiegung und irgend eine ähnliche Vergrößerung hervorgeht. Dies ist nur dann nicht der Fall, wenn die Flächen so beschaffen sind, daß sich die Quadrate ihrer Bogenelemente mittels Parameter u, v, die auf beiden Flächen einander entsprechenden Punkten zugehören, auf die Formen bringen lassen:

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2), \qquad d\bar{s}^2 = -\left(\frac{1}{U} + \frac{1}{V}\right)\left(\frac{du^2}{U} - \frac{dv^2}{V}\right),$$

wo U eine Funktion von u allein und V eine Funktion von v allein ist.

Dies führt uns zur Familie derjenigen Flächen, bei denen sich das Quadrat des Bogenelements auf die Form

$$ds^2 = [U(u) + V(v)][du^2 + dv^2] \tag{8}$$

bringen läßt.[1] Denn auch das zweite im Satze angegebene Bogenelement-Quadrat läßt sich dieser Form (8) unterordnen. Wenn man nämlich auf der zweiten Fläche

$$\int \frac{du}{\sqrt{U}} = \bar{u}, \qquad \int \frac{dv}{\sqrt{-V}} = \bar{v}$$

als Parameter einführt, so daß $\bar{u}$ eine Funktion von u allein und $\bar{v}$ eine Funktion von v allein ist, kommt:

$$d\bar{s}^2 = -\left(\frac{1}{U} + \frac{1}{V}\right)(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2).$$

Hierin ist nun $-1:U$ eine Funktion $\bar{U}$ von $\bar{u}$ allein und $-1:V$ eine Funktion $\bar{V}$ von $\bar{v}$ allein, so daß kommt:

$$d\bar{s}^2 = (\bar{U} + \bar{V})(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2),$$

also, abgesehen von der Bezeichnung, die Form (8).

Zu den Flächen, deren Bogenelement-Quadrat auf die Form (8) gebracht werden kann, gehören insbesondere die Flächen konstanter Krümmung K. Nach Satz 20, S. 382, läßt sich nämlich ihr Bogenelement-Quadrat auf die Form

$$ds^2 = -\frac{4}{K}\frac{du\,dv}{(u+v)^2}$$

[1] Man nennt diese Flächen Liouvillesche Flächen, weil Liouville durch seine Note III: „Théorème concernant l'intégration de l'équation des lignes géodésiques" zu Monges „Application", 5. Aufl., Paris 1850, zuerst auf diese Flächenfamilie aufmerksam gemacht hat.

bringen, und wenn hierin

$$u = \bar{u} + i\bar{v}, \qquad v = \bar{u} - i\bar{v}$$

gesetzt wird, kommt die Form

$$ds^2 = -\frac{1}{K\bar{u}^2}(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2),$$

die mit in (8) enthalten ist.

Auch die Rotationsflächen gehören zu den durch (8) charakterisierten Flächen, denn nach S. 48 läßt sich ds^2 bei einer Rotationsfläche auf die Form

$$ds^2 = du^2 + p^2(u)\,dv^2$$

oder also

$$ds^2 = p^2(u)\left(\frac{du^2}{p^2(u)} + dv^2\right)$$

bringen, die sich der Form (8) unterordnet, wenn $\int\frac{du}{p}$ statt u als der eine Parameter benutzt wird.

Hieraus schließen wir nach Satz 7, S. 353, daß auch die auf Rotationsflächen verbiegbaren Flächen zu denjenigen Flächen gehören, bei denen sich ds^2 auf die Form (8) bringen läßt, insbesondere also nach Satz 17, S. 372, die Schraubenflächen.

Liegt eine Fläche vor, deren Bogenelement-Quadrat die Form (8) hat, so ist die Differentialgleichung ihrer geodätischen Kurven nach Satz 4, S. 475, wegen

(9) $$E = G = U + V \neq 0, \qquad F = 0$$

diese:

(10) $$(U'v' - V'u')(u'^2 + v'^2) + 2(U + V)(u'v'' - v'u'') = 0.$$

Wollen wir die geodätischen Kurven der Fläche bestimmen, so handelt es sich um die Aufgabe, u und v so als Funktionen eines Parameters t zu berechnen, daß sie mit ihren ersten und zweiten Ableitungen der Gleichung (10) für alle Werte von t genügen, wobei zu beachten ist, daß U als Funktion von u und V als Funktion von v auch Funktionen von t sind. Wegen

$$\frac{dU}{dt} = U'\frac{du}{dt} = U'u', \qquad \frac{dV}{dt} = V'v',$$

nimmt (10) die Form an:

(11) $$\frac{v'}{u'}\frac{dU}{dt} - \frac{u'}{v'}\frac{dV}{dt} + 2(U + V)\frac{u'v'' - v'u''}{u'^2 + v'^2} = 0.$$

Der letzte Bruch hierin ist aber die Ableitung von $\operatorname{arctg}(v' : u')$. Da $v' : u'$ auch in den beiden ersten Gliedern auftritt, veranlaßt uns dies, den Winkel α, dessen Tangens gleich $v' : u'$ ist, als Hilfsgröße einzuführen. Wir setzen also:

(12) $$u' = \varrho \cos\alpha, \qquad v' = \varrho \sin\alpha,$$

wo ϱ und α noch unbekannte Funktionen von t sind. Jetzt nimmt (11) die Form an:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{dU}{dt} - \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{dV}{dt} + 2(U+V)\frac{d\alpha}{dt} = 0$$

oder, wenn mit $\sin\alpha\cos\alpha$ multipliziert wird:

$$\sin^2\alpha \cdot \frac{dU}{dt} - \cos^2\alpha \cdot \frac{dV}{dt} + 2(U+V)\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

Nun ist

$$\sin^2\alpha \cdot \frac{dU}{dt} + 2\,U\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}$$

die Ableitung von $\sin^2\alpha\,.\,U$ und

$$\cos^2\alpha \cdot \frac{dV}{dt} - 2\,V\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}$$

die Ableitung von $\cos^2\alpha\,.\,V$, so daß mithin

(13) $$\sin^2\alpha\,.\,U - \cos^2\alpha\,.\,V = a \qquad (a = \text{konst.})$$

sein muß. Aber nach (12) ist:

$$\sin^2\alpha = \frac{v'^2}{u'^2+v'^2}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{u'^2}{u'^2+v'^2},$$

so daß folgt:

$$v'^2\,U - u'^2\,V = a(u'^2 + v'^2)$$

oder:

$$\frac{u'}{\sqrt{U-a}} = \frac{v'}{\sqrt{V+a}}.$$

Da links nur u und u' und rechts nur v und v' auftreten, ergeben zwei Quadraturen:

(14) $$\int\frac{du}{\sqrt{U-a}} - \int\frac{dv}{\sqrt{V+a}} = b \qquad (b = \text{konst.}),$$

und damit sind die Gleichungen zwischen u und v gefunden, die geodätische Kurven darstellen.

Da die Parameterkurven (u) und (v) zueinander orthogonal sind, hat der Hilfswinkel α eine einfache geometrische Bedeutung: Wenn der Punkt (u, v) zu einem unendlich benachbarten Punkte $(u + du, v + dv)$ oder $(u + u'\,dt,\ v + v'\,dt)$ auf einer geodätischen Kurve fortschreitet, ist nämlich der Kosinus des Winkels dieser Fortschreitungsrichtung mit der Fortschreitungsrichtung längs der Parameterkurve (v) nach (21), S. 39, und nach (9) gleich

$$\frac{u'}{\sqrt{u'^2+v'^2}}.$$

Der Tangens des Winkels ist also gleich $\pm v' : u'$, so daß α einer derjenigen Winkel ist, den die geodätische Kurve im Punkte (u, v) mit der hindurchgehenden Parameterkurve (v) bildet

Ist die Fläche insbesondere eine **Rotationsfläche** (vgl. S. 48)

$$x = p(u)\cos v, \quad y = p(u)\sin v, \quad z = q(u)$$

mit der Bogenlänge u auf den Meridianen, so ist:

$$ds^2 = p^2\left(\frac{du^2}{p^2} + dv^2\right).$$

Werden aber

$$\int \frac{du}{p} \text{ und } v$$

als neue Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ benutzt, wodurch

$$ds^2 = p^2(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)$$

wird, indem p^2 jetzt eine Funktion von $\bar{u}$ allein bedeutet, so gibt die Vergleichung mit (8), daß jetzt $\bar{u}$ und $\bar{v}$ statt u und v und außerdem $U = p^2$, $V = 0$ zu setzen ist, somit statt (13) kommt:

$$p^2 \sin^2 \alpha = a.$$

Die auf S. 481 aufgestellte Formel (14) ist demnach ein besonderer Fall unserer allgemeineren Formel (13). Der Satz 9 ebenda ist mithin einer Verallgemeinerung auf diejenigen Flächen fähig, deren ds^2 auf die Form (8) gebracht werden kann.

Unser Ergebnis wollen wir so zusammenfassen:

Satz 14:[1] Kann das Quadrat des Bogenelements einer Fläche auf die Form

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2)$$

gebracht werden, wo U eine Funktion von u allein und V eine Funktion von v allein ist, so stellt

$$\int \frac{du}{\sqrt{U - a}} - \int \frac{dv}{\sqrt{V + a}} = b \qquad (a, b = \text{konst.})$$

die Gleichung der geodätischen Kurven der Fläche dar.

Wir wollen jetzt fragen, welche Flächen sich geodätisch auf die Ebene abbilden lassen.

Zunächst selbstverständlich die auf die Ebene verbiegbaren Flächen, d. h. die abwickelbaren Flächen. Durch ähnliche Vergrößerung gewinnen wir aus ihnen keine neuen Flächen:

---

[1] Satz von Liouville, vgl. die Anm. zu S. 488.

Wenn wir weiterhin von den abwickelbaren Flächen absehen und wie in Satz 13 zunächst den bei reeller Abbildung nie vorkommenden Fall beiseite lassen, wo gerade und nur der einen Schar von Minimalgeraden der Ebene eine Schar von Minimalkurven auf der Fläche entspricht, bleibt nur noch die Annahme übrig, daß das Quadrat des Bogenelements der Ebene auf die Form

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2) \tag{15}$$

und das der gesuchten Fläche auf die Form

$$d\bar{s}^2 = -\left(\frac{1}{U} + \frac{1}{V}\right)\left(\frac{du^2}{U} - \frac{dv^2}{V}\right) \tag{16}$$

gebracht werden kann. Daß die Form (15) möglich ist, folgt daraus, daß die Ebene zu den vorhin angeführten besonderen Flächenarten gehört.

Wir haben nun, um die fraglichen Flächen zu bestimmen, die für die Ebene und die auf sie abwickelbaren Flächen charakteristische Eigenschaft zu benutzen, daß ihr Krümmungsmaß $K = 0$ ist (nach Satz 101, S. 266). Das Krümmungsmaß läßt sich aus den Fundamentalgrößen erster Ordnung, die aus (15) folgen, nämlich aus

$$E = U + V, \quad F = 0, \quad G = U + V$$

nach XVII (B) leicht berechnen, da U nur von u und V nur von v abhängt:

$$K = \frac{1}{2(U + V)^3}[U'^2 + V'^2 - (U + V)(U'' + V'')]. \tag{17}$$

Da sich übrigens das Bogenelement-Quadrat (16) durch Einführung der neuen Parameter

$$\int \frac{du}{\sqrt{U}} = \bar{u}, \quad \int \frac{dv}{\sqrt{-V}} = v,$$

wie schon auf S. 488 erwähnt wurde, auf die zu (15) analoge Form

$$d\bar{s}^2 = (\bar{U} + \bar{V})(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)$$

bringen läßt, wo $\bar{U}$ und $\bar{V}$ Funktionen von $\bar{u}$ bzw. $\bar{v}$ allein sind, nämlich

$$\bar{U} = -\frac{1}{U}, \quad \bar{V} = -\frac{1}{V},$$

ergibt sich entsprechend (17) das Krümmungsmaß der zu (16) gehörigen Fläche so:

$$\bar{K} = \frac{1}{2(\bar{U} + \bar{V})^3}[\bar{U}'^2 + \bar{V}'^2 - (\bar{U} + \bar{V})(\bar{U}'' + \bar{V}'')].$$

Führen wir hierin wieder die Parameter u und v ein, so kommt, weil

$$\frac{du}{d\bar{u}} = \sqrt{U}, \qquad \frac{dv}{d\bar{v}} = \sqrt{-V}$$

ist:

(18) $$\bar{K} = \frac{1}{2(U+V)^3}\left[\tfrac{1}{2}(3U+V)V^2U'^2 - \tfrac{1}{2}(U+3V)U^2V'^2 + \right.$$
$$\left. + UV(U+V)(UV'' - VU'')\right].$$

Weil nun, wie gesagt, $K = 0$ sein muß, gibt (17):

(19) $$U'^2 - UU'' - (UV'' + VU'') + V'^2 - VV'' = 0.$$

Wir müssen also die Funktionen U von u und V von v in allgemeinster Weise so bestimmen, daß sie für alle Werte von u und v der Bedingung (19) genügen, aus der durch aufeinanderfolgende Differentiationen nach u und v sofort noch folgt:

$$U'V''' + V'U''' = 0.$$

Da U und V keine Konstanten sind, weil sonst $\bar{K}$ nach (18) gleich Null, die gesuchte Fläche daher gegen die Voraussetzung abwickelbar wäre, können wir hierfür schreiben:

(20) $$\frac{V'''}{V'} = -\frac{U'''}{U'},$$

es sei denn, daß etwa $U =$ konst., aber $V \neq$ konst. wäre. Erledigen wir daher vorerst die Annahme:

$$U = a, \qquad V' \neq 0 \qquad (a = \text{konst.}).$$

In diesem Falle gibt (19):

$$-aV'' + V'^2 - VV'' = 0,$$

woraus folgt, daß die Funktion $\varphi = V + a$ von v allein die Bedingung

$$\varphi'^2 - \varphi\varphi'' = 0$$

oder

$$\frac{d^2 \log \varphi}{dv^2} = 0$$

erfüllt, $\log \varphi$ also linear in v, d. h. φ von der Form

$$\varphi = b\,e^{cv} \qquad (b, c = \text{konst.})$$

ist, so daß kommt:

(21) $$U = a, \qquad V = \varphi - a = b\,e^{cv} - a.$$

Einsetzen dieser Werte in (18) ergibt für $\bar{K}$ einen konstanten Wert. In diesem Falle also ist die fragliche Fläche von konstanter Krümmung. Im Falle $U \neq$ konst., $V =$ konst. ergibt sich dasselbe.

Dasselbe ergibt sich nun aber auch im allgemeinen Falle, in dem (20) gilt und weder U' noch V' gleich Null ist. Denn da in (20) links nur v, rechts nur u auftritt, sind beide Seiten derselben Konstanten gleich, die wir mit c^2 bezeichnen wollen. Alsdann ist

$$U''' = -c^2 U', \qquad V''' = c^2 V'$$

oder:

$$\frac{d^2 U'}{du^2} = -c^2 U', \qquad \frac{d^2 V'}{dv^2} = c^2 V'.$$

Die Funktionen U' von u und V' von v stimmen demnach mit ihren zweiten Ableitungen bis auf einen konstanten Faktor $-c^2$ bzw. c^2 überein. Eine solche Erscheinung lag vor kurzem auf S. 481 vor, und wie dort benutzen wir auch hier das Ergebnis in I S. 136, 137, wo es sich in (6) um eine Funktion x von s handelte, deren zweite Ableitung gleich $-Kx$ ($K =$ konst.) war, und von der wir sahen, daß sie die Form (8), I S. 137, haben muß. Indem wir für s jetzt u bzw. v, für x jetzt U' bzw. V' und für K jetzt c^2 bzw. $-c^2$ setzen, erhalten wir also:

$$U' = \text{konst.} \cos\, cu + \text{konst.} \sin\, cu,$$
$$V' = \text{konst.} \cos icv + \text{konst.} \sin icv,$$

sobald $c \neq 0$ ist, woraus durch Integration folgt:

$$(22) \qquad \begin{cases} U = a_1 \cos\, cu + b_1 \sin\, cu + m_1, \\ V = a_2 \cos icv + b_2 \sin icv + m_2, \end{cases}$$

wo a_1, b_1, a_2, b_2, c, m_1 und m_2 Konstanten sind. Setzen wir diese Werte in (19) ein, so kommt:

$$(m_1 + m_2)(a_1 \cos cu + b_1 \sin cu - a_2 \cos icv - b_2 \sin icv) +$$
$$+ a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 = 0.$$

Wäre $m_1 + m_2 \neq 0$, so müßte $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$, also $U' = V' = 0$ sein, was gegen die Voraussetzung ist. Mithin kommt:

$$m_1 + m_2 = 0, \qquad a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2.$$

Diese Bedingungen erfüllen wir, indem wir neue Konstanten m, n, α, β einführen, nämlich setzen:

$$m_1 = m, \qquad a_1 = n \cos\, \alpha, \qquad b_1 = n \sin\, \alpha,$$
$$m_2 = -m, \qquad a_2 = n \cos i\beta, \qquad b_2 = n \sin i\beta,$$

so daß (22) gibt:

$$(23) \qquad \begin{cases} U = n \cos\, (cu - \alpha) + m, \\ V = n \cos i(cv - \beta) - m \end{cases} \qquad (m, n, \alpha, \beta, c = \text{konst.}).$$

Jetzt aber geht für $\bar{K}$ aus (18) eine Konstante hervor, d. h. die fraglichen Flächen haben konstante Krümmung.

Im Falle $c = 0$, der leicht entsprechend zu erledigen ist, ergibt sich dies ebenfalls.

Wir sahen schon in Satz 9, S. 483, daß es auf jeder Fläche konstanter Krümmung Parameter u, v gibt, in denen sich die geodätischen Kurven durch die allgemeine lineare Gleichung in u und v darstellen, was, wenn u und v als rechtwinklige Punktkoordinaten in der Ebene gedeutet werden, darauf hinaus kommt, daß sich die Flächen konstanter Krümmung geodätisch auf die Ebene abbilden lassen. Unsere letzten Betrachtungen gestatten uns nun, diesen Satz umzukehren und zwar, da die abwickelbaren Flächen die konstante Krümmung Null haben, in dieser Weise:

Satz 15:[1] Die Flächen konstanter Krümmung und sonst keine Flächen lassen sich geodätisch auf die Ebene abbilden.

Wir haben in diesem Satze allerdings gar nicht erwähnt, daß wir die Möglichkeit beiseite gelassen hatten, daß einer und nur einer Schar von Minimalgeraden der Ebene eine Schar von Minimalkurven der Fläche entspricht. Es läßt sich aber zeigen, daß auch in diesem Falle nur Flächen konstanter Krümmung, nämlich abwickelbare Flächen hervorgehen. In der Tat: Führen wir in der xy-Ebene die Größen $x + iy$ und $x - iy$ als Parameter u, v ein, so ist

$$ds^2 = du\,dv$$

das Quadrat ihres Bogenelements. Benutzen wir auf der Fläche, die auf die Ebene abgebildet werden soll, die den Minimalgeraden (u) und (v) der Ebene entsprechenden Kurven als Parameterlinien, so sei

$$d\bar{s}^2 = \bar{E}\,du^2 + 2\bar{F}\,du\,dv + \bar{G}\,dv^2$$

das Quadrat ihres Bogenelements, während bei der Ebene $E = G = 0$, $F = \frac{1}{2}$ ist. Da nur den Minimalgeraden der einen Schar, etwa den Geraden (u), Minimalkurven auf der Fläche entsprechen sollen, muß $d\bar{s}^2$ für $du = 0$ auch verschwinden, d. h. es ist $\bar{G} = 0$. Dagegen

[1] Das Problem der geodätischen Abbildung einer Fläche auf die Ebene wurde von Beltrami gestellt und gelöst. Siehe seine in der Anm. zu S. 483 genannte Abhandlung. Am Schlusse dieser Arbeit warf Beltrami die Frage nach der geodätischen Abbildung einer Fläche auf eine andere Fläche auf, eine Frage, die, wie wir in der Anm. zu S. 487 schon angaben, alsdann von Dini beantwortet wurde.

ist $\bar{E} \neq 0$ anzunehmen. Außerdem ist $\bar{F} \neq 0$, da sonst $\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2$ verschwände. Nach Satz 4, S. 475, ist jetzt

$$v' u'' - u' v'' = 0$$

die Differentialgleichung der geodätischen Kurven in der Ebene und

$$\begin{aligned}\bar{F}^2(v' u'' - u' v'') + [\bar{E}(\bar{F}_u - \tfrac{1}{2}\bar{E}_v) - \tfrac{1}{2}\bar{F}\bar{E}_u]\,u'^3 + \\ + \bar{F}(\bar{F}_u - \tfrac{3}{2}\bar{E}_v)\,u'^2 v' - \bar{F}\bar{F}_v u' v'^2 = 0\end{aligned}$$

die Differentialgleichung der geodätischen Kurven auf der Fläche. Soll die Abbildung geodätisch sein, so muß die zweite Gleichung infolge der ersten bestehen. Hieraus folgt wegen des letzten Gliedes, daß $\bar{F}$ nur u enthalten darf, und wegen des vorletzten:

$$\bar{F}' = \tfrac{3}{2}\bar{E}_v.$$

Da $\bar{F}$ nur u enthält und $\bar{G} = 0$ ist, ergibt sich als Krümmungsmaß $\bar{K}$ der Fläche nach XVII (B):

$$\bar{K} = \frac{\bar{E}_{vv}}{2\bar{F}^2}.$$

Soeben aber zeigte sich, daß $\bar{E}_v$ nur von u abhängt, so daß $\bar{K} = 0$, die Fläche also, wie behauptet wurde, abwickelbar sein muß (vgl. Satz 101, S. 266).

Daher durften wir unser Ergebnis in der Form des Satzes 15 ohne jede Einschränkung aussprechen.

1. Beispiel: Die Kugel wird dadurch, daß man sie von ihrer Mitte aus perspektiv auf eine Ebene projiziert, augenscheinlich geodätisch auf die Ebene abgebildet. Man könnte also geographische Karten herstellen, auf denen die größten Kreise der Kugel als Geraden erschienen, doch würden solche Karten starke Verzerrungen aufweisen.

2. Beispiel: Die allgemeinste geodätische Abbildung der Ebene auf die Ebene, d. h. die allgemeinste Abbildung, bei der jeder Geraden der einen Ebene eine Gerade der anderen Ebene entspricht, kann man in verschiedenen Weisen bestimmen, so z. B. mit den Hilfsmitteln der synthetischen Geometrie. Man erkennt dann, daß sie erzielt wird, wenn man die Ebenen in passende Lagen gegeneinander bringt und nun von einem passenden Zentrum aus die eine Ebene perspektiv auf die andere Ebene projiziert. Man nennt deshalb auch die geodätische Abbildung einer Ebene auf eine andere Ebene eine projektive Abbildung. Auch der Name Kollineation ist dafür gebräuchlich. Will man alle diese geodätischen Abbildungen analytisch bestimmen, so kann man so verfahren:[1] Sind u, v in der einen Ebene recht-

[1] So wie hier der Verf. die Aufgabe in dem von ihm bearbeiteten Werke von Lie: „Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen", Leipzig 1893, in § 3 des 2. Kap. gelöst.

winklige Koordinaten und faßt man längs einer Kurve v als Funktion von u auf, so ist

$$\frac{d^2 v}{d u^2} = 0 \tag{24}$$

die Differentialgleichung der geodätischen Kurven, d. i. der Geraden, da sie ja aussagt, daß v linear und ganz in u ist. Ist nun derjenige Punkt der zweiten Ebene, der dem Punkte (u, v) der ersten entspricht, mit denselben Parametern versehen, so seien

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \tag{25}$$

die rechtwinkligen Koordinaten in der zweiten Ebene. Hier ist

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = 0 \tag{26}$$

ganz entsprechend die Differentialgleichung der geodätischen Kurven (Geraden). Aber x und y sind die durch (25) definierten Funktionen von u und v. Daher ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}} = \frac{\psi_u + \psi_v v'}{\varphi_u + \varphi_v v'},$$

wenn wir auch auf der zweiten Ebene längs der geodätischen Kurven (Geraden) u als Parameter benutzen, und wenn der Strich die Differentiation nach u andeutet. Weiter folgt hieraus:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d\,\frac{dy}{dx}}{du} : \frac{dx}{du} = \frac{1}{\varphi_u + \varphi_v v'} \cdot \frac{d\,\frac{\psi_u + \psi_v v'}{\varphi_u + \varphi_v v'}}{du}.$$

Führen wir die letzte Differentiation aus, indem wir immer dabei v als Funktion von u betrachten, so finden wir, daß die Differentialgleichung (26) der geodätischen Kurven (Geraden) der zweiten Ebene die Form hat:

$$(\psi_{uu} + 2\,\psi_{uv} v' + \psi_{vv} v'^2 + \psi_v v'')(\varphi_u + \varphi_v v') -$$
$$- (\varphi_{uu} + 2\,\varphi_{uv} v' + \varphi_{vv} v'^2 + \varphi_v v'')(\psi_u + \psi_v v') = 0.$$

Soll die Abbildung geodätisch sein, so muß sich diese Gleichung auf die Gleichung (24) oder $v'' = 0$ reduzieren. Dies führt auf vier Bedingungen, indem die Koeffizienten von v'^3, v'^2, v' und das von v' freie Glied einzeln gleich Null sein müssen:

$$\begin{cases} \psi_{uu}\varphi_u - \varphi_{uu}\psi_u = 0, \\ \psi_{uu}\varphi_v - \varphi_{uu}\psi_v + 2\,\psi_{uv}\varphi_u - 2\,\varphi_{uv}\psi_u = 0, \\ \psi_{vv}\varphi_u - \varphi_{vv}\psi_u + 2\,\psi_{uv}\varphi_v - 2\,\varphi_{uv}\psi_v = 0, \\ \psi_{vv}\varphi_v - \varphi_{vv}\psi_v = 0, \end{cases} \tag{27}$$

und zwar ist zu verlangen, daß **diese Gleichungen für alle Werte von u und v richtig seien.** Die erste und letzte geben:

$$\frac{\partial \log \psi_u}{\partial u} = \frac{\partial \log \varphi_u}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \log \psi_v}{\partial v} = \frac{\partial \log \varphi_v}{\partial v},$$

so daß $\psi_u : \varphi_u$ eine Funktion V von v allein und $\psi_v : \varphi_v$ eine Funktion U von u allein sein muß, woraus folgt:

(28) $$\psi_u = V\varphi_u, \quad \psi_v = U\varphi_v.$$

Setzen wir diese Werte in die beiden mittleren Gleichungen (27) ein, so kommt:

(29) $$(U - V)\varphi_{uu}\varphi_v - 2V'\varphi_u^2 = 0, \qquad (U - V)\varphi_{vv}\varphi_u + 2U'\varphi_v^2 = 0.$$

Ferner ergibt sich, wenn wir aus jeder der Gleichungen (28) den Wert von ψ_{uv} berechnen und beide einander gleich setzen:

(30) $$(U - V)\varphi_{uv} - V'\varphi_u + U'\varphi_v = 0.$$

Die erste Gleichung (29) gibt, partiell nach u differenziert:

$$U'\varphi_{uu}\varphi_v + (U - V)(\varphi_{uuu}\varphi_v + \varphi_{uu}\varphi_{uv}) - 4V'\varphi_u\varphi_{uu} = 0$$

oder, wenn hierin die Werte von φ_{uu}, φ_{uv} und φ_{vv} aus (29) und (30) eingesetzt werden:

$$\varphi_{uuu} = \frac{6V'^2}{(U - V)^2}\frac{\varphi_u^3}{\varphi_v^2}.$$

Hieraus folgt, wenn wir für φ_v den aus der ersten Gleichung (29) folgenden Wert einsetzen:

$$3\varphi_{uu}^2 - 2\varphi_u\varphi_{uuu} = 0,$$

was nach Satz 46, S. 92, aussagt, daß φ in u linear gebrochen sein muß. Da die Gleichungen (27) nur untereinander vertauscht werden, wenn u mit v vertauscht wird, muß φ auch in v linear gebrochen sein. Also kommt:

$$\varphi = \frac{a_1 + b_1 u + c_1 v + d_1 uv}{\alpha + \beta u + \gamma v + \delta uv},$$

wo a_1, b_1, c_1, d_1 und α, β, γ, δ Konstanten sind. Aus der Symmetrie der Formeln (27) folgt, daß ψ dieselbe allgemeine Form hat, und aus (28), daß man die Nenner in φ und ψ gleich annehmen darf, so daß sich ergibt:

$$\psi = \frac{a_2 + b_2 u + c_2 v + d_2 uv}{\alpha + \beta u + \gamma v + \delta uv},$$

wo a_2, b_2, c_2, d_2 Konstanten sind. Einsetzen dieser Werte von φ und ψ in die beiden mittleren Gleichungen (27) gibt sofort $d_1 = d_2 = \delta = 0$, so daß bleibt:

$$\varphi = \frac{a_1 + b_1 u + c_1 v}{\alpha + \beta u + \gamma v}, \qquad \psi = \frac{a_2 + b_2 u + c_2 v}{\alpha + \beta u + \gamma v}.$$

Diese Werte erfüllen alle vier Gleichungen (27). Somit haben wir den

Satz 16: Sind u, v rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene, x, y rechtwinklige Koordinaten in einer zweiten Ebene, so wird die allgemeinste punktweise Abbildung der einen Ebene auf die andere, bei der jeder Geraden der einen Ebene eine Gerade der anderen entspricht, durch zwei Gleichungen von der Form

$$x = \frac{a_1 + b_1 u + c_1 v}{\alpha + \beta u + \gamma v}, \qquad y = \frac{a_2 + b_2 u + c_2 v}{\alpha + \beta u + \gamma v}$$

gegeben, in denen a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, α, β, γ Konstanten sind und die beiden Nenner übereinstimmen.

Dies ist die allgemeinste projektive Abbildung einer Ebene auf eine andere Ebene.

§ 3. Orthogonale Trajektorien geodätischer Kurven.

Mit Hilfe der geodätischen Kurven lassen sich Parameter auf der Fläche definieren, mittels derer manche flächentheoretische Probleme besonders bequem behandelt werden können. Allerdings ist es, wie schon hervorgehoben wurde (vgl. S. 478), im allgemeinen unmöglich, die geodätischen Kurven auf einer gegebenen Fläche zu bestimmen, aber für viele Probleme genügt es zu wissen, daß sie überhaupt vorhanden sind.

Wir nehmen an, es sei auf einer gegebenen Fläche mit den Parametern u, v und dem Quadrate des Bogenelements

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

eine Schar von einfach unendlich vielen geodätischen Kurven durch eine Gleichung

$$\mu(u, v) = \text{konst.}$$

zwischen u und v definiert. Dieser Fall tritt bei manchen Flächen ein. So sind z. B. auf einer Rotationsfläche die Meridiane augenscheinlich geodätische Kurven; liegt eine geradlinige Fläche vor, so sind die Geraden der Fläche bekannte geodätische Kurven, usw. Die Schar $\mu =$ konst. soll übrigens wohlbemerkt nicht etwa eine Schar von Minimalgeraden sein.

Längs der Kurven $\mu =$ konst. mögen die Differentiale der Parameter u und v mit δu und δv bezeichnet sein. Dann ist

$$\mu_u\,\delta u + \mu_v\,\delta v = 0$$

oder:

(1) $$\frac{\delta v}{\delta u} = -\frac{\mu_u}{\mu_v}.$$

Die zu dieser Schar von geodätischen Kurven orthogonalen Trajektorien haben Fortschreitungsrichtungen $(dv : du)$, für die nach Satz 22, S. 50:

(2) $$(E\,\mu_v - F\,\mu_u)\,du + (F\,\mu_v - G\,\mu_u)\,dv = 0$$

ist. Dies also ist die Differentialgleichung erster Ordnung für die orthogonalen Trajektorien. Bedeutet $\lambda(u, v)$ ein Integral, so ist

$$\lambda(u, v) = \text{konst.}$$

die endliche Gleichung der orthogonalen Trajektorien. Da die Scharen $\lambda =$ konst. und $\mu =$ konst. nicht zusammenfallen, sind λ und μ voneinander unabhängige Funktionen von u und v und können daher als neue Parameter benutzt werden.

Jetzt wollen wir annehmen, in den Gleichungen

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v) \tag{3}$$

der Fläche seien u und v schon diese neuen Parameter, d. h. die Parameterlinien (v) seien geodätische Kurven, aber keine Minimalkurven, und die Parameterlinien (u) ihre orthogonalen Trajektorien. Nach Satz 15, S. 44, ist dann die Fundamentalgröße $F = 0$, also $E \neq 0$ und $G \neq 0$, da sonst $EG - F^2 = 0$ wäre. Nach Satz 7, S. 477, sind nun die Parameterlinien (v) nur dann geodätisch, wenn $E_v = 0$ ist. Somit folgt, daß E nur von u abhängt. Das Quadrat des Bogenelements hat demnach die Form:

$$ds^2 = E(u)\, du^2 + G(u, v)\, dv^2. \tag{4}$$

Es erhellt umgekehrt, daß, falls ds^2 diese Form hat, die Parameterlinien (v) geodätische Kurven, aber keine Minimalkurven, und die Parameterlinien (u) ihre orthogonalen Trajektorien sind.

Längs einer Kurve (v) ist $dv = 0$, also das Bogenelement $ds = \sqrt{E}\, du$, so daß ihre Bogenlänge von der Trajektorie $(u = 0)$ an bis zu einer beliebigen Trajektorie (u) den Wert hat:

$$s = \int_0^u \sqrt{E}\, du. \tag{5}$$

Da E von v frei ist, ergibt sich derselbe Wert auf jeder geodätischen Kurve (v), also:

Satz 17:[1] Zwei orthogonale Trajektorien einer Schar von ∞^1 geodätischen Kurven einer Fläche schneiden auf allen diesen geodätischen Kurven dieselbe Bogenlänge ab, vorausgesetzt, daß die geodätischen Kurven keine Minimalkurven sind.

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung des Satzes 37, I S. 62, über Parallelkurven in der Ebene, denn in der Ebene sind die Geraden die geodätischen Kurven. Man nennt daher die orthogonalen Trajektorien einer einfach unendlichen Schar von geodätischen Kurven eine Schar von Parallelkurven auf der Fläche.

Wir wollen jetzt noch einmal zu der vorhergehenden Betrachtung zurückgehen und die Frage, wie man die Differentialgleichung (2)

[1] Satz von Gauss, der überhaupt in seinen „Disquisitiones" (siehe die Anm. zu S. 6) eingehende Untersuchungen über die geodätischen Kurven auf einer Fläche angestellt hat, wie sie bis dahin von keiner Seite durchgeführt worden waren.

der orthogonalen Trajektorien $\lambda =$ konst. einer bekannten Schar von geodätischen Kurven $\mu =$ konst. integriert, näher erörtern. Der letzte Satz wird uns nämlich dabei helfen.

Angenommen, es sei $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ eine einfach unendliche Schar von gegebenen geodätischen Kurven. Ferner seien c und c' zwei unendlich benachbarte orthogonale Trajektorien dieser Schar. Siehe Fig. 96. Nach Satz 17 schneiden sie auf allen Kurven γ denselben unendlich kleinen Bogen δs ab.

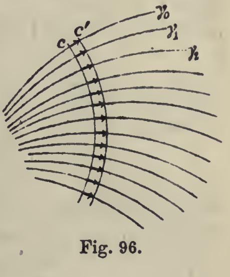


Fig. 96.

Aus einer orthogonalen Trajektorie c können wir daher leicht eine unendlich benachbarte c' ableiten: Wir konstruieren in allen Punkten von c die zu den Tangenten von c senkrechten Tangenten der Fläche, d. h. die Tangenten der Kurven γ, und tragen auf allen dieselbe unendlich kleine Strecke δs ab. Der Ort der Endpunkte ist die Kurve c'.

Dies wollen wir analytisch verfolgen: Im Punkte (u, v) der Kurve c hat die Tangente der Kurve γ die durch (1) bestimmte Fortschreitungsrichtung $(\delta v : \delta u)$, und es soll die Strecke δs auf dieser Tangente aufgetragen werden, d. h. es soll

$$E\delta u^2 + 2F\delta u\,\delta v + G\delta v^2 = \delta s^2$$

sein. Hieraus und aus (1) folgt:

$$\delta u = \frac{\mu_v\,\delta s}{\sqrt{E\mu_v^2 - 2F\mu_v\mu_u + G\mu_u^2}}, \qquad \delta v = \frac{-\mu_u\,\delta s}{\sqrt{E\mu_v^2 - 2F\mu_v\mu_u + G\mu_u^2}},$$

wo in beiden Formeln für die Wurzel derselbe Wert zu nehmen ist. Jede der Kurven $\lambda(u, v) =$ konst. muß also wieder in eine dieser Kurven übergehen, wenn u und v um die Differentiale δu und δv wachsen, d. h. es muß $\lambda_u \delta u + \lambda_v \delta v$, abgesehen von dem Faktor δs, eine Funktion Ω von λ allein sein, woraus folgt:

$$\frac{\lambda_u \mu_v - \lambda_v \mu_u}{\sqrt{E\mu_v^2 - 2F\mu_v\mu_u + G\mu_u^2}} = \Omega(\lambda).$$

Dabei ist $\Omega \neq 0$, weil ja jede Integralkurve $\lambda =$ konst. in eine andere übergeht. Nach I S. 131 ist nun jede Funktion von λ wieder ein Integral. Deshalb ist es leicht einzusehen, daß es ein Integral $\omega(\lambda)$ statt λ derart gibt, daß für dieses die rechte Seite der Gleichung gerade gleich Eins wird. Indem wir darauf aus-

gehen, dies Integral $\omega(\lambda)$ zu berechnen, dürfen wir es von jetzt an mit λ bezeichnen. Somit ist nunmehr:

$$\lambda_u \mu_v - \lambda_v \mu_u = \sqrt{E\mu_v^2 - 2F\mu_v\mu_u + G\mu_u^2}$$

Andererseits muß $d\lambda$ oder $\lambda_u du + \lambda_v dv$ infolge der Differentialgleichung (2) gleich Null sein. Dies gibt:

$$\lambda_u(F\mu_v - G\mu_u) - \lambda_v(E\mu_v - F\mu_u) = 0.$$

Jetzt liegen zwei in λ_u und λ_v lineare Gleichungen vor, deren Determinante

$$-E\mu_v^2 + 2F\mu_v\mu_u - G\mu_u^2 \neq 0$$

ist, denn sonst wäre $\mu =$ konst. eine Schar von Minimalgeraden. Somit ergibt sich, wenn man noch nach der Definition (11) auf S. 427 die abkürzende Bezeichnung

$$\Delta_{\mu\mu} = \frac{E\mu_v^2 - 2F\mu_v\mu_u + G\mu_u^2}{D^2}$$

verwendet, wo $D^2 = EG - F^2$ ist:

(6) $$\lambda_u = \frac{E\mu_v - F\mu_u}{D\sqrt{\Delta_{\mu\mu}}}, \qquad \lambda_v = \frac{F\mu_v - G\mu_u}{D\sqrt{\Delta_{\mu\mu}}};$$

Ferner ist es sicher, daß diese Werte λ_u und λ_v auch die Bedingung

$$\frac{\partial \lambda_u}{\partial v} = \frac{\partial \lambda_v}{\partial u}$$

erfüllen, d. h. daß

(7) $$d\lambda = \frac{(E\mu_v - F\mu_u)\,du + (F\mu_v - G\mu_u)\,dv}{\sqrt{E\mu_v^2 - 2F\mu_v\mu_u + G\mu_u^2}}$$

ein vollständiges Differential ist, so daß sich λ durch Quadraturen berechnen läßt.[1]

Man bemerkt nun, daß in der Formel (7) die Ableitungen μ_u und μ_v nur in ihrem Verhältnisse vorkommen. Wenn die einfach unendliche Schar von geodätischen Kurven $\mu(u, v) =$ konst., von der wir ausgingen, selbst gar nicht bekannt ist, sondern nur feststeht, daß eine Differentialgleichung erster Ordnung

(8) $$\alpha(u, v)\,du + \beta(u, v)\,dv = 0$$

[1] Wir haben hier λ nach einer von Lie herrührenden Methode ermittelt. Die allgemeine Auseinandersetzung derartiger Integrationsverfahren im Falle bekannter unendlich kleiner Transformationen von Integralkurven ineinander findet man in dem vom Verfasser bearbeiteten Werke von Lie: „Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen", Leipzig 1897, anastatischer Neudruck 1912.

mit bekannten Funktionen $\alpha(u,v)$ und $\beta(u,v)$ eine Schar von geodätischen Kurven $\mu(u,v) =$ konst. definiert, die keine Minimalkurven sind, kann man schon $\mu_u : \mu_v$ berechnen und daher das vollständige Differential (7) bilden. In der Tat muß ja

$$\mu_u\,du + \mu_v\,dv = 0$$

infolge von (8), also

$$\frac{\mu_u}{\mu_v} = \frac{\alpha}{\beta}$$

sein. Setzt man daher in (7) statt μ_u den Wert $\alpha\mu_v : \beta$ ein, so fällt auch μ_v heraus. So gelangt man zu dem

Satz 18: Wenn

$$\alpha(u,v)\,du + \beta(u,v)\,dv = 0$$

die Differentialgleichung einer einfach unendlichen Schar von geodätischen Kurven auf einer Fläche mit den Parametern u und v und den Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G ist, diese geodätischen Kurven aber keine Minimalkurven sind, stellt

$$d\lambda = \frac{(E\beta - F\alpha)\,du + (F\beta - G\alpha)\,dv}{\sqrt{E\beta^2 - 2F\beta\alpha + G\alpha^2}}$$

das vollständige Differential einer Funktion λ von u und v dar, und die Gleichung

$$\lambda(u,v) = \text{konst.}$$

ist die der orthogonalen Trajektorien jener Schar von geodätischen Kurven.

Beispiel: Auf einer geradlinigen Fläche sind die Geraden geodätische Kurven. Nach Satz 18 findet man also die orthogonalen Trajektorien der Geraden durch eine Quadratur. In der Tat haben wir sie so auf S. 273 bestimmt. Satz 106, S. 274, ist ein spezieller Fall unseres Satzes 17.

Aus (6) ergibt sich:

$$E\lambda_v^2 - 2F\lambda_v\lambda_u + G\lambda_u^2 = EG - F^2.$$

Mithin ist, wenn man das Zeichen $\triangle_{\lambda\lambda}$ benutzt, für das gefundene Integral $\lambda =$ konst. der Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien der einfach unendlich vielen geodätischen Kurven:

$$\triangle_{\lambda\lambda} = 1.$$

Nun aber ist jede Funktion $\omega(\lambda)$ von λ allein, die nicht bloß eine Konstante ist, ebenfalls ein Integral, und da augenscheinlich

$$\triangle_{\omega\omega} = \left(\frac{d\omega}{d\lambda}\right)^2 \triangle_{\lambda\lambda}$$

ist, ergibt sich:

$$\triangle_{\omega\omega} = \left(\frac{d\omega}{d\lambda}\right)^2.$$

Hier steht rechts eine Funktion von λ allein, die aber auch als Funktion von ω allein ausdrückbar ist. Für jedes Integral ω der Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien wird somit $\triangle_{\omega\omega}$ eine von Null verschiedene Funktion des Integrals selbst.

Bezeichnen wir von jetzt an wieder irgend eines der Integrale der Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien mit λ, so gilt also eine Formel von der Gestalt:

$$\triangle_{\lambda\lambda} = f(\lambda), \tag{9}$$

wo rechts eine von Null verschiedene Funktion von λ allein steht. Wir behaupten, daß dies eine für diese Integrale charakteristische Eigenschaft ist, d. h. daß nur für jene Integrale λ der Ausdruck $\triangle_{\lambda\lambda}$ eine von Null verschiedene Funktion von λ allein wird.

Zum Beweise verstehen wir also jetzt unter λ irgend eine Funktion von u und v, die einer Formel (9) genügt, in der rechts eine von Null verschiedene Funktion von λ allein steht.

Nach Satz 46, S. 461, ist es dann sicher, daß $\lambda =$ konst. keine Schar von Minimalkurven darstellt. Vielmehr hat die Kurvenschar $\lambda =$ konst. orthogonale Trajektorien, und wir wollen annehmen, daß $\mu(u, v) =$ konst. die Schar dieser Orthogonalkurven vorstelle. Alsdann ist nach Satz 47, S. 461:

$$\triangle_{\lambda\mu} = 0, \qquad \triangle_{\mu\mu} \neq 0.$$

Weil λ und μ voneinander unabhängige Funktionen sind, können

$$\bar{u} = \lambda(u, v), \qquad \bar{v} = \mu(u, v)$$

als neue Parameter benutzt werden. Nach Satz 45, S. 460, bekommt die Fläche dann die Fundamentalgrößen erster Ordnung:

$$\bar{E} = \frac{1}{f(\lambda)} = \frac{1}{f(\bar{u})}, \qquad \bar{F} = 0, \qquad \bar{G} = \frac{1}{\triangle_{\mu\mu}},$$

so daß das Quadrat des Bogenelements in der Form erscheint:

$$ds^2 = \frac{1}{f(\bar{u})} d\bar{u}^2 + \bar{G}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{v}^2. \tag{10}$$

Sie ordnet sich der früheren Form (4) unter und lehrt somit, daß die Kurven $(\bar{v})$ oder also die Kurven $\mu(u, v) =$ konst. in der Tat geodätische Kurven sind. Insbesondere ist $\bar{u}$ in (10) geradezu die von der Kurve $(\bar{u} = 0)$ bis zur Kurve $(\bar{u})$ gemessene Bogenlänge

aller Parameterlinien ($\bar{v}$), wenn $f(\bar{u}) = 1$, d. h. $\Delta_{\lambda\lambda} = 1$ ist, vgl. (5). Daher gilt der

Satz 19:[1] Eine Kurvenschar $\lambda(u, v) =$ konst. auf einer Fläche mit den Parametern u und v besteht dann und nur dann aus den orthogonalen Trajektorien einer einfach unendlichen Schar von geodätischen Kurven, die keine Minimalkurven sind, wenn der Differentialparameter $\Delta_{\lambda\lambda}$ eine von Null verschiedene Funktion von λ allein ist. Insbesondere stellt λ zugleich die Bogenlänge dieser geodätischen Kurven, gemessen von der Trajektorie ($\lambda = 0$) an, dar, wenn $\Delta_{\lambda\lambda}$ gerade den Wert Eins hat.

Ist $\Delta_{\lambda\lambda} = f(\lambda)$ nicht gleich Eins, so können wir in (10) weiterhin

$$u' = \int \frac{d\bar{u}}{\sqrt{f(\bar{u})}}$$

als Parameter statt $\bar{u}$ einführen, so daß ds^2 die einfachere Gestalt annimmt:

$$ds^2 = du'^2 + \omega(u', \bar{v})\, d\bar{v}^2 .$$

Jetzt stellt u' die Bogenlänge der geodätischen Parameterlinien dar.

Andererseits erkennt man: Wenn das Quadrat des Bogenelements die Form

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\, dv^2 \tag{11}$$

hat, bilden erstens die Parameterlinien wegen $F = 0$ ein Orthogonalsystem, ist zweitens wegen $E = 1$ der Parameter u die Bogenlänge der Parameterlinien (v), und sind drittens, — wie schon bei (4) betont wurde —, die Parameterlinien (v) geodätisch. Deshalb gilt der

Satz 20: Dann und nur dann, wenn die beiden Scharen von Parameterlinien auf einer Fläche ein Orthogonalsystem bilden und die eine Schar aus geodätischen Kurven besteht, gibt es zugehörige Parameter u und v derart, daß das Quadrat des Bogenelements die Form[2]

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\, dv^2$$

annimmt, also $E = 1$ und $F = 0$ wird. Alsdann ist u die Bogenlänge der geodätischen Parameterlinien (v), von der Parameterlinie ($u = 0$) an bis zur Parameterlinie (u) gerechnet.

[1] Siehe die auf S. 429 genannten Abhandlungen von Beltrami.

[2] Diese Form des Quadrates des Bogenelements hat Gauss in seinen „Disquisitiones“ eingeführt.

Siehe Fig. 97.

Man nennt solche Parameter u und v der Fläche, mittels derer das Quadrat des Bogenelements die charakteristische Form (11) bekommt, geodätische Parameter, obwohl im allgemeinen wohlbemerkt nur die Parameterlinien (v) und nicht auch die Parameterlinien (u) geodätische Kurven sind.

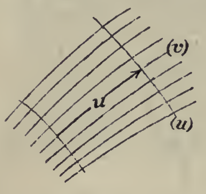


Fig. 97.

Bezüglich der Orientierung sei noch erwähnt: Wegen $E = 1$ und $F = 0$ wird $D^2 = G$. Wir machen $D = \sqrt{G}$ dadurch einwertig, daß wir von den beiden Werten dieser Quadratwurzel an einer bestimmten Stelle einen auswählen. Insbesondere können wir im reellen Falle, da G dann nach XI (A) positiv ist, D positiv annehmen. Die von einem Punkte (u, v) ausgehenden Kurven (v) und (u) haben nun in diesem Punkte zueinander senkrechte Tangenten. Nach (10) und (11) auf S. 34 und wegen $E = 1$ können wir als ihre Richtungskosinus einerseits

(12) $$x_u, \quad y_u, \quad z_u$$

und anderseits

(13) $$\frac{x_v}{\sqrt{G}}, \quad \frac{y_v}{\sqrt{G}}, \quad \frac{z_v}{\sqrt{G}}$$

festsetzen, wo $\sqrt{G}$ die vorhin einwertig gemachte Quadratwurzel bedeute. Alsdann liegen die orientierte Tangente der Kurve (v), die orientierte Tangente der Kurve (u), sowie die orientierte Flächennormale gerade so zueinander, wie die positive x-Achse, die positive y-Achse und die positive z-Achse. Denn, wenn wie immer X, Y, Z die Richtungskosinus der Flächennormale bezeichnen, ist jetzt die Determinante der Kosinus aller drei Richtungen, nämlich

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ \frac{x_v}{\sqrt{G}} & \frac{y_v}{\sqrt{G}} & \frac{z_v}{\sqrt{G}} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \mathbf{S}\, X(y_u z_v - z_u y_v)$$

nach XI (F) und wegen $D = \sqrt{G}$ gerade gleich $+1$.

Im reellen Falle, wo $\sqrt{G}$ positiv gewählt wird, bedeutet die Festsetzung der Kosinus (12) und (13), daß die Parameterlinien (v)

und (u) positiv im Sinne wachsender Werte des Parameters u bzw. v angenommen werden.

Wenn wir nun weiterhin geodätische Parameter u und v benutzen, setzen wir immer voraus, die Orientierung sei in der hier auseinandergesetzten Art erfolgt.

§ 4. Anwendungen von geodätischen Parametern.

Sind u und v geodätische Parameter einer Fläche, d. h. hat das Bogenelement-Quadrat die Form

$$(1) \qquad ds^2 = du^2 + G(u, v)\, dv^2,$$

so nimmt die Differentialgleichung aller geodätischen Kurven der Fläche wegen $E = 1$ und $F = 0$ nach Satz 4, S. 475, die Form an:

$$(2) \qquad G(u'v'' - v'u'') + (G_u u'^2 + \tfrac{1}{2} G_v u'v' + \tfrac{1}{2} G G_u v'^2) v' = 0.$$

Dabei sind u und v als Funktionen eines dritten Parameters t zu betrachten. Sieht man von den geodätischen Parameterlinien (v) ab, längs deren ja v konstant ist, so kann man v selbst als Parameter t benutzen. Dann wird $v' = 1$ und $v'' = 0$, während u' und u'' die Ableitungen erster und zweiter Ordnung von u nach v sind. Infolgedessen wird aus (2):

$$(3) \qquad \frac{d^2 u}{dv^2} = \frac{G_u}{G}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{G_v}{G}\frac{du}{dv} + \frac{1}{2} G_u.$$

Der Punkt (u, v) beschreibt demnach irgend eine geodätische Kurve auf der Fläche, abgesehen von den geodätischen Parameterlinien (v) selbst, sobald u eine Funktion von v ist, die dieser gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (3) genügt.

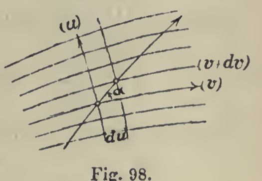


Fig. 98.

Man kann diese Differentialgleichung auf eine andere, sozusagen mehr geometrische Form bringen, wenn man statt der Funktion u von v den Winkel α einführt, unter dem die zu betrachtende beliebige geodätische Kurve die Parameterlinien (v) durchsetzt und der im allgemeinen ja ebenfalls veränderlich, d. h. eine Funktion von v sein wird (siehe Fig. 98). Eindeutig definiert wird dieser Winkel wie folgt: Nach S. 506 ist der Fortschreitungssinn auf den Parameterlinien (v) und (u) festgelegt, ebenso der der Flächennormale. In der Tangentenebene des Punktes (u, v) ist demnach auch ein positiver Drehsinn festgelegt, nämlich der Sinn der Drehung von der

orientierten Tangente der Parameterlinie (v) nach der orientierten Tangente der Parameterlinie (u). Wird die orientierte Tangente der Parameterlinie (v) in diesem Sinne so weit gedreht, bis sie in die Tangente der betrachteten durch den Punkt (u, v) gehenden geodätischen Linie übergeht, so soll sie die Orientierung dieser geodätischen Kurve angeben, und der von ihr zurückgelegte Winkel sei α. Im reellen Falle bedeutet dies, daß die zu betrachtende geodätische Kurve im Sinne wachsender Werte von v orientiert werde. Geht der Punkt (u, v) in dem festgesetzten Sinne längs der orientierten geodätischen Kurve in einen benachbarten Punkt $(u + dv, v + dv)$ über, so ist das Bogenelement auf der Parameterlinie (v) vom Punkte (u, v) bis zum Punkte $(u + du, v)$ gleich du und das auf der Parameterlinie (u) vom Punkte (u, v) bis zum Punkte $(u, v + dv)$ gleich $\sqrt{G}\,dv$, also

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{G}\,dv}{dv}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{du}{dv} = \sqrt{G}\operatorname{ctg}\alpha. \tag{4}$$

Längs der zu betrachtenden geodätischen Kurve ist u, wie gesagt, eine Funktion von v, die der Differentialgleichung (3) genügt. Demnach ist auch α als Funktion von v zu betrachten, und aus (4) folgt durch Differentiation, wobei immer u als Funktion von v aufgefaßt werden muß:

$$\frac{d^2 u}{dv^2} = \frac{G_u \frac{du}{dv} + G_v}{2\sqrt{G}} \operatorname{ctg}\alpha - \sqrt{G}\,\frac{\frac{d\alpha}{dv}}{\sin^2\alpha}$$

Wird hier der Wert (4) von $du : dv$ eingesetzt, so kommt:

$$\frac{d^2 u}{dv^2} = \frac{1}{2} G_u \operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{1}{2}\frac{G_v}{\sqrt{G}} \operatorname{ctg}\alpha - \frac{\sqrt{G}}{\sin^2\alpha}\frac{d\alpha}{dv} \tag{5}$$

Substitution der Werte (4) und (5) in (3) liefert nun

$$\frac{1}{2} G_u \operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{\sqrt{G}}{\sin^2\alpha}\frac{d\alpha}{dv} = G_u \operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{1}{2} G_u$$

oder einfacher:

$$\frac{d\alpha}{dv} = -\frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{G}} = -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}. \tag{6}$$

Dies ist also nur eine andere Form der Differentialgleichung (3). Sie besagt:

Satz 21: Ist eine Fläche auf geodätische Parameter u und v bezogen, so daß

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2$$

das Quadrat ihres Bogenelements ist, so beschreibt ein Flächenpunkt (u, v) irgend eine geodätische Kurve der Fläche — abgesehen von den Parameterlinien (v) und den Minimalkurven — dann und nur dann, wenn der im allgemeinen veränderliche Winkel α, unter dem die Bahnkurve die Parameterlinien (v) durchschneidet, der Bedingung

$$\frac{d\alpha}{dv} = -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$$

Genüge leistet.[1]

Man muß wohl beachten, daß in dieser Bedingung links totale und rechts partielle Differentiationszeichen stehen. Das Differential $d\alpha$ bedeutet eben

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}du + \frac{\partial\alpha}{d v}dv$$

und nicht bloß $\partial\alpha : \partial v$.

Das geodätische Parametersystem wollen wir nun noch weiter spezialisieren. Als Parameterlinien (v) wählen wir eine einfach unendliche Schar von geodätischen Kurven, die von einem und demselben irgendwo angenommenen Flächenpunkte A oder (u_0, v_0) ausgehen (siehe Fig. 99). Nach wie vor bedeuten die Kurven (u) ihre orthogonalen Trajektorien. Eine von ihnen, nämlich $(u = u_0)$, ist aber zum Punkte A selbst zusammengeschrumpft. Jede andere Parameterlinie (u) schneidet auf allen geodätischen Kurven (v) die Bogenlänge $u - u_0$ ab, gemessen von A aus. Jede Kurve (u) ist somit als eine Kurve konstanter geodätischer Entfernung vom Punkte A zu bezeichnen.

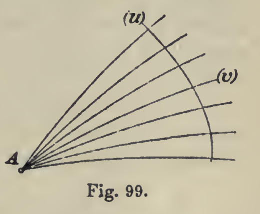


Fig. 99.

Allerdings ist ein Einwand zu machen: Der Begriff der geodätischen Entfernung vom Punkte A oder (u_0, v_0) bis zu irgend einem Punkte (u, v) ist nur dann wohldefiniert, wenn es nur eine geodätische Kurve gibt, die von dem einen nach dem anderen Punkte geht, indem sie dann eben die Bogenlänge dieser Kurve bedeutet.

[1] Satz von Gauss in seinen „Disquisitiones".

Es ist aber wohl möglich, daß es von einem Punkte nach einem anderen mehr als eine, ja sogar unendlich viele geodätische Kurven gibt, vgl. das 1. Beispiel auf S. 478. Man kann jedoch unter gewissen Voraussetzungen beweisen, daß es um den Punkt A herum einen Bereich der Fläche gibt, innerhalb dessen von A nach irgend einer Stelle stets nur eine geodätische Kurve geht.[1] Wir gehen auf diesen Umstand nicht näher ein und formulieren deshalb das Ergebnis so:

Satz 22: Hat man um einen Flächenpunkt A herum einen Bereich auf der Fläche derart abgegrenzt, daß innerhalb des Bereiches von A nach jeder Stelle nur eine geodätische Kurve geht, so sind die orthogonalen Trajektorien aller dieser einfach unendlich vielen von A auslaufenden geodätischen Kurven der Fläche die Kurven konstanter geodätischer Entfernung von A.

Die orthogonalen Trajektorien der von A ausgehenden geodätischen Kurven sind daher eine natürliche Verallgemeinerung des Begriffes der Kreise in der Ebene mit dem Mittelpunkte A und werden deshalb zuweilen auch als geodätische Kreise mit dem Mittelpunkte A bezeichnet. Dies wollen wir aber vermeiden, weil man nämlich noch eine andere natürliche Verallgemeinerung des Begriffes der Kreise beim Übergange von der Ebene zu einer Fläche herstellen kann, die denselben Anspruch auf diesen Namen hat und doch zu im allgemeinen wesentlich anderen Kurven führt, die uns auf S. 548, 549 begegnen werden.

Wenn wir weiterhin statt u die Differenz $u - u_0$ als Parameter einführen, behält das Quadrat des Bogenelements nach wie vor die charakteristische Form

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\, dv^2.$$

Dann gibt aber insbesondere $u = 0$ keine Parameterlinie, sondern nur den Punkt A, und allgemein ist jetzt u die geodätische Entfernung des Punktes (u, v) vom Punkte A. In diesem Falle[2] heißt das Parametersystem ein System von geodätischen Polarkoordinaten mit dem Pol A, da es eine natürliche Verallgemeinerung des Systems der Polarkoordinaten in der Ebene (vgl.

[1] In dem Beispiele des Rotationszylinders auf S. 478 kann man leicht einen derartigen Bereich durch zwei Mantellinien und zwei Kreise der Fläche abgrenzen.

[2] Zuerst von Gauss in seinen „Disquisitiones" benutzt, von dem auch die übrigen Ergebnisse dieses Paragraphen herrühren.

I S. 145) ist. Wie bei den ebenen Polarkoordinaten ist auch hier der Pol selbst in Hinsicht auf die Parameterdarstellung singulär. Denn zu diesem Punkte A gehört zwar nur der eine Wert Null des Parameters u, aber der Parameter v bleibt für ihn unbestimmt, weil alle Kurven (v) durch ihn hindurchgehen. Da die Kurve $(u = 0)$ zu einem Punkte zusammengeschrumpft ist, muß ihre Bogenlänge gleich Null sein, d. h. es ist jetzt

$$[G(u, v)]_{u=0} = 0. \tag{7}$$

Auf manchen Flächen bieten sich geodätische Polarkoordinaten naturgemäß dar, z. B. auf den Rotationsflächen. Denn wenn die Meridiankurven einer Rotationsfläche die Achse der Fläche in einem Punkte A treffen, sind die von ihm ausgehenden Meridiankurven die geodätischen Kurven (v) und die Parallelkreise die Kurven konstanter geodätischer Entfernung u von A.

Wenn die Meridiankurven einer Rotationsfläche die Achse nicht in reellen Punkten treffen, man aber doch eine reelle Parameterdarstellung benutzen will, wird man dagegen zu dem allgemeineren System von geodätischen Koordinaten zurückgreifen, also die Meridiankurven zwar wieder als Kurven (v) wählen, aber als orthogonale Trajektorie $(u = 0)$ irgend einen Parallelkreis der Fläche wählen, von dem aus also die Bogenlängen u gerechnet werden. Man sieht, daß wir auf S. 56 und später oft gerade dies Parametersystem für Rotationsflächen benutzt haben. Insbesondere ist auch der Satz 9, S. 481, nur ein besonderer Fall des Satzes 21 für beliebige Flächen, denn dort war $G = p^2(u)$, so daß Satz 21 gibt:

$$\frac{d\alpha}{dv} = -p',$$

mithin

$$\frac{d}{dv}(p \sin \alpha) = p' \sin \alpha \frac{du}{dv} - p p' \cos \alpha$$

oder

$$\frac{d}{dv}(p \sin \alpha) = p' \sin \alpha \left(\frac{du}{dv} - p \operatorname{ctg} \alpha\right)$$

wird, also (4) ergibt, daß $p \sin \alpha$ konstant sein muß, wie es Satz 9, S. 481, behauptet.

Auf beliebigen Flächen können wir geodätische Koordinaten einführen, sobald wir eine einfach unendliche Schar von geodätischen Kurven kennen, die keine Minimalkurven sind. Alsdann stellt sich das Krümmungsmaß K der Fläche, da $E = 1$, $F = 0$ wird, infolge von XVII (B) besonders einfach dar:

(8) $$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2};$$

in dieser Formel tritt das Wurzelzeichen übrigens nur scheinbar auf.

Ein Hauptvorteil der geodätischen Koordinaten ist der, daß das Quadrat des Bogenelements bei ihrer Anwendung nur eine Funktion $G(u, v)$ enthält, und diesen Vorteil teilt es mit dem Parametersystem der Minimalkurven, für das sich ja nach XVIII (A) ergibt:

$$ds^2 = 2F(u, v)\,du\,dv.$$

Das System der Minimalkurven hat den Nachteil, imaginär zu sein, dagegen gegenüber dem geodätischen Parametersystem den Vorteil, nur die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung, nämlich der Gleichung XI (O) zu verlangen, während die geodätischen Kurven nach Satz 8, S. 477, durch eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt werden und man kein Mittel hat, bei beliebigen Flächen eine Schar von einfach unendlich vielen geodätischen Kurven zu finden.

Man kann die geodätischen Koordinaten, insbesondere die Formel (8), benutzen, um die Sätze über die Verbiegung von Flächen konstanter Krümmung abzuleiten, die wir in § 6 des 3. Abschnittes unter Zugrundelegung der Minimalkurven als Parameterlinien ableiteten, und dies ist die Methode, die meistens benutzt wird. Wir wollen hierauf nicht näher eingehen und nur das Eine bemerken: Soll die Fläche konstante Krümmung K haben, so muß nach (8)

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = -K\sqrt{G},$$

also die zweite Ableitung von $\sqrt{G}$ nach u ein konstantes Vielfaches von $\sqrt{G}$ selbst sein. Wie wir in einigen Fällen (auf S. 482 und S. 494) auf die Betrachtung in I, S. 136 u. f., verweisen konnten, so auch hier. Es ergibt sich, daß $\sqrt{G}$ die Form hat:

$$\sqrt{G} = V_1(v)\cos\sqrt{K}u + V_2(v)\sin\sqrt{K}u,$$

wo V_1 und V_2 Funktionen von v allein sind. —

Im Falle geodätischer Polarkoordinaten kann man dem Parameter v noch eine besondere geometrische Deutung unterlegen. Zunächst nämlich betrachten wir die zu einem beliebigen Werte

von u gehörige orthogonale Trajektorie der von dem Pol A ausgehenden geodätischen Kurven (v). Siehe Fig. 100. Es sei P_0 ihr Schnittpunkt mit einer bestimmten geodätischen Kurve (v), etwa der Kurve $(v = 0)$, und P ihr Schnittpunkt mit einer beliebigen geodätischen Kurve (v). Ihr Bogen $P_0 P$ drückt sich nach (1), da längs der Kurve (u) der Parameter u konstant ist, so aus:

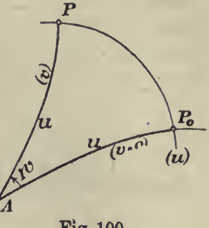


Fig. 100.

$$P_0 P = \int_0^v \sqrt{G}\, dv.$$

Das Verhältnis aus dem Bogen $P_0 P$ und dem geodätischen Abstande $A P_0 = A P = u$ ist also:

$$\frac{P_0 P}{u} = \frac{1}{u} \int_0^v \sqrt{G}\, dv.$$

Strebt u nach Null, so ist die Trajektorie (u) als unendlich kleiner Kreis in der Tangentenebene von A mit der Mitte A und dem Radius u aufzufassen; daher ist das soeben betrachtete Verhältnis dann gleich dem Winkel w, den die geodätische Kurve v mit der Kurve $(v = 0)$ an der Stelle A bildet:

$$w = \lim_{u=0} \frac{\int\limits_0^v \sqrt{G}\, dv}{u}.$$

Nach bekannter Regel bestimmt man den Grenzwert, indem man Zähler und Nenner nach u differenziert und dann u gleich Null setzt. Das Differenzieren und das Nullsetzen von u darf im Zähler unter dem Integralzeichen geschehen, so daß kommt:

$$(9) \qquad w = \int_0^v \left[\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right]_{u=0} dv.$$

Dies also ist der Winkel w, den die Kurve (v) im Punkte A mit der Kurve $(v = 0)$ bildet. Direkt konnte er deshalb nicht berechnet werden, weil der Punkt A im System der geodätischen Polarkoordinaten singulär ist.

Aus (9) wird sich für w eine Funktion von v allein ergeben. Umgekehrt kann man v als Funktion von w auffassen und also auch w statt v als Parameter benutzen.

Man kann also insbesondere bei den geodätischen Polarkoordinaten als Parameter v den Winkel nehmen, den die Parameterlinie (v) mit der Parameterlinie $(v = 0)$ im Pole A bildet. Auch dann hat das Quadrat des Bogenelements die charakteristische Form (1), aber wegen der besonderen Bedeutung von v ist jetzt nach (9):

$$\int_0^v \left[\frac{\partial \sqrt{G}}{d u}\right]_{u=0} d v = v,$$

woraus durch Differentiation nach v folgt:

$$\left[\frac{\partial \sqrt{G}}{d u}\right]_{u=0} = 1.$$

Diese Gleichung deckt sich mit der vorigen, so daß wir mit Rücksicht auf (1) und (7) den Satz aufstellen können:

Satz 23: Sind u, v zu einem System geodätischer Polarkoordinaten gehörige Parameter u, v, d. h. sind die Kurven (v) die von einem Punkte A ausgehenden geodätischen Kurven, die Kurven (u) ihre orthogonalen Trajektorien und ist u die von A an gemessene Bogenlänge der geodätischen Kurven (v) bis zu ihren Schnittpunkten mit der Trajektorie (u), so daß das Quadrat des Bogenelements die Form

$$d s^2 = d u^2 + G(u, v)\, d v^2$$

hat, wobei

$$\Big[G(u, v)\Big]_{u=0} = 0$$

ist, so bedeutet der Parameter v insbesondere den Winkel, den die Kurve (v) im Pol A mit der Kurve $(v = 0)$ bildet, wenn überdies die Bedingung

$$\left[\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right]_{u=0} = 1$$

erfüllt ist.

Diese besonderen geodätischen Polarkoordinaten u, v wollen wir nun benutzen, um einen bemerkenswerten Satz über die Totalkrümmung und die Winkelsumme eines von drei geodätischen Kurven begrenzten Dreiecks auf der Fläche abzuleiten, wobei wir uns auf reelle Flächen und reelle Dreiecke beschränken werden.

Unter der Totalkrümmung eines Stückes einer reellen Fläche versteht man den Flächeninhalt desjenigen Bereiches der Kugel, der dem Stücke bei der sphärischen Abbildung (siehe S. 255 u. f.)

entspricht. Zunächst ist hiernach die Totalkrümmung der unendlich kleinen Masche des Netzes der Parameterlinie, die von den Parameterlinien (u), $(u + du)$, (v) und $(v + dv)$ begrenzt wird, gleich $\varepsilon \mathfrak{D}\, du\, dv$, wenn die Bezeichnungen auf S. 264 u. f. beibehalten werden. Dabei ist $\varepsilon = +1$ oder -1, je nachdem die Stelle (u, v) der Fläche elliptisch oder hyperbolisch gekrümmt ist (nach S. 261). Nach Satz 100, S. 265, kann diese Totalkrümmung auch durch $K D\, du\, dv$ ausgedrückt werden. Mithin ist die Totalkrümmung T eines beliebig abgegrenzten Stückes einer reellen Fläche gleich dem Doppelintegral

(10) $$T = \iint K D\, du\, dv,$$

erstreckt über alle innerhalb des Gebietes gelegenen Punkte (u, v).

Nunmehr sei auf der Fläche ein Bereich vorhanden, innerhalb dessen zwischen je zwei Punkten nur eine geodätische Kurve verläuft. Sind A, B und C drei Punkte des Bereiches, so gibt es nur ein geodätisches Dreieck ABC, nämlich dasjenige, das von den drei geodätischen Kurven von A nach B, von B nach C und von C nach A gebildet wird. Nach der Voraussetzung haben die drei Kurvenbogen AB, BC, CA paarweise außer je einer der drei Ecken keinen Punkt gemein. Sie überschneiden sich also gegenseitig nicht. Das Innere des Dreiecks ABC definieren wir so: Durchwandert ein Punkt Q von B nach C die geodätische Kurve BC, siehe Fig. 101, so geht von A nach Q infolge der Voraussetzung stets nur ein geodätischer Kurvenbogen. Die von allen diesen Kurvenbogen AQ überdeckte Fläche soll das Innere des Dreiecks heißen. Dann sind auch die Innenwinkel des Dreiecks definiert; sie seien absolut gemessen gleich a, b und c.

Fig. 101.

Wir benutzen jetzt die geodätische Polarkoordinaten u, v mit dem Pol A und können voraussetzen, daß die Parameterlinie $(v = 0)$ die Kurve AB und die Parameterlinie $(v = a)$ die Kurve AC sei und daß allgemein v den Winkel bezeichne, den die Parameterlinie (v) mit der Parameterlinie $(v = 0)$ in A bildet. Die geodätische Kurve von B nach C bilde in irgend einem ihrer Punkte Q oder (u, v) mit der hindurchgehenden Parameterlinie (v) den Winkel α, gemessen in dem früher festgesetzten Sinne. Dabei ist nach der Bedeutung der geodätischen Parameter der Bogen AQ der Parameterlinie (v) gleich u.

Nach (10) ist die **Totalkrümmung** des geodätischen Dreiecks ABC

$$T = \int_0^a \left(\int_0^u K D \, du \right) dv .$$

Nach (8) ergibt sich aber, weil überdies $D = \sqrt{G}$ ist:

$$\int_0^u K D \, du = - \int_0^u \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} du = - \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \left[\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right]_{u=0},$$

also nach Satz 23:

$$\int_0^u K D \, du = 1 - \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u},$$

so daß kommt:

$$T = \int_0^a \left(1 - \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) dv = a - \int_0^a \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} dv .$$

Hierfür kann man nach Satz 21 schreiben:

$$T = a + \int_0^a \frac{d\alpha}{dv} dv = a + [\alpha]_{v=a} - [\alpha]_{v=0} .$$

Für $v = 0$ aber, d. h. wenn Q in B liegt, ist $\alpha = \pi - b$, und für $v = a$, d. h. wenn Q in C liegt, ist $\alpha = c$, siehe wieder Fig. 101. Somit kommt:

$$T = a + c - (\pi - b)$$

oder geordnet:

$$T = a + b + c - \pi .$$

Hier ist $a + b + c$ die Winkelsumme des geodätischen Dreiecks ABC. Der Überschuß der Winkelsumme über π heißt wie in der sphärischen Trigonometrie der **Exzeß des Dreiecks**. Demnach gilt der

Satz 24: In einem solchen Bereiche einer reellen Fläche, in dem es zwischen je zwei Punkten eine und nur eine geodätische Kurve gibt, ist die Totalkrümmung eines geodätischen Dreiecks gleich dem Exzeß des Dreiecks.

Man muß wohl beachten, daß der Exzeß auch negativ ausfallen kann, denn nach S. 264 und S. 261 ist der Flächeninhalt des sphärischen Bildes eines Elementes der Fläche negativ, falls das Element an einer hyperbolisch gekrümmten Stelle der Fläche gelegen ist. Auf einer überall hyperbolisch gekrümmten Fläche, z. B. auf einer nicht-abwickelbaren geradlinigen reellen Fläche mit reellen Erzeugenden (vgl. S. 278) oder auf einer reellen Minimalfläche (vgl.

S. 308), ist demnach der Exzeß negativ, d. h. die Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks von der in Satz 24 angegebenen Art kleiner als zwei Rechte. Auf dem einschaligen Rotationshyperboloid kann man derartige Dreiecke z. B. aus zwei einander schneidenden Erzeugenden und dem Kehlkreise bilden.

Liegt eine abwickelbare Fläche vor, so ist das Krümmungsmaß K überall gleich Null und daher die Totalkrümmung eines jeden Flächenstückes nach (10) ebenfalls gleich Null, was damit im Einklange steht, daß die sphärische Abbildung eines Stückes der Fläche gar nicht zu einem Flächenstücke, sondern nur zu einem Kurvenstücke auf der Kugel führt (siehe S. 266). Hier wird daher der Exzeß des geodätischen Dreiecks gleich Null. In der Tat geht ja auch jedes derartige Dreieck bei der Abwickelung der Fläche auf die Ebene in ein geradlinig begrenztes Dreieck über (nach S. 472), dessen Winkelsumme zwei Rechte beträgt.

Von besonderer Bedeutung ist der Satz 24 für die Flächen konstanter Krümmung $K \neq 0$. Nach der allgemeinen Formel (10) ist hier die Totalkrümmung

$$T = \iint K D\,du\,dv = K \iint D\,du\,dv,$$

also nach (2), S. 45, gleich dem K-fachen Inhalte des betrachteten Flächenstückes J selbst. Daraus folgt nach Satz 24:

Satz 25: In einem Bereiche einer reellen Fläche konstanter und von Null verschiedener Krümmung K, in dem es zwischen je zwei Punkten eine und nur eine geodätische Kurve gibt, ist der Flächeninhalt J eines geodätischen Dreiecks gleich dem mit K dividierten Exzeß des Dreiecks, also:

$$J = \frac{a + b + c - \pi}{K},$$

wenn $a + b + c$ die Winkelsumme des Dreiecks bedeutet.

Hierbei sei daran erinnert, daß der Flächeninhalt J als Doppelintegral über $D\,du\,dv$ im reellen Falle wegen $D > 0$ (vgl. S. 18) positiv hervorgeht, wenn das Doppelintegral, wie wir es getan haben, im Sinne wachsender Werte von u und v ausgewertet wird, vgl. S. 45. Ist also die konstante Krümmung K positiv, so gilt dasselbe nach der Formel des Satzes vom Exzeß des geodätischen Dreiecks, während die geodätischen Dreiecke auf Flächen konstanter negativer Krümmung negativen Exzeß haben. Auf den Flächen konstanter positiver Krümmung ist demnach die Winkel-

summe der geodätischen Dreiecke größer und auf den Flächen konstanter negativer Krümmung kleiner als zwei Rechte.

Wir erinnern jetzt an Satz 12, S. 485, und an Satz 15, S. 495; wir sahen, daß von allen reellen Flächen nur die Flächen konstanter Krümmung geodätisch auf die Ebene abgebildet werden können, d. h. daß nur auf ihnen Parameter u, v vorhanden sind, in denen sich die geodätischen Kurven durch die allgemeine lineare Gleichung ausdrücken lassen. Die gewöhnliche analytische Geometrie der Ebene gründet sich nun darauf, daß einerseits die Geraden durch lineare Gleichungen zwischen den Koordinaten x, y dargestellt werden, andererseits darauf, daß die Summe der Winkel eines geradlinigen Dreiecks zwei Rechte beträgt. Wie man sieht, gilt das Eine auch für die geodätischen Kurven auf den reellen Flächen konstanter Krümmung, das Andere jedoch nicht. Alle diejenigen Sätze aus der Geometrie der Geraden in der Ebene also, die nur darauf beruhen, daß die Geraden durch lineare Gleichungen dargestellt werden, haben ihr Analogon auf den reellen Flächen konstanter Krümmung, indem die geodätischen Kurven an die Stelle der Geraden treten, nicht aber diejenigen Sätze, die auf jener Annahme über die Winkelsumme des Dreiecks beruhen.

Es läßt sich also auf jeder reellen Fläche konstanter Krümmung eine Geometrie der geodätischen Kurven analog unserer gewöhnlichen ebenen analytischen Geometrie der Geraden entwickeln, in der jedoch die Voraussetzung, daß jedes Dreieck die Winkelsumme π habe, nicht gilt.[1] Man nennt eine solche Geometrie nicht-euklidisch. Daß solche Geometrien auf den Flächen konstanter Krümmung entwickelt werden können, steht damit im Einklange, daß sich auch in der Ebene nicht beweisen läßt, daß die Summe der Winkel eines geradlinigen Dreiecks zwei Rechte beträgt.

§ 5. **Zentraflächen.**

Während wir in der Theorie der ebenen Kurven im ersten Bande schon frühzeitig, in § 10 des ersten Abschnittes, den Ort der Krümmungsmittelpunkte, die Evolute, besprachen, haben wir in der Flächentheorie bisher die Betrachtung der geometrischen Örter, die

---

[1] Siehe Beltrami, „Saggio d'interpretazione della geometria non-euclidea", Giornale di Mat. 6. Bd. (1868).

von den Hauptkrümmungs-Mittelpunkten einer gegebenen Fläche erfüllt werden, absichtlich unterlassen und zwar deshalb, weil hierbei die geodätischen Kurven eine Rolle spielen. Daher können wir erst jetzt dazu übergehen.

Wir betrachten eine Fläche

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

die in ihren Punkten von allgemeiner Lage Hauptkrümmungskreise hat, also keine Schar von Minimalgeraden enthält, vgl. Satz 14, S. 135, d. h. deren Punkte allgemeiner Lage gewöhnliche Punkte sind (vgl. S. 159). Jeder allgemeine Punkt P oder (u, v) der Fläche hat zwei auf seiner Normale gelegene Hauptkrümmungs-Mittelpunkte, die wir wie in § 10 des zweiten Abschnittes mit C_1 und C_2 bezeichnen wollen. Der Ort der Hauptkrümmungs-Mittelpunkte heißt die Zentrafläche oder Evolutenfläche der gegebenen Fläche (1), vorausgesetzt, daß der Ort vorhanden ist und nicht bloß aus Kurven oder Punkten besteht.[1]

Vor allem ist hier zu beachten, daß die Zentrafläche zwei Mäntel hat, denn wenn wir die beiden Hauptkrümmungs-Mittelpunkte eines Flächenpunktes P als ersten und zweiten, C_1 und C_2, bezeichnen, ist damit für alle Punkte der Fläche in der Umgebung von P die Unterscheidung von ersten und zweiten Hauptkrümmungs-Mittelpunkten festgelegt. In der Tat: Die Hauptkrümmungs-Richtungen der Flächenpunkte sind ja die Tangenten der beiden Scharen von Krümmungskurven, deren Differentialgleichung XII (U) als quadratische homogene Gleichung in du und dv zerlegbar ist in zwei in du und dv lineare homogene Gleichungen. Die zu C_1 gehörige Hauptkrümmungs-Richtung $(dv : du)$ des betrachteten bestimmt gewählten Punktes P, die Richtung also, in der die Ebene des Hauptkrümmungskreises mit der Mitte C_1 die Tangentenebene von P schneidet, genügt nur einer von diesen beiden linearen Gleichungen. Folglich hat man alle dieser einen Gleichung genügenden Richtungen $(dv : du)$ für beliebig gewählte Flächenpunkte (u, v) als die ersten Hauptkrümmungs-Richtungen zu bezeichnen und die zugehörigen Hauptkrümmungs-Mittelpunkte entsprechend als die ersten. Diese bilden den ersten Mantel der Zentrafläche, die anderen den zweiten Mantel.

Da die Fläche (1) eine zweifach unendliche Schar von Punkten hat und jedem dieser Punkte zwei Hauptkrümmungs-Mittelpunkte C_1

[1] Die Zentrafläche wurde von Monge in seiner „Application“, siehe die Anm. zu S. 126, zuerst untersucht.

und C_2 zukommen, darf man zunächst vermuten, daß alle diese Punkte C_1 und C_2 in der Tat Flächen erfüllen, und es wird sich weiter unten zeigen, daß diese Vermutung im allgemeinen richtig ist. Aber es gibt Flächen, deren Hauptkrümmungs-Mittelpunkte nur Kurven erfüllen oder gar nur bestimmte Stellen sind. Hierzu zwei Beispiele:

1. Beispiel: Bei einer Rotationsfläche fallen die Hauptkrümmungs-Mittelpunkte der einen Schar nach Satz 17, S. 139, in die Achse der Fläche. Während also der eine Mantel der Zentrafläche hier in eine Gerade ausartet, ist der andere nach demselben Satze die Rotationsfläche, die entsteht, wenn man die Evolute eines Meridians um die Achse dreht.

2. Beispiel: Die Rotationsflächen sind nur ein besonderer Fall der Röhrenflächen, vgl. das 2. Beispiel S. 219 u. f. Hier ist der eine Mantel der Zentrafläche in die Kurve c der Mittelpunkte der Kreise der Fläche ausgeartet, siehe Fig. 79, S. 220.

Zunächst wollen wir annehmen, die Fläche (1) sei so beschaffen, daß ihre Hauptkrümmungs-Mittelpunkte C_1 und C_2 in der Tat zwei Flächen erfüllen. Wenn in den folgenden Sätzen von Mänteln der Zentrafläche die Rede ist, soll darin immer stillschweigend die Voraussetzung liegen, daß dies wirklich der Fall sei.

Nach Satz 67, S. 214, schneidet die Normale des Punktes P der Fläche (1) eine unendlich benachbarte Normale nur dann, wenn der Fußpunkt dieser zweiten Normale auf einer der beiden Hauptkrümmungstangenten von P liegt, und zwar ist der Schnittpunkt alsdann der zugehörige Hauptkrümmungs-Mittelpunkt. Die Normalen längs einer Krümmungslinie der Fläche (1) bilden eben nach S. 214 eine abwickelbare Fläche, und die Gratlinie dieser abwickelbaren Fläche ist der Ort der zugehörigen Hauptkrümmungszentren. Also sehen wir:

Satz 26: Der eine Mantel der Zentrafläche einer Fläche wird von den Gratlinien derjenigen abwickelbaren Flächen gebildet, die von den Flächennormalen längs einer jeden Krümmungskurve der einen Schar der gegebenen Fläche erzeugt werden, der andere Mantel von den Gratlinien der zur zweiten Schar von Krümmungskurven gehörigen abwickelbaren Flächen von Flächennormalen.

Da die erwähnten Gratlinien von den betreffenden Normalen der Fläche (1) berührt werden, können wir auch sagen:

Satz 27: Die beiden Mäntel der Zentrafläche einer gegebenen Fläche werden von allen Normalen dieser Fläche

berührt, und zwar berührt die Normale des Punktes P die beiden Mäntel in den beiden zu P gehörigen Hauptkrümmungs-Mittelpunkten.

Diese Sätze sollen durch die Fig. 102 erläutert werden, in der die gegebene Fläche (1) mit einem Netze von Krümmungskurven überzogen ist und zu zweien dieser Krümmungskurven, k_1 und k_2, die abwickelbaren Flächen der Flächennormalen sowie die zugehörigen Gratlinien γ_1, γ_2 angegeben sind. Die beiden Mäntel der Zentrafläche sind schematisch angedeutet.[1]

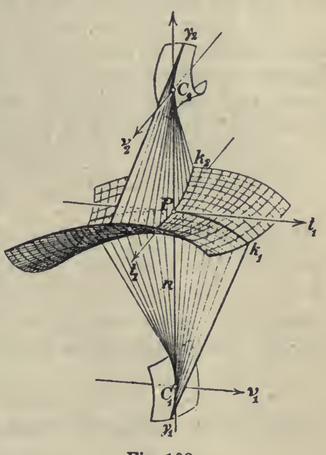


Fig. 102.

Da das Produkt der beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 eines Punktes P der Fläche (1) gleich dem reziproken Werte des Krümmungsmaßes K ist, liegen die zugehörigen Mittelpunkte C_1 und C_2 im reellen Falle auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten von P, je nachdem P ein elliptischer oder hyperbolischer Flächenpunkt ist. In Fig. 102 ist P hyperbolisch.

Wir wollen mit x_1, y_1, z_1 die rechtwinkligen Koordinaten des zu P gehörigen Hauptkrümmungszentrums C_1, mit x_2, y_2, z_2 die des Punktes C_2 bezeichnen. Alsdann ist, wenn X, Y, Z die Richtungskosinus der Normale von P bedeuten:

$$(2) \qquad x_1 = x + R_1 X, \quad y_1 = y + R_1 Y, \quad z_1 = z + R_1 Z$$

und

$$(3) \qquad x_2 = x + R_2 X, \quad y_2 = y + R_2 Y, \quad z_2 = z + R_2 Z.$$

Da x, y, z, R_1, R_2 und X, Y, Z Funktionen von u und v sind, liegen hierin Darstellungen der beiden Mäntel der Zentrafläche mittels der beiden Parameter u und v vor. Zu jedem Wertepaare (u, v) gehört ein Punkt P der Fläche (1), ein Punkt C_1 des ersten Mantels (2) und ein Punkt C_2 des zweiten Mantels (3) der Zentrafläche.

[1] Bei Schilling in Leipzig sind Modelle der Zentraflächen des Ellipsoids und des einschaligen Hyperboloids erschienen, hergestellt von Schwarz und v. Dyck.

Es wird sich offenbar empfehlen, als Parameterlinien (u) und (v) auf der Fläche (1) die Krümmungskurven zu wählen. Es seien alsdann die Kurven (v) die Krümmungskurven der ersten Art, die Kurven (u) die der zweiten Art, so daß also die Punkte C_1 die Schnittpunkte unendlich benachbarter Normalen längs der Kurven (v) sein sollen. Auch gelten dann die Formeln der Tafel XIX.

Wir wollen die auf die beiden Mäntel der Zentrafläche bezüglichen Elemente berechnen; es seien E_1, F_1, G_1, L_1, M_1, N_1 die Fundamentalgrößen des ersten Mantels und X_1, Y_1, Z_1 die Richtungskosinus seiner Normale. Beim zweiten Mantel wenden wir den Index 2 an. Zunächst folgt aus (2):

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = x_u + R_1 X_u + X\frac{\partial R_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = x_v + R_1 X_v + X\frac{\partial R_1}{\partial v}$$

oder nach XIX (F):

$$(4) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = X\frac{\partial R_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = X\frac{\partial R_1}{\partial v} + \frac{R_2 - R_1}{R_2} x_v.$$

Hierin darf x mit y oder z und zugleich X mit Y oder Z vertauscht werden. Daraus folgt nach XI (F):

$$X_1 : Y_1 : Z_1 = (Y z_v - Z y_v) : (Z x_v - X z_v) : (X y_v - Y x_v)$$

oder also nach XI (K) und wegen $F = 0$, nach XIX (A):

$$(5) \qquad X_1 : Y_1 : Z_1 = x_u : y_u : z_u.$$

Ganz entsprechend ergibt sich:

$$(6) \qquad X_2 : Y_2 : Z_2 = x_v : y_v : z_v.$$

Diese Formeln haben eine einfache geometrische Bedeutung: Die beiden durch den Punkt P oder (u, v) der gegebenen Fläche (1) gehenden Krümmungskurven (v) und (u) seien mit k_1 und k_2 bezeichnet. Die Normale n von P (siehe Fig. 102 auf S. 521) enthält die Punkte C_1 und C_2 der beiden Mäntel der Zentrafläche und berührt in ihnen die beiden Mäntel. Die Normalen der gegebenen Fläche längs k_1 umhüllen eine Kurve γ_1 auf dem ersten Mantel, die Normalen längs k_2 eine Kurve γ_2 auf dem zweiten Mantel. Die Kurve γ_1 als Gratlinie hat diejenige Ebene zur Schmiegungsebene, die die Normale n und die Tangente t_1 von k_1 in P enthält, d. h. die Ebene des ersten Hauptkrümmungskreises von P. Ebenso hat γ_2 in C_2 die Ebene durch die Normale n und durch die Tangente t_2 von k_2 zur Schmiegungsebene. Nun sagt (5) aus, daß diejenige Normale ν_1 des ersten Mantels der Zentrafläche, die von C_1 ausgeht,

zur Tangente t_1 parallel ist, und aus (6) folgt, daß diejenige Normale ν_2 des zweiten Mantels, die von C_2 ausgeht, zur Tangente t_2 parallel ist. Also besteht der

Satz 28: Sind C_1 und C_2 die zu einem Flächenpunkte P gehörigen Punkte der beiden Mäntel der Zentralfläche, so ist die Normale der Zentralfläche in C_1 bzw. C_2 zu der zugehörigen Hauptkrümmungstangente von P parallel.

Aber noch mehr, wir sehen, daß die Normale ν_1 in der Schmiegungsebene von γ_1 liegt, also die Hauptnormale von γ_1 ist. Die Kurve γ_1 ist folglich nach S. 472 eine geodätische Kurve des ersten Mantels. Ebenso ist die Normale ν_2 des zweiten Mantels eine Hauptnormale der Kurve γ_2, die daher eine geodätische Kurve des zweiten Mantels ist. Also gilt

Satz 29: Diejenigen Kurven, die von den Normalen einer Fläche längs je einer Krümmungskurve umhüllt werden, sind geodätische Kurven auf dem einen bzw. andern Mantel der Zentralfläche.

Nach Satz 28 berührt, wie noch ausdrücklich erwähnt sein möge, jede der beiden Hauptkrümmungs-Ebenen eines Flächenpunktes P denjenigen Mantel der Zentralfläche, der ihr nicht zugehört, in demjenigen Hauptkrümmungs-Mittelpunkte, der ihr ebenfalls nicht zugehört.

Ehe wir die allgemeine Theorie der Zentraflächen weiter verfolgen, wird es an der Zeit sein, die Frage zu erörtern, unter welchen Umständen die Hauptkrümmungs-Mittelpunkte C_1 oder C_2 keine Fläche erfüllen, sondern höchstens eine Kurve, wann also ein Mantel der Zentrafläche ausartet.

Durch (2) ist der Ort der Punkte C_1 oder (x_1, y_1, z_1) mittels der beiden Parameter u und v dargestellt. Dieser Ort ist nach S. 6 nur dann keine Fläche, wenn alle drei zweireihigen Determinanten

$$\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v} - \frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v} - \frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}$$

gleich Null werden. Nach (4) aber sind sie gleich den mit

$$\frac{R_2 - R_1}{R_2} \cdot \frac{\partial R_1}{\partial u}$$

multiplizierten drei Determinanten

$$Yz_v - Zy_v, \quad Zx_v - Xz_v, \quad Xy_v - Yx_v,$$

die nicht alle drei gleich Null sein können, weil sonst X, Y, Z zu x_v, y_v, z_v proportional wären. Nach Satz 16, S. 136, ist ferner $R_2 - R_1 \neq 0$. Wenn die Fläche nicht-abwickelbar ist, verschwindet auch $1 : R_2$ nicht, nach Satz 38, S. 448. Also ist der Ort der Punkte C_1 nur dann keine Fläche, wenn

$$\frac{\partial R_1}{\partial u} = 0$$

ist, mithin R_1 von v allein abhängt. Alsdann lehrt die erste Formel (4), daß auch x_1, y_1, z_1 nur von v abhängen.

Ehe wir diesen Fall geometrisch kennzeichnen, schicken wir die Bemerkung voraus, daß aus der zweiten Formel (4) stets, auch wenn R_1 nicht nur von v abhängt, hervorgeht:

$$\mathsf{S}\, X \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\partial R_1}{\partial v} + \frac{R_2 - R_1}{R_2} \mathsf{S}\, X x_v$$

oder, weil $\mathsf{S}\, X x_v$ nach XI (I) verschwindet:

$$\mathsf{S}\, X \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\partial R_1}{\partial v}.$$

Nach (2) ist weiterhin:

$$X = \frac{x_1 - x}{R_1}, \quad Y = \frac{y_1 - y}{R_1}, \quad Z = \frac{z_1 - z}{R_1}.$$

Mithin läßt sich die letzte Gleichung auch so schreiben:

(7) $$\mathsf{S} \frac{\partial x_1}{\partial v}(x_1 - x) = R_1 \frac{\partial R_1}{\partial v}.$$

Wenn nun R_1 nur von v abhängt, gilt, wie wir sahen, dasselbe von x_1, y_1, z_1. Wir fassen dann eine einzelne Krümmungskurve der ersten Schar der gegebenen Fläche (1) ins Auge, also eine Parameterlinie (v). Längs ihrer ist v konstant, so daß für alle ihre Punkte P oder (x, y, z) im vorliegenden Falle R_1, x_1, y_1, z_1 ebenfalls konstant sind, d. h. zu allen ihren Punkten P gehört ein und derselbe Hauptkrümmungs-Mittelpunkt C_1, und er hat von allen ihren Punkten P dieselbe Entfernung R_1. Somit ist die Parameterlinie (v) auf der Kugel um C_1 mit dem Radius R_1 gelegen, also sphärisch. Aber noch mehr: Da x_1, y_1, z_1 und R_1 im gegenwärtigen Falle nur von v abhängen, lehrt (7), daß die Koordinaten x, y, z der Punkte P einer einzelnen Parameterlinie (v) eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten befriedigen. Deshalb ist die Kurve (v) der Schnitt einer Ebene mit jener Kugel. Da eine Ebene mit einer Kugel, falls die Ebene die Kugel berührt, keinen Kreis, sondern ein Paar von Minimalgeraden gemein hat (vgl. Satz 32, S. 78), sei hervor-

gehoben, daß die Kurven (v) nach Satz 69, S. 215, als Krümmungskurven gewiß keine Minimalgeraden sind. Sie müssen also Kreise sein. Da ferner der Mittelpunkt C_1 der zur Kurve (v) gehörigen Kugel auf den Flächennormalen aller Punkte P der Kurve (v) liegt, wird die Fläche (1) längs der Kurve (v) von der Kugel berührt.

Nun können x_1, y_1, z_1, die ja von u unabhängig sind, nicht auch von v unabhängig, also nicht bloß konstant sein, denn sonst wäre nach (7) auch R_1 konstant, und es ergäbe sich, daß alle Parameterlinien (v) auf einer und derselben Kugel lägen, die Fläche (1) somit diese Kugel selbst wäre, was damit im Widerspruche steht, daß die Fläche (1) gewöhnliche Punkte haben soll. Mithin ist der Ort der Punkte C_1 eine Kurve, und diese Kurve ist als die Ausartung des ersten Mantels der Zentrafläche zu betrachten. Jeder Punkt C_1 dieser Kurve ist Mittelpunkt einer Kugel, die die Fläche (1) längs eines nicht in Minimalgeraden zerfallenden Kreises berührt. Deshalb liegt eine einfach unendliche Schar von Kugeln vor, und die Fläche (1) heißt die Einhüllende der Kugelschar.

Schon in § 17 des zweiten Abschnittes betrachteten wir die Einhüllenden gewisser einfach unendlicher Kugelscharen. Aber wir beschränkten uns damals auf Kugelscharen von besonderer Art, nämlich auf solche, in denen jede Kugel eine unendlich benachbarte berührte (vgl. z. B. S. 287). Damals zeigte sich (S. 288—293), daß die Kugelscharen als Einhüllende entweder Flächen von Minimalgeraden hatten oder gar keine einhüllenden Flächen zuließen. Diese Fälle kommen hier nicht in Betracht. Ebensowenig Kugelscharen, bei denen alle Mittelpunkte zusammenfallen.

Wir nehmen jetzt umgekehrt an, es liege eine Fläche (1) vor, deren Krümmungskurven (v) der einen Schar lauter Kreise sind. Nach Satz 73, S. 218, hat die Fläche alsdann längs jedes Kreises (v) eine konstante Neigung zur Ebene des Kreises, d. h. die Flächennormalen längs des Kreises (v) treffen sich in einem Punkte C_1. Demnach ist C_1 der eine Hauptkrümmungs-Mittelpunkt für alle Punkte P des Kreises (v). Folglich gibt es nur eine einfach unendliche Schar von Hauptkrümmungs-Mittelpunkten der einen Art, d. h. diese Punkte erfüllen keine Fläche, sondern nur eine Kurve. Somit kommen wir zu unserem früheren Ergebnisse zurück. Demnach gilt der

Satz 30: Bei einer nicht-abwickelbaren Fläche, die keine Schar von Minimalgeraden hat, ist der Ort der Hauptkrümmungs-Mittelpunkte der einen Art dann und nur dann

keine Fläche, sondern nur eine Kurve, wenn alle Krümmungskurven der einen Schar Kreise sind. Die Fläche ist alsdann die Einhüllende einer einfach unendlichen Schar von Kugeln, deren Mittelpunkte jene Kurve erfüllen und die so beschaffen sind, daß nicht jede Kugel der Schar eine unendlich benachbarte Kugel der Schar berührt.

Man kann nun wie in § 17 des 2. Abschnittes auch von einer einfach unendlichen Kugelschar von der soeben bezeichneten Art ausgehen und rückwärts ihre einhüllende Fläche konstruieren. Dies überlassen wir dem Leser. Man nennt die hier betrachteten Flächen als Einhüllende von Kugelscharen Kanalflächen[1], siehe Fig. 103. Zu ihnen gehören insbesondere die Röhrenflächen (siehe S. 220); sie gehen hervor, wenn alle Kugeln denselben Radius haben. Auch gehören hierher die Rotationsflächen. Liegt nämlich eine Rotationsfläche vor und errichtet man in einem ihrer Punkte P die Flächennormale, die ihre Achse in C_1 treffen möge, so wird die Kugel mit dem Mittelpunkte C_1 und Radius $C_1 P$ die Fläche längs eines Breitenkreises, der ja eine Krümmungskurve ist (vgl. S. 219), berühren. Daher ist die Rotationsfläche die Einhüllende einer Kugelschar, bei der alle Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, die keine Minimalgerade ist.

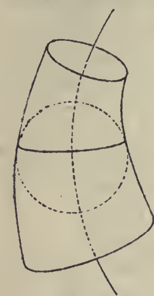


Fig. 103.

Übrigens ist auch der Fall denkbar, wo beide Mäntel der Zentrafläche in Kurven ausarten. Dies tritt nach Satz 30 ein, wenn alle Krümmungskurven der Fläche Kreise sind. Es fragt sich nur, ob es überhaupt derartige Flächen gibt. Wir werden die Frage im nächsten Paragraphen (S. 537) bejahen.

Nachdem wir die Frage erledigt haben, in welchem Falle ein Mantel der Zentrafläche ausartet, kehren wir zur allgemeinen Betrachtung zurück. Wir nehmen demnach an, auf der nichtabwickelbaren Fläche (1) seien weder die Krümmungskurven (v) noch die Krümmungskurven (u) lauter Kreise, und wenden uns dazu, die Fundamentalgrößen der Zentrafläche zu berechnen. Dabei können wir uns auf den ersten Mantel beschränken.

Aus (4) können wir nach XI (A) sofort die Fundamentalgrößen erster Ordnung E_1, F_1, G_1 für diesen Mantel finden. Mit Rücksicht auf XI (H) und (I) kommt nämlich:

[1] Monge nannte nur Röhrenflächen so.

(8) $$E_1 = \left(\frac{\partial R_1}{\partial u}\right)^2, \quad F_1 = \frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_1}{\partial v}, \quad G_1 = \left(\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2 G.$$

Hieraus ergibt sich ferner:

(9) $$D_1^2 = E_1 G_1 - F_1^2 = \left(\frac{\partial R_1}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2 G,$$

so daß wir haben:

(10) $$D_1 = \varepsilon_1 \frac{\partial R_1}{\partial u} \frac{R_2 - R_1}{R_2} \sqrt{G},$$

wobei $\varepsilon_1 = +1$ oder -1 sein kann, indem wir die Quadratwurzel $\sqrt{G}$ auf irgend eine Art einwertig definieren. Im reellen Falle kann man es so einrichten, daß D_1 positiv wird (wie auf S. 18), sobald man sich nur auf einen hinreichend kleinen Bereich des betrachteten Mantels der Zentrafläche beschränkt.

Auf S. 523 ergab sich schon, daß

$$\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v} - \frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v} = \frac{R_2 - R_1}{R_2} \cdot \frac{\partial R_1}{\partial u} \cdot (Y z_v - Z y_v)$$

ist. Hieraus folgt nach XI (K), weil ja $F = 0$ ist:

$$\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v} - \frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v} = -\frac{R_2 - R_1}{R_2} \cdot \frac{\partial R_1}{\partial u} \cdot \frac{G}{D} x_u.$$

Mit Rücksicht auf (10) ergibt sich also aus XI (F) für den Richtungskosinus X_1 der Normale des ersten Mantels:

$$X_1 = -\varepsilon_1 \frac{\sqrt{G}}{D} x_u.$$

Es ist aber $D = \sqrt{E} \cdot \sqrt{G}$, wenn wir im reellen Falle beide Wurzeln positiv und im allgemeinen Falle so wählen, daß dies mit der für D festgesetzten Einwertigkeit stimmt. Also kommt:

(11) $$X_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}} x_u, \quad Y_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}} y_u, \quad Z_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}} z_u.$$

Mithin ist auch:

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}} x_{uu} + \frac{\varepsilon_1 E_u}{2\sqrt{E^3}} x_u, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}} x_{uv} + \frac{\varepsilon_1 E_v}{2\sqrt{E^3}} x_u,$$

so daß hieraus und aus (4) nach XII (C) für die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L_1, M_1, N_1 des ersten Mantels folgt:

$$L_1 = \varepsilon_1 \mathsf{S} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} x_{uu} - \frac{E_u}{2\sqrt{E^3}} x_u\right) X \frac{\partial R_1}{\partial u},$$

$$M_1 = \varepsilon_1 \mathsf{S} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} x_{uv} - \frac{E_v}{2\sqrt{E^3}} x_u\right) X \frac{\partial R_1}{\partial u},$$

$$N_1 = \varepsilon_1 \mathsf{S} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} x_{uv} - \frac{E_v}{2\sqrt{E^3}} x_u\right) \left(X \frac{\partial R_1}{\partial v} + \frac{R_2 - R_1}{R_2} x_v\right).$$

Rechnet man diese Summen mit Hilfe von XII (A), XI (I), XVI (C) aus, so kommt, weil überdies $F = M = 0$ nach XIX (A) ist:

$$L_1 = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}} L \frac{\partial R_1}{\partial u}, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}} \frac{R_2 - R_1}{R_2} G_u$$

oder nach XIX (D):

$$L_1 = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{E}}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial u}, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}} \frac{R_2 - R_1}{R_2} G_u .$$

Der Wert von N_1 läßt sich noch umformen, denn nach XIX (C) ist:

$$\frac{1}{2} \frac{G_u}{G} = \frac{R_1}{R_2 (R_1 - R_2)} \frac{\partial R_2}{\partial u},$$

so daß wir schließlich finden:

$$(12) \quad L_1 = \varepsilon_1 \sqrt{E} \frac{\partial \log R_1}{\partial u}, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = - \varepsilon_1 \frac{G}{\sqrt{E}} \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\partial \log R_2}{\partial u} .$$

Aus $M_1 = 0$ folgt nach Satz 88, S. 242, daß die Kurven (u) und (v) auf dem ersten Mantel der Zentrafläche zueinander konjugiert sind. Die Kurven (v) wurden oben mit γ_1 bezeichnet. Eine Kurve (u) wird von denjenigen Hauptkrümmungszentren C_1 gebildet, die auf den Normalen der ursprünglichen Fläche längs einer Krümmungskurve k_2 liegen. Da Entsprechendes für den zweiten Mantel der Zentrafläche gilt, so folgt:

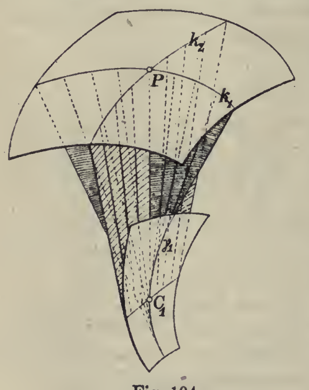


Fig. 104.

Satz 31: Auf jedem Mantel der Zentrafläche sind die Kurven, in deren Punkten er von den Normalen der Urfläche längs der Krümmungskurven der Urfläche berührt wird, zueinander konjugiert.

Die zu den Kurven γ_1 des ersten Mantels konjugierten Kurven unterscheiden sich wesentlich von den Kurven γ_1. Die Kurven γ_1, die geodätisch sind, haben die Normalen der ursprünglichen Fläche zu Tangenten, die anderen Kurven nicht, obgleich ihre Punkte Berührungspunkte der Normalen mit dem Mantel sind. Dies soll durch Fig. 104 erläutert werden,

in der eine Kurve der zweiten Art auf dem ersten Mantel der Zentrafläche dargestellt ist.

Nach (8) ist das Quadrat des Bogenelements ds_1 des ersten Mantels der Zentrafläche:

$$(13)\quad ds_1{}^2 = \left(\frac{\partial R_1}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_1}{\partial v}du\,dv + \left[\left(\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2 G\right] dv^2,$$

wofür wir auch schreiben können:

$$(14)\quad ds_1{}^2 = dR_1{}^2 + \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2 G\,dv^2.$$

Ist dieser Mantel, wie wir ja annehmen, nicht ausgeartet, so ist R_1, wie wir oben sahen, keine Funktion von v allein, d. h. R_1 und v sind voneinander unabhängige Funktionen. Daher können wir statt u und v auch

$$(15)\quad \bar{u} = R_1, \quad \bar{v} = v$$

als Parameter auf diesem Mantel einführen. Alsdann stellt sich $ds_1{}^2$ nach (14) so dar:

$$(16)\quad ds_1{}^2 = d\bar{u}^2 + \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2 G\,d\bar{v}^2,$$

wo wir natürlich den Faktor von $d\bar{v}^2$ als Funktion von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ auffassen können. Nach Satz 20, S. 505, folgt hieraus, daß die Kurven $(\bar{v})$ geodätische Kurven und die Kurven $(\bar{u})$ ihre orthogonalen Trajektorien auf dem ersten Mantel der Zentrafläche sind. Die Parameterlinien $(\bar{v})$ sind nach (15) die Kurven (v) oder γ_1; es wird also hier aufs neue bewiesen, daß sie geodätisch sind. Die Kurven $(\bar{u})$ sind nach (15) diejenigen, für die R_1 konstant ist. Man erhält sie, wenn man auf der ursprünglichen Fläche (1) längs einer Kurve fortschreitet, für deren Punkte der erste Hauptkrümmungsradius R_1 konstant ist, und zwar sind sie dann die Örter der Berührungspunkte C_1 der Normalen mit dem ersten Mantel der Zentrafläche.

Entsprechendes gilt auf dem zweiten Mantel. Also:

Satz 32: Beschreibt man auf einer Fläche eine Kurve, für deren Punkte der erste oder zweite Hauptkrümmungsradius konstant ist, so ist der Ort der zugehörigen Hauptkrümmungs-Mittelpunkte eine solche Kurve auf dem ersten bzw. zweiten Mantel der Zentrafläche, die diejenigen geodätischen Linien orthogonal schneidet, die den Krümmungskurven der ersten bzw. zweiten Art entsprechen.

Wir sehen aber noch mehr: Nach Satz 20, S. 505, ist $\bar{u} = R_1$ die Bogenlänge der geodätischen Kurven γ_1. Dies besagt: Die Differenz der beiden Werte, die R_1 für zwei Punkte einer Krümmungskurve k_1 hat, ist gleich dem Bogen des zugehörigen Stückes der geodätischen Kurve γ_1. Also:

Satz 33: Beschreibt ein Punkt eine Krümmungskurve der ersten oder zweiten Art auf einer Fläche, so ist die Bogenlänge der Kurve des zugehörigen Hauptkrümmungs-Mittelpunktes auf dem ersten bzw. zweiten Mantel der Zentrafläche gleich der Differenz der Werte des ersten bzw. zweiten Hauptkrümmungsradius für die beiden Endpunkte des Weges.

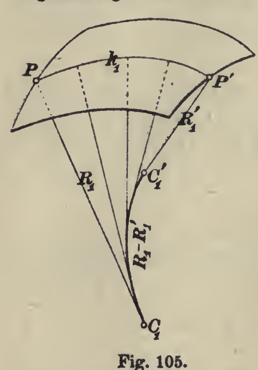


Fig. 105.

Zur Erläuterung diene die Fig. 105 für eine Krümmungskurve k_1.

Der letzte Satz ist in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung des Satzes über Evoluten und Evolventen in der Ebene, nach dem die Bogenlänge der Evolute gleich der Differenz der Normalen der Evolvente in den Endpunkten ist (vgl. Satz 36, I S. 62).

Schließlich wollen wir noch das Krümmungsmaß K_1 für den ersten Mantel der Zentrafläche berechnen. Nach XII (K) ist

$$K_1 = \frac{L_1 N_1 - M_1^2}{D_1^2},$$

so daß aus (10) und (12) folgt:

$$K_1 = -\frac{1}{(R_2 - R_1)^2} \cdot \frac{\frac{\partial R_2}{\partial u}}{\frac{\partial R_1}{\partial u}}. \tag{17}$$

Nach XII (X) lautet die Differentialgleichung der Haupttangentenkurven des ersten Mantels der Zentrafläche wegen (12) so:

$$E R_2^2 \frac{\partial R_1}{\partial u} du^2 - G R_1^2 \frac{\partial R_2}{\partial u} dv^2 = 0, \tag{18}$$

und auf dem zweiten Mantel kommt entsprechend:

$$E R_2^2 \frac{\partial R_1}{\partial v} du^2 - G R_1^2 \frac{\partial R_2}{\partial v} dv^2 = 0. \tag{19}$$

Beispiel: In § 13 des 3. Abschnittes betrachteten wir die Flächen, auf denen das Krümmungsmaß K und die mittlere Krümmung H voneinander abhängige Funktionen der Parameter sind. Da wir in dem gegenwärtigen Paragraphen von denjenigen Flächen absehen, die eine Schar von Minimalgeraden enthalten, also nur solche Flächen betrachten, die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 haben, können wir die erwähnten Flächen dadurch charakterisieren, daß wir annehmen, es bestehe auf der Urfläche (1) eine Gleichung

$$\Omega(R_1, R_2) = 0 \tag{20}$$

zwischen ihren Hauptkrümmungsradien (vgl. S. 444). Alsdann ist die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_2}{\partial v} - \frac{\partial R_2}{\partial u}\frac{\partial R_1}{\partial v} = 0. \tag{21}$$

Da nun das Krümmungsmaß K_2 des zweiten Mantels der Zentrafläche entsprechend (17) den Wert

$$K_2 = -\frac{1}{(R_1 - R_2)^2}\,\frac{\dfrac{\partial R_1}{\partial v}}{\dfrac{\partial R_2}{\partial v}}$$

hat, folgt aus (21), daß

$$K_1 K_2 = \frac{1}{(R_1 - R_2)^4}$$

ist. Nach (21) sind ferner die beiden Gleichungen (18) und (19) jetzt miteinander identisch. Daher haben wir den

Satz 34: Besteht auf einer Fläche eine Gleichung zwischen ihrer Hauptkrümmungsradien, so ist das Produkt der Krümmungen ihrer beiden Zentraflächenmäntel in solchen Punkten, die auf derselben Normale der Urfläche liegen, gleich dem reziproken Werte der vierten Potenz der Differenz der beiden Radien. Außerdem liegen die Haupttangentenkurven auf beiden Mänteln so, daß diejenigen Normalen der Urfläche, die nach den Punkten einer Haupttangentenkurve des einen Mantels gehen, auch auf dem anderen Mantel eine Haupttangentenkurve bestimmen.

Wir sahen ferner, daß man das Quadrat des Bogenelements ds_1 des ersten Mantels der Zentrafläche durch Einführung der in (15) angegebenen Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$ auf die Form (16) bringen kann. Wegen (20) ist aber jetzt etwa R_2 eine Funktion von R_1:

$$R_2 = \varphi(R_1), \tag{22}$$

und außerdem kann nach (9), S. 449, G als Funktion von R_1 und R_2, also auch als Funktion von R_1 allein aufgefaßt werden, so daß wegen $R_1 = \bar{u}$ aus (16) folgt:

$$ds_1^2 = d\bar{u}^2 + \psi(\bar{u})\,d\bar{v}^2. \tag{23}$$

Nun gehören zu einer und derselben Gleichung (22) unendlich viele Flächen. Aber bei allen ist die Funktion ψ dieselbe, also läßt sich für alle das Quadrat des Bogenelements des ersten Mantels der Zentrafläche auf eine gemeinsame

Form (19) bringen. Nach Satz 7, S. 353, sind daher diese ersten Mäntel der Zentraflächen aller jener unendlich vielen Flächen aufeinander verbiegbar. Dasselbe gilt natürlich für die zweiten Mäntel. Demnach folgt

Satz 35: Besteht auf zwei Flächen dieselbe Gleichung zwischen ihren Hauptkrümmungsradien, so sind ihre Zentraflächen aufeinander verbiegbar, und zwar entsprechende Mäntel aufeinander.

Aber noch mehr: Die Formel (23) erinnert an das Quadrat des Bogenelements einer Rotationsfläche. Sind nämlich

$$\bar{x} = p(\bar{u}) \cos \bar{v}, \qquad \bar{y} = p(\bar{u}) \sin \bar{v}, \qquad \bar{z} = \int \sqrt{1 - p'(\bar{u})}\, d\bar{u}$$

die Gleichungen einer Rotationsfläche, vgl. S. 48, so ist

$$d\bar{s}^2 = d\bar{u}^2 + p^2(\bar{u})\, d\bar{v}^2$$

das Quadrat ihres Bogenelements $d\bar{s}$. Wir können nun

$$p(\bar{u}) = \sqrt{\psi(\bar{u})}$$

setzen. Alsdann stimmt die Form (23) von $d s_1{}^2$ mit der von $d\bar{s}^2$ überein, so daß der Satz 7, S. 353, ergibt:

Satz 36: Besteht auf einer Fläche eine Gleichung zwischen ihren Hauptkrümmungsradien, so ist jeder der beiden Mäntel ihrer Zentrafläche auf je eine Rotationsfläche verbiegbar. Dabei gehen die geodätischen Kurven des ersten Mantels, die den Krümmungskurven erster Art der Fläche entsprechen, in die Meridiane und diejenigen Kurven des ersten Mantels, die den Orten gleichen Wertes des ersten Hauptkrümmungsradius zugehören, in die Breitenkreise der einen Rotationsfläche über; und für den zweiten Mantel läßt sich Entsprechendes aussagen.[1]

Denn man hat nur zu bedenken, daß nach (15) erstens die Kurven $(\bar{u})$ denjenigen Kurven der ursprünglichen Fläche entsprechen, für die $R_1 =$ konst. ist, und zweitens die Kurven $(\bar{v})$ die geodätischen Kurven (v) des ersten Mantels sind, die wir als die Kurven γ_1 bezeichnet hatten.

§ 6. Geradenscharen, die Normalenscharen von Flächen sind.

In gewissem Sinne ist die Zentralfläche einer Fläche die natürliche Verallgemeinerung des aus der Theorie der ebenen Kurven geläufigen Begriffes der Evolute einer Kurve. In der Ebene haben wir damals auch die Umkehrung untersucht: Zu einer gegebenen Evoltue die Evolventen zu finden. (Vgl. I S. 62 u. f.) Entsprechend gibt es auch in der Flächentheorie eine Umkehrung:

---

[1] Satz von Weingarten, von dem überhaupt die angegebenen Sätze über diese sogenannten Weingartenschen Flächen herrühren. Vgl. die Anm. zu S. 444.

Zu einer gegebenen Zentrafläche die zugehörigen Urflächen zu bestimmen.

Dies Problem läßt sich jedoch verschiedenartig fassen. Da nämlich die Zentrafläche aus zwei Mänteln besteht, kann man entweder annehmen, beide Mäntel seien gegeben, oder man kann annehmen, daß nur ein Mantel gegeben sei.

Wir betrachten zunächst das erste Problem: Es seien beide Mäntel der Zentrafläche gegeben, gesucht wird die Urfläche. In diesem Falle kann man ohne Mühe die Normalen der Urfläche finden, da sie beide Mäntel der Zentrafläche berühren müssen. Wir wählen nämlich auf dem einen Mantel einen Punkt C_1 beliebig. Dann muß es eine Normale der Urfläche geben, die den Mantel in C_1 berührt, also in der Tangentenebene von C_1 liegt. Diese Tangentenebene schneidet den zweiten Mantel in einer Kurve, und die gesuchte von C_1 ausgehende Normale muß auch den zweiten Mantel, mithin diese Kurve berühren. Von C_1 wird nun im allgemeinen eine Tangente oder eine gewisse Anzahl von Tangenten an die Kurve gehen. Unter ihnen muß die gesuchte Normale enthalten sein.

Man sieht so, daß es leicht ist, diejenigen Geraden zu bestimmen, die Normalen der gesuchten Fläche sein können. Da der eine Mantel zweifach unendlich viele Punkte C_1 enthält, erhalten wir auch zweifach unendlich viele Geraden, ebenso viele, wie es Normalen geben müßte. Die Frage ist also jetzt auf die andere Frage zurückgeführt:

Unter welchen Bedingungen ist eine stetige Schar von zweifach unendlich vielen Geraden als die Schar der Normalen einer Fläche aufzufassen?

Hätten wir diese Frage beantwortet, so würden wir die Bedingungen auf die soeben konstruierte Geradenschar anwenden. Wären sie erfüllt, so würden wir Flächen zu suchen haben, die die Geraden der Schar senkrecht schneiden.

Man sieht hieraus, daß die Schwierigkeit des Problems einmal in der soeben formulierten Frage und dann in der zweiten Frage liegt, wie man die Flächen bestimmt, die alle jene Geraden zu Normalen haben. Wir legen uns daher die Aufgabe vor:

Gegeben sei eine stetige Schar von zweifach unendlich vielen Geraden; gefragt wird, ob sie die Normalen einer Fläche sein können und, wenn sie es sind, wie man diese Fläche findet.

Eine stetige Schar von zweifach unendlich vielen Geraden nennt man

(vgl. I S. 190) ein **Strahlensystem**.[1] Wir fragen also nach den Bedingungen, unter denen ein Strahlensystem das Normalensystem einer Fläche ist. Dabei sehen wir selbstverständlich von dem Falle ab, wo die Geraden des Strahlensystems Minimalgeraden sind.

Eine Gerade mit den Richtungskosinus f, g, h kann, wenn $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ ein bestimmter Punkt auf ihr ist, in den laufenden Koordinaten x, y, z mittels eines Parameters t so dargestellt werden:

$$x = \mathfrak{x} + ft, \quad y = \mathfrak{y} + gt, \quad z = \mathfrak{z} + ht. \tag{1}$$

Soll in (1) ein Strahlensystem vorliegen, so müssen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, f, g, h$ Funktionen von zwei Parametern u und v sein. Da wir insbesondere unter f, g, h die Richtungskosinus der Geraden verstehen, können wir uns dabei auf solche Funktionen f, g, h von u und v beschränken, für die

$$f^2 + g^2 + h^2 = 1 \tag{2}$$

ist. Zu jedem Wertepaare u, v gehört eine Gerade des Strahlensystems.

Soll es eine Fläche geben, die die Geraden (1) zu Normalen hat, so muß auf jeder Geraden ein Punkt der Fläche liegen. Nun wird ein Punkt (x, y, z) auf einer Geraden (1) durch die Angabe des Wertes des Parameters t festgelegt, der infolge von (2) den Abstand des Punktes (x, y, z) vom Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ vorstellt, gemessen in einer bestimmten Orientierung. Wir haben daher unter t eine noch unbekannte Funktion von u und v zu verstehen, so

[1] Die Strahlensysteme wurden zuerst von Malus systematisch untersucht, siehe seine Note: „Optique" in der Correspondance sur l'École polyt. I (1806) und seine Abhandlung: „Optique" im Journal de l'École polyt., 14. cah. (1808). Insbesondere fand er, daß sich die Geraden eines Strahlensystems in zwei Weisen zu Scharen von je einfach unendlich vielen Geraden zusammenfassen lassen, die abwickelbare Flächen erzeugen, also so, wie es bei der Normalen einer Fläche der Fall ist, wenn man die Normalen längs je einer Krümmungskurve herausgreift (vgl. Fig. 102 auf S. 521). Die Gratlinien dieser abwickelbaren Flächen bilden auch bei beliebigen Strahlensystemen im allgemeinen zwei Flächenmäntel, die sogenannten Brennflächen. Malus fand so, daß die Geraden eines Strahlensystems Doppeltangenten einer aus zwei Mänteln bestehenden Fläche sind. Wenn insbesondere jene beiden Scharen von abwickelbaren Flächen einander senkrecht schneiden, liegt ein Strahlensystem vor, das das Normalensystem einer Fläche ist. Man könnte dem Satze 37 auf S. 536 diese Deutung geben. Sie wurde ebenfalls von Malus erkannt, aber erst von Bertrand, „Mémoire sur la théorie des surfaces", Journ. de Math. pures et appl., 1. Serie, 9. Bd. (1844), vollständig ausgesprochen und bewiesen.

daß x, y, z in (1) Funktionen von u und v allein werden, die eben die fragliche Fläche mittels der beiden Parameter u und v darstellen sollen. Alsdann ist zu fordern, daß die Fläche die Normalen mit den Richtungskosinus f, g, h habe. Wenn also t in (1) als Funktion von u und v aufgefaßt wird, ist zu fordern, daß

$$\mathbf{S}\, x_u f = 0, \qquad \mathbf{S}\, x_v f = 0$$

sei, wo sich die Summenzeichen auch auf die zyklische Vertauschung von f, g, h beziehen. Nun aber ist nach (1):

$$x_u = \mathfrak{x}_u + f t_u + f_u t, \qquad x_v = \mathfrak{x}_v + f t_v + f_v t,$$

so daß die Bedingungen diese werden:

$$\mathbf{S}(\mathfrak{x}_u + f t_u + f_u t) f = 0, \qquad \mathbf{S}(\mathfrak{x}_v + f t_v + f_v t) f = 0.$$

Nach (2) ist sowohl $\mathbf{S}\, f^2 = 1$ als auch $\mathbf{S}\, f f_u = \mathbf{S}\, f f_v = 0$, so daß bleibt:

(3) $$t_u = -\mathbf{S}\,\mathfrak{x}_u f, \qquad t_v = -\mathbf{S}\,\mathfrak{x}_v f.$$

In diesen beiden Gleichungen stehen rechts bekannte Funktionen von u und v, links die partiellen Ableitungen einer noch unbekannten Funktion t von u und v. Diese Funktion t ist dann und nur dann vorhanden, wenn die Werte (3) von t_u und t_v der Bedingung

$$\frac{\partial t_u}{\partial v} = \frac{\partial t_v}{\partial u}$$

genügen, d. h. wenn

(4) $$\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{S}\,\mathfrak{x}_u f = \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{S}\,\mathfrak{x}_v f$$

ist. Ist diese Bedingung für alle Werte von u und v erfüllt, so folgt aus (3) durch Quadratur:

(5) $$t = -\int (\mathbf{S}\,\mathfrak{x}_u f\, du + \mathbf{S}\,\mathfrak{x}_v f\, dv) + \text{konst.}$$

Wird dieser Wert in (1) eingesetzt, so gibt (1) die Gleichung einer Fläche, die die gegebenen zweifach unendlich vielen Geraden zu Normalen hat.

Da in (5) noch eine additive willkürliche Konstante auftritt, so gibt es, wenn überhaupt eine Fläche von der gewünschten Art vorhanden ist, deren einfach unendlich viele, die aus der einen Fläche dadurch hervorgehen, daß man auf ihren Normalen, den Geraden (1), noch ein konstantes Stück aufträgt, also Flächen, die die Parallelflächen der einen Fläche sind. Dies war nach Satz 102, S. 268, vorauszusehen.

Die Bedingung (4) kann auch so ausgesprochen werden: Der in (5) unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck muß ein voll-

ständiges Differential sein. Und dieser Ausdruck läßt sich kürzer so schreiben:

$$\mathsf{S} f d\mathfrak{x}.$$

Also haben wir den

Satz 37:[1] Ist eine Schar von zweifach unendlich vielen Geraden, die keine Minimalgeraden sind, dadurch gegeben, daß in den Gleichungen einer Geraden mit den laufenden Koordinaten x, y, z und dem Parameter t:

$$x = \mathfrak{x} + ft, \quad y = \mathfrak{y} + gt, \quad z = \mathfrak{z} + ht$$

die Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ eines Punktes der Geraden und die Richtungskosinus f, g, h der Geraden als Funktionen zweier Parameter u und v angenommen werden, wobei also

$$f^2 + g^2 + h^2 = 1$$

ist, so ist die Schar dann und nur dann die aller Normalen einer Fläche, wenn der Ausdruck

$$f d\mathfrak{x} + g d\mathfrak{y} + h d\mathfrak{z}$$

ein vollständiges Differential in u und v ist. Dann gibt es einfach unendlich viele Flächen, die alle Geraden senkrecht schneiden. Sie werden mittels der beiden Parameter u und v in den laufenden Koordinaten x, y, z dargestellt, wenn

$$t = -\int (f d\mathfrak{x} + g d\mathfrak{y} + h d\mathfrak{z}) + \text{konst.}$$

in die Gleichungen der Geraden eingesetzt wird.

Beispiel: Insbesondere liege ein Strahlensystem vor, dessen Geraden sämtlich eine gegebene Kurve treffen, die keine Minimalkurve sei. Die Gleichungen der Kurve seien in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ mittels der Bogenlänge u gegeben durch

$$\mathfrak{x} = \varphi(u), \quad \mathfrak{y} = \chi(u), \quad \mathfrak{z} = \psi(u). \tag{6}$$

Alsdann stellt (1) ein Strahlensystem von der angegebenen Art vor, wenn darin für $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ diese Werte und für f, g, h solche Funktionen von u und einem zweiten Parameter v gesetzt werden, die der Bedingung (2) genügen. Die Richtungskosinus α, β, γ der Tangente der Kurve (6) sind nach III (*B*) die Ableitungen von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, so daß die Bedingung (4) gibt:

$$\frac{\partial \mathsf{S} \alpha f}{\partial v} = 0.$$

---

[1] Satz von Hamilton, „Supplements to an essay on the theory of systems of rays", Transactions of the R. Irish Acad., 16. Bd. (1830).

Sie besagt, daß die durch irgend einen Punkt ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$) oder (u) der Kurve (6) gehenden einfach unendlich vielen Geraden des Strahlensystems mit der Tangente der Kurve an derselben Stelle einen von v unabhängigen Winkel bilden und daher einen Rotationskegel ausmachen, der diese Tangente zur Achse hat. Das Strahlensystem muß demnach aus den Erzeugenden von einfach unendlich vielen Rotationskegeln bestehen, deren Spitzen eine Kurve erfüllen und deren Achsen die zugehörigen Kurventangenten sind. Eine von denjenigen Flächen, die alsdann alle Geraden des Strahlensystems zu Normalen hat, schneidet jeden dieser Kegel in einer Krümmungskurve, nach der Definition auf S. 213, und die Hauptkrümmungsmittelpunkte der einen Art für die Punkte dieser Kurve fallen in der Kegelspitze zusammen. Demnach artet der eine Mantel der Zentrafläche in die gegebene Kurve aus; die Flächen, die das Strahlensystem als Normalensystem haben, sind deshalb nach S. 526 Kanalflächen.

Besteht das Strahlensystem aus allen Geraden, die zwei gegebene Kurven treffen, die keine Minimalkurven sind, so kann es hiernach nur dann ein Normalensystem sein, wenn alle Geraden, die von einem Punkte einer der beiden Kurven nach allen Punkten der anderen Kurve gehen, stets einen Rotationskegel bilden, dessen Achse die Tangente der einen Kurve in dem gewählten Punkte ist. Jede der beiden Kurven liegt somit auf einfach unendlich vielen Rotationskegeln und ist daher ein Kegelschnitt, und wie die analytische Geometrie der Kegelschnitte lehrt, handelt es sich um sogenannte Fokalkegelschnitte: Ist die eine Kurve eine Ellipse, so ist die andere eine Hyperbel; die Ebenen beider schneiden einander senkrecht längs ihrer Hauptachsen, die Brennpunkte der einen Kurve sind die Hauptscheitel der anderen, und umgekehrt. Ist die eine Kurve eine Parabel, so ist die andere ebenfalls eine Parabel; die Ebenen beider schneiden einander wiederum senkrecht längs ihrer Achsen und der Brennpunkt der einen Parabel ist der Scheitel der anderen, und umgekehrt. Nach Satz 30, S. 525, hüllt eine Fläche, die alle die beiden Kegelschnitte treffenden Geraden zu Normalen hat, zwei einfach unendliche Scharen von Kugeln ein; und die Kurven, längs deren die Kugeln die Fläche berühren, sind zwei Scharen von Kreisen und zugleich die Krümmungskurven der Fläche. Die Mittelpunkte der Kugeln liegen auf dem einen bzw. anderen Kegelschnitte. Wir kommen also zu Flächen, die in doppelter Weise als Kanalflächen zu erzeugen sind; sie heißen Zykliden.[1] Wenn der eine Kegelschnitt ein Kreis ist, artet der andere in das Mittellot der Kreisebene aus. Die eine Kugelschar besteht alsdann aus lauter kongruenten Kugeln, deren Mittelpunkte auf dem Kreise liegen, so daß die Einhüllende eine Ringfläche ist (siehe S. 21 und S. 152).

Wir wenden uns jetzt zu dem zweiten oben angedeuteten Problem: Es liege nur eine gegebene Fläche vor; gefragt wird, ob sie als der eine Mantel der Zentrafläche einer gesuchten Fläche erzeugt werden kann.

---

[1] Sie wurden von Dupin entdeckt und untersucht. Siehe seine „Applications de géométrie et de méchanique à la marine et aux ponts et chaussées“, Paris 1822. Bei Schilling in Leipzig sind Gipsmodelle der Zykliden erschienen.

Nach Satz 29, S. 523, müssen die Krümmungskurven der einen Schar auf der gesuchten Fläche geodätischen Kurven auf der gegebenen entsprechen. Daher nehmen wir an, auf der gegebenen Fläche sei eine Schar von einfach unendlich vielen geodätischen Kurven bekannt, und mit ihrer Hilfe seien geodätische Parameter u und v (vgl. S. 506) eingeführt worden, so daß

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\, dv^2 \tag{7}$$

das Quadrat des Bogenelements der gegebenen Fläche ist und die Kurven (v) alsdann diejenigen geodätischen Kurven sein sollen, denen auf der gesuchten Fläche Krümmungskurven entsprechen.

Znächst müssen jetzt jedenfalls die Tangenten der geodätischen Kurven (v) die Normalen der gesuchten Fläche sein. Dies genügt aber auch. Wenn es nämlich eine Fläche gibt, die alle jene Tangenten senkrecht trifft, ist jede Kurve dieser Fläche, die von den Tangenten einer Kurve (v) der gegebenen Fläche ausgeschnitten wird, eine Krümmungskurve, weil die Flächennormalen längs ihrer eine abwickelbare Fläche bilden. Siehe die Definition auf S. 213 u. f. Die Kurven (v) enthalten deshalb die Hauptkrümmungs-Mittelpunkte der einen Art der fraglichen Fläche, was bedeutet, daß die gegebene Fläche ein Mantel ihrer Zentrafläche sein muß.

Deshalb braucht nur noch untersucht zu werden, ob die zweifach unendlich vielen Tangenten aller Parameterlinien (v) der gegebenen Fläche ein Normalensystem bilden. Dazu dient der Satz 37; um ihn anzuwenden, bezeichnen wir die laufenden Koordinaten der gegebenen Fläche mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$. Nach (7) ist dann

$$\mathbf{S}\,\mathfrak{x}_u^2 = 1, \qquad \mathbf{S}\,\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = 0, \qquad \mathbf{S}\,\mathfrak{x}_v^2 = G. \tag{8}$$

Weiterhin sind jetzt f, g, h als Richtungskosinus der Tangenten der Parameterlinien (v) zu $\mathfrak{x}_u, \mathfrak{y}_u, \mathfrak{z}_u$ proportional, und wegen der ersten Formel (8) dürfen f, g, h geradezu gleich $\mathfrak{x}_u, \mathfrak{y}_u, \mathfrak{z}_u$ gesetzt werden. Die Bedingung des Satzes 37 liefert demnach:

$$\frac{\partial\, \mathbf{S}\,\mathfrak{x}_u^2}{\partial v} = \frac{\partial\, \mathbf{S}\,\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v}{\partial u}.$$

Diese Forderung ist offenbar nach (8) erfüllt. Daher gilt der

Satz 38: Eine beliebige Fläche kann auf unendlich viele Arten als der eine Mantel der Zentrafläche einer anderen Fläche aufgefaßt werden. Wenn man nämlich auf der Fläche eine einfach unendliche Schar von geodätischen Kurven auswählt, die keine Minimalkurven sind, bilden ihre Tangenten stets die Normalen von einfach unendlich vielen Parallelflächen, für die die gegebene Fläche

der eine Mantel der Zentrafläche ist. Die Krümmungskurven der einen Schar auf den Parallelflächen sind die Filarevolventen der ausgewählten geodätischen Kurven.

Das Letzte folgt unmittelbar aus der Definition der Filarevolventen in I S. 392.

§ 7. Die allgemeine Flächenkurve.

Nachdem wir bisher eine Reihe von besonderen Kurvenarten auf einer Fläche besprochen haben, nämlich die Minimalkurven, die Krümmungskurven, die Haupttangentenkurven und schließlich die geodätischen Kurven, wollen wir jetzt zum Schlusse beliebige Kurven auf der Fläche ins Auge fassen.

Es seien u, v die Parameter auf der Fläche, E, F, G, L, M, N ihre Fundamentalgrößen und X, Y, Z die Richtungskosinus der Normale. Wenn wir u und v als Funktionen eines Parameters t irgendwie wählen, wird dadurch nach S. 12 eine Kurve auf der Fläche definiert. Ihr Bogenelement ds wird durch

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du\, dv + G dv^2$$

bestimmt, wo du und dv die Differentiale der Funktionen u und v von t bedeuten, die zu dem Zuwachs dt von t gehören. Daher ist die Bogenlänge der Kurve vom Punkte $(t = 0)$ bis zu einem beliebigen Punkte (t):

$$(1) \qquad s = \int_0^t \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2 F \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Hierbei hat man sich in E, F, G für u und v immer die Funktionen von t gesetzt zu denken. Durch diese Formel wird s als Funktion von t definiert, sobald man die Quadratwurzel einwertig macht. Dies kann dadurch geschehen, daß man ihren Wert für $t = 0$ auswählt, da sie alsdann wegen der Stetigkeit auch in der Umgebung des Wertes $t = 0$ festgelegt wird. Vorausgesetzt wird natürlich, daß die Kurve keine Minimalkurve sei, d. h. daß u und v solche Funktionen von t seien, für die der Radikand der Wurzel nicht verschwindet.

Da u und v längs der Kurve Funktionen von t sind und nach (1) auch s eine Funktion von t ist, kann man auch u und v als Funktionen von s betrachten. Wie man ihre Ableitungen nach der Bogenlänge berechnet, ist leicht ersichtlich. Deutet nämlich im

folgenden der Strich die Differentiation nach dem Parameter t an, so folgt aus (1):

$$\frac{ds}{dt} = s' = \sqrt{E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2}, \tag{2}$$

also wegen

$$\frac{du}{ds} = \frac{u'}{s'}, \qquad \frac{dv}{ds} = \frac{v'}{s'}$$

auch

$$\frac{du}{ds} = \frac{u'}{\sqrt{E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2}}, \quad \frac{dv}{ds} = \frac{v'}{\sqrt{E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2}}. \tag{3}$$

Die Ableitungen zweiter Ordnung von u und v gewinnt man ganz entsprechend aus

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = \frac{\left(\frac{du}{ds}\right)'}{s'}, \qquad \frac{d^2 v}{ds^2} = \frac{\left(\frac{dv}{ds}\right)'}{s'}.$$

Dabei hat man zu beachten, daß E, F, G von u und v, also auch von t abhängen. Nach (3) ist daher die Ableitung der Quadratwurzel nach t gleich dem Ausdrucke

$$\begin{aligned} &2[E u' u'' + F(u' v'' + v' u'') + G v' v''] \\ &\qquad + E_u u'^3 + (E_v + 2 F_u) u'^2 v' + (2 F_v + G_u) u' v'^2 + G_v v'^3, \end{aligned}$$

dividiert mit der doppelten Quadratwurzel. Demnach kommt:

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = \frac{\left\{\begin{array}{l} 2(F u' + G v')(v' u'' - u' v'') - \\ - u'[E_u u'^3 + (E_v + 2 F_u) u'^2 v' + (2 F_v + G_u) u' v'^2 + G_v v'^3] \end{array}\right\}}{2(E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2)^2},$$

$$\frac{d^2 v}{ds^2} = \frac{\left\{\begin{array}{l} 2(E u' + F v')(u' v'' - v' u'') - \\ - v'[E_u u'^3 + (E_v + 2 F_u) u'^2 v' + (2 F_v + G_u) u' v'^2 + G_v v'^3] \end{array}\right\}}{2(E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2)^2}.$$

In derselben Weise lassen sich auch die Ableitungen dritter und höherer Ordnung von u und v nach der Bogenlänge s berechnen, aber die Formeln dafür werden sehr umfangreich.

Deshalb empfiehlt es sich, im folgenden anzunehmen, daß der Parameter der Flächenkurve selbst schon ihre Bogenlänge s sei. Dies ist nach (2) der Fall, wenn u und v solche Funktionen von s sind, deren Ableitungen u' und v' nach s die Bedingung

$$E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2 = 1 \tag{4}$$

erfüllen. In der Folge soll also überhaupt der Strich die Differentiation nach der Bogenlänge s andeuten. Will man dann von den Formeln, die wir aufstellen werden, zu den allgemeineren übergehen.

in denen die Kurve mittels irgend eines Parameters t ausgedrückt ist, so braucht man nur die in den Formeln vorkommenden Größen

$$u', \; v', \; u'', \; v'', \; \ldots$$

durch die oben berechneten Größen

$$\frac{du}{ds}, \quad \frac{dv}{ds}, \quad \frac{d^2u}{ds^2}, \quad \frac{d^2v}{ds^2}, \ldots$$

zu ersetzen. Obgleich es im allgemeinen nicht möglich sein wird, bei einer vorgelegten Flächenkurve die Bogenlänge s zu berechnen und alsdann als Parameter einzuführen, ist man also doch imstande, alle nachher aufgestellten Formeln mit Hilfe eines beliebigen Parameters t auszudrücken.

Wir wollen ferner annehmen, die zu betrachtende Flächenkurve sei auch keine Minimalkurve zweiter Ordnung (siehe I S. 242). Erst weiter unten werden wir das Kennzeichen dafür angeben. Für die Flächenkurve verwenden wir nun die gebräuchlichen Bezeichnungen: Die Richtungskosinus ihrer Tangente seien α, β, γ, die ihrer Hauptnormale l, m, n und die ihrer Binormale λ, μ, ν. Außerdem sei $1:r$ ihre Krümmung und $1:\varrho$ ihre Torsion.

Nach III (B) ergibt sich:

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha = x' = x_u u' + x_v v', \\ \dfrac{l}{r} = x'' = x_{uu} u'^2 + 2\, x_{uv} u' v' + x_{vv} v'^2 + x_u u'' + x_v v'', \end{cases}$$

und durch zyklische Vertauschung gehen hieraus die Werte von β, γ sowie von $m:r$ und $n:r$ hervor. In dem Werte von $l:r$ kann man nach XVI (B) die für x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} gewonnenen Ausdrücke einführen. Dann ergibt sich

$$(6) \quad \frac{l}{r} = x'' = X(L u'^2 + 2\, M u' v' + N v'^2) + A x_u + B x_v,$$

wenn zur Abkürzung

$$(7) \begin{cases} A = u'' + \dfrac{1}{2D^2}[(E_u G + E_v F - 2\, F_u F) u'^2 + 2(E_v G - G_u F) u' v' + \\ \qquad\qquad + (-G_v F - G_u G + 2\, F_v G) v'^2], \\ B = v'' + \dfrac{1}{2D^2}[(-E_u F - E_v E + 2\, F_u E) u'^2 + 2(-E_v F + G_u E) u' v' + \\ \qquad\qquad + (G_v E + G_u F - 2\, F_v F) v'^2] \end{cases}$$

gesetzt wird.

Die Normalebene des betrachteten Punktes der Flächenkurve enthält außer der Haupt- und Binormale die Flächennormale. Die

Drehung in dieser Ebene wird wie immer positiv gerechnet im Sinne von der positiven Haupt- zur positiven Binormale. Den Winkel nun, den die positive Hauptnormale in diesem Sinne zurücklegen muß, um in die positive Flächennormale überzugehen, nennen wir ω. Alsdann ist:

$$\cos\omega = \mathbf{S}\, X l, \qquad \sin\omega = \mathbf{S}\, X\lambda. \tag{8}$$

Die erste Formel gibt nach (6) mit Rücksicht auf XI (*I*) einfach:

$$\frac{\cos\omega}{r} = L u'^2 + 2 M u' v' + N v'^2. \tag{9}$$

Dies ist kein neues Ergebnis, sondern die Formel (4) auf S. 117, wie sie sich wegen unserer obenstehenden Gleichung (4) und wegen XII (*A*) darstellt. Die zweite Formel (8) läßt sich nach III (*B*) so schreiben:

$$\frac{\sin\omega}{r} = \begin{vmatrix} X & x' & x'' \\ Y & y' & y'' \\ Z & z' & z'' \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Führt man hierin x' aus (5) und x'' aus (6) ein, sowie die entsprechenden Ausdrücke für y', z' und y'', z'', so kommt:

$$\frac{\sin\omega}{r} = \begin{vmatrix} X & x_u u' + x_v v' & A x_u + B x_v \\ Y & y_u u' + y_v v' & A y_u + B y_v \\ Z & z_u u' + z_v v' & A z_u + B z_v \end{vmatrix}$$

oder

$$\frac{\sin\omega}{r} = (B u' - A v') \begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix},$$

d. h. nach XI (*L*):

$$\frac{\sin\omega}{r} = D(B u' - A v').$$

Einsetzen der Werte von A und B aus (7) liefert demnach:

$$\frac{\sin\omega}{r} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} u' & D^2 u'' + \tfrac{1}{2}(E_u G + E_v F - 2 F_u F) u'^2 + \\ & + (E_v G - G_u F) u' v' + \tfrac{1}{2}(-G_v F - G_u G + 2 F_v G) v'^2 \\ v' & D^2 v'' + \tfrac{1}{2}(-E_u F - E_v E + 2 F_u E) u'^2 + \\ & + (-E_v F + G_u E) u' v' + \tfrac{1}{2}(G_v E + G_u F - 2 F_v F) v'^2 \end{vmatrix}.$$

Zu einer Umformung der Determinante führt eine einfache Überlegung: Wenn die Flächenkurve **geodätisch** ist, fallen ihre Hauptnormalen nach S. 472 mit den Flächennormalen zusammen, so daß dann $\sin\omega = 0$ wird. Nullsetzen der Determinante muß demnach die

Differentialgleichung der geodätischen Kurven liefern, die in Satz 4, S. 475, ebenfalls durch Nullsetzen einer Determinante dargestellt wurde. Es zeigt sich nun, daß die Determinante jenes Satzes sogar mit der obenstehenden identisch ist. Demnach können wir die letzte Formel auch so schreiben:[1]

$$(11)\quad \frac{\sin\omega}{r} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} Eu'+Fv' & \frac{1}{2}E_u u'^2+E_v u'v'+(F_v-\frac{1}{2}G_u)v'^2+Eu''+Fv'' \\ Fu'+Gv' & (F_u-\frac{1}{2}E_v)u'^2+G_u u'v'+\frac{1}{2}G_v v'^2+Fu''+Gv'' \end{vmatrix}.$$

Die beiden in (9) und (11) ausgerechneten Produkte

$$\frac{\cos\omega}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\sin\omega}{r}$$

der Krümmung der Flächenkurve mit dem Kosinus und Sinus des Winkels ω heißen die normale und die tangentiale Krümmung der Flächenkurve. Der Grund hierfür liegt in einem nicht nur für Flächenkurven, sondern allgemein für Raumkurven geltenden Satze, dessen Beweis wir hier einschalten:

Eine beliebige Raumkurve c liege vor, die weder eine Gerade noch eine Minimalkurve erster oder zweiter Ordnung sei. Durch die Tangente irgend eines Punktes P von c sei eine Ebene E gelegt, alsdann werde c senkrecht auf die Ebene projiziert. Dadurch geht eine ebene Kurve $\bar{c}$ hervor, die mit c den Punkt P und die Tangente von P gemein hat (siehe Fig. 106). Es soll jetzt untersucht werden, welche Krümmung die ebene Kurve $\bar{c}$ in P hat. Bevor dies geschieht, ist die Orientierung der ebenen Kurve $\bar{c}$ festzustellen. Ihre Tangente in P fällt mit der von c zusammen und werde daher geradeso wie diese orientiert. Die Kurve $\bar{c}$ betrachten wir nun von einer bestimmten Seite her. Dies geschieht, indem wir das Lot, das in P auf der Ebene E errichtet werden kann, in bestimmter Weise orientieren. Alsdann sei φ der Winkel des positiven Lotes mit der positiven Binormale des Punktes P der Raumkurve c. Die Ebene E betrachten wir nun von jenem positiven Lote aus. Als-

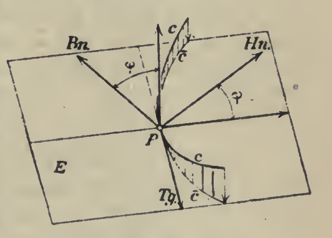


Fig. 106.

[1] Diese Formel findet sich bei Minding, „Bemerkung über die Abwickelung krummer Linien von Flächen", Journal f. d. r. u. a. Math. 6. Bd. (1830).

dann ist die positive Normale des Punktes P der ebenen Kurve $\bar{c}$ nach I S. 24 das in der Ebene durch P gelegte Lot zur Tangente von P in solchem Sinne, daß die positive Tangente, diese positive Normale und das positive Lot auf die Ebene E so zueinander orientiert sind wie die drei positiven Koordinatenachsen.

Um nun zu Formeln zu gelangen, benutzen wir als Achsenkreuz das begleitende Dreikant des Punktes P der Raumkurve c (vgl. I S. 223). Ist $1:r$ die Krümmung der Raumkurve in P und s ihre etwa von P an gemessene Bogenlänge, so beginnen die Gleichungen der Raumkurve c, entwickelt nach Potenzen von s, nach (1) in I S. 255 so:

$$x = s + \ldots, \quad y = \frac{1}{r}\frac{s^2}{1\cdot 2} + \ldots, \quad z = \ldots,$$

wenn die Punkte die Glieder in dritter und höherer Potenz von s andeuten. Um die Gleichungen der Projektion $\bar{c}$ zu finden, verwenden wir ein zweites rechtwinkliges Achsenkreuz: Die $\bar{x}$-, $\bar{y}$- und $\bar{z}$-Achsen seien die Tangente und Normale von $\bar{c}$ in P sowie das Lot zur Ebene E, alle drei positiv in den oben angegebenen Sinnen genommen. Die $\bar{x}$-Achse bildet dann mit der x-, y- und z-Achse die Winkel mit den Kosinus 1, 0, 0, die $\bar{y}$-Achse die Winkel mit den Kosinus 0, $\cos\varphi$, $-\sin\varphi$ und die $\bar{z}$-Achse die Winkel mit den Kosinus 0, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, so daß nach I (B)

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y\cos\varphi - z\sin\varphi, \quad \bar{z} = y\sin\varphi + z\cos\varphi$$

ist. Demnach hat die Kurve $\bar{c}$ in der Ebene E die Gleichungen:

$$\bar{x} = s + \ldots, \quad \bar{y} = \frac{\cos\varphi}{r}\frac{s^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

Wenn nun $1:\bar{r}$ die Krümmung von $\bar{c}$ in P, also für $s = 0$ bedeutet, ergibt sich hieraus sofort durch Benutzung des Satzes 23, I S. ~~47~~, 38 worin $t = s$ und für φ und ψ die Funktionen $\bar{x}$ und $\bar{y}$ von s zu setzen sind:

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Somit sind wir zu dem folgenden Hilfssatze gelangt:

Satz 39: Projiziert man eine nicht-geradlinige Raumkurve c, die keine Minimalkurve erster oder zweiter Ordnung ist, senkrecht auf eine Ebene E durch die Tangente eines ihrer Punkte P und ist $1:r$ die Krümmung von c in P, so hat die Projektion $\bar{c}$ der Kurve in P die Krümmung

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{\cos\varphi}{r},$$

wenn φ den Winkel bedeutet, den ein auf die Ebene E errichtetes Lot mit der positiven Binormale des Punktes P der Raumkurve c bildet. Dabei wird vorausgesetzt, daß die ebene Kurve $\bar{c}$ in dem sich durch die Projektion aus dem Fortschreitungssinne von c ergebenden Sinne durchlaufen und von derjenigen Seite der Ebene E her betrachtet wird, nach der hin jenes Lot errichtet worden ist.[1]

Nach dieser Einschaltung wenden wir uns zur oben betrachteten Flächenkurve zurück. Zunächst projizieren wir sie senkrecht auf die Ebene der Tangente und der Flächennormale eines Punktes P der Kurve. Das Lot zu dieser Ebene ist die in der Tangentenebene von P gelegene Senkrechte zur Kurventangente (siehe Fig. 107). Positiv wollen wir das Lot so annehmen, daß die positive Kurventangente, die positive Flächennormale und dies positive Lot so zueinander liegen, wie die drei orientierten Koordinatenachsen. Nun war ω der Winkel, den die Hauptnormale beschreiben muß, um in die Flächennormale überzugehen. Daher ist der Kosinus des Winkels φ der Binormale und des soeben konstruierten Lotes gleich $\cos\omega$. Satz 39 lehrt also, daß

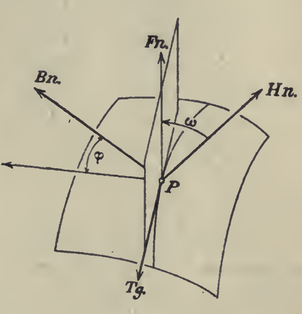


Fig. 107.

$$\frac{\cos\omega}{r}$$

die Krümmung der Kurve ist, die sich durch senkrechte Projektion der Flächenkurve auf die Ebene der Tangente und Flächennormale ergibt, und zwar für den betrachteten Punkt P. Deshalb heißt $\cos\omega : r$ die normale Krümmung der Flächenkurve.

Zweitens projizieren wir die Flächenkurve auf die Tangenten-

[1] Hierdurch wird der Unterschied berücksichtigt, der bei der Feststellung der Krümmung von ebenen Kurven und von Raumkurven besteht: Nach I S. 24 wird die positive Normale einer Kurve in der xy-Ebene unabhängig von dem Vorzeichen der Krümmung definiert, während nach I S. 251 die positive Hauptnormale einer Raumkurve diejenige ist, auf der der Krümmungsmittelpunkt liegt.

ebene des Punktes P. Das Lot zu dieser Ebene fällt mit der Flächennormale zusammen und sei deshalb gerade so wie diese orientiert (siehe Fig. 108). In diesem Falle ist der Kosinus des Winkels des Lotes, also der Flächennormale, mit der Binormale gleich $\sin\omega$. Aus Satz 39 folgt also, daß

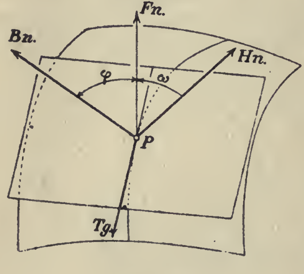


Fig. 108.

$$\frac{\sin\omega}{r}$$

die Krümmung der Kurve ist, die sich durch senkrechte Projektion der Flächenkurve auf die Tangentenebene ergibt, und zwar für den betrachteten Punkt P. Deshalb heißt $\sin\omega : r$ die tangentiale Krümmung der Flächenkurve.

Die Formeln (9) und (11) geben somit die normale und die tangentiale Krümmung der Flächenkurve an. Zur Formel (11) wurden wir von der ihr vorhergehenden Formel dadurch geführt, daß wir uns an ein auf geodätische Kurven bezügliches Ergebnis erinnerten. Man kann nun die tangentiale Krümmung auch dann, wenn die Kurve nicht geodätisch ist, in enge Beziehung zu den geodätischen Kurven bringen.

Wenn man nämlich bedenkt, daß die geodätischen Kurven auf der Fläche die naturgemäße Verallgemeinerung der geraden Linien in der Ebene sind, wird man dazu geführt, Konstruktionen, die man in der Ebene mittels gerader Linien bei einer Kurve ausgeführt hat, auf die Fläche zu übertragen, indem man die ebene Kurve durch eine Flächenkurve und die Geraden durch geodätische Kurven ersetzt. Nun haben wir in der Ebene in I S. 46 die Krümmung einer Kurve als Quotienten aus dem Kontingenzwinkel $d\tau$ und dem Bogenelement ds definiert. Der Kontingenzwinkel war dabei der Winkel der Tangenten in den Endpunkten P und P_1 des Bogenelements ds. Übertragen wir dies auf die Fläche,

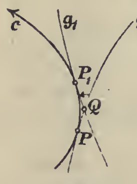


Fig. 109.

so verfahren wir so: In zwei unendlich benachbarten Punkten P und P_1 der Flächenkurve c konstruieren wir die berührenden geodätischen Kurven g und g_1 (siehe Fig. 109). Sie werden sich in einem Punkte Q unter einem unendlich kleinen Winkel $d\tau$, dem geo-

dätischen Kontingenzwinkel[1] des Bogenelements PP_1 oder ds der Kurve c, schneiden. Alsdann ist der Quotient

$$\frac{d\tau}{ds}$$

die Übertragung des Krümmungsmaßes von der ebenen Kurve auf die Flächenkurve. Wird das Bogenelement ds in dem auf der Kurve c festgesetzten Sinne durchlaufen, so ist noch die Art der Messung des Winkels $d\tau$ festzustellen. Sie soll im positiven Sinne auf der Fläche stattfinden, d. h. in demjenigen Drehsinne, der, von der positiven Flächennormale aus betrachtet, derselbe ist wie der positive Drehsinn in der xy-Ebene, von der positiven z-Achse aus betrachtet. Der Quotient $d\tau : ds$ heißt dann die geodätische Krümmung[2] der Flächenkurve an der Stelle P.

Um sie zu berechnen, können wir uns eines besonderen Parametersystems bedienen, da ja der Begriff dieses Quotienten von der Parameterdarstellung unabhängig ist. Wir benutzen geodätische Parameter u, v, indem wir nämlich diejenigen geodätischen Kurven als Parameterlinien (v) einführen, die die gegebene Kurve c senkrecht schneiden, so daß die Kurven (u) die orthogonalen Trajektorien dieser geodätischen Kurven sind und insbesondere die Kurve c zu ihnen gehört (vgl. S. 506). Die allgemeine Kurve (u) können wir dann also als die Kurve c betrachten. P habe die Parameter u, v; dann hat P_1 die Parameter $u, v + dv$ (siehe Fig. 110). Wir setzen voraus, daß PP_1 den positiven Fortschreitungssinn auf der Kurve (v) habe.

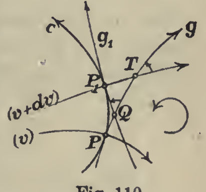


Fig. 110.

Das Quadrat des Bogenelements der Fläche ist jetzt:

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2,$$

so daß das Bogenelement ds oder PP_1 von c den Wert hat:

$$(12) \qquad ds = \sqrt{G}\,dv.$$

---

[1] Die Bezeichnung rührt von Liouville her: „Sur la théorie générale des surfaces", Journ. de Math. p. et appl., 16. Bd. (1851).

[2] Nach einem Vorschlage von Liouville, vgl. den Schluß seiner Note I: „Sur les courbes à double courbure" zu Monges „Application" (1850). Siehe auch Bonnet in seinem „Mémoire sur la théorie générale des surfaces", Journal de l'École polyt. cah. 32 (1848). Liouville selbst hat die geodätische Krümmung in der schon in der Anm. zu S. 488 erwähnten Note III zu Monges „Application" genauer untersucht.

Die geodätische Kurve g, die c in P berührt, durchlaufen wir in entsprechendem Sinne wie c. Für ihren Winkel α mit der Kurve (v) gilt dann nach Satz 21, S. 509, die Formel:

$$d\alpha = -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} dv.$$

Dabei ist α an der Stelle P gleich $\frac{1}{2}\pi$, so daß also die Kurve g die Kurve $(v + dv)$ durch P_1 in einem Punkte T so schneidet, daß dort der Winkel gleich

$$\frac{1}{2}\pi - \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} dv$$

ist. Das unendlich kleine Dreieck TP_1Q ist in P_1 rechtwinklig und hat in Q den Winkel $d\tau$. Da es als eben aufgefaßt werden kann, wenn man von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung absieht, ist daher

$$d\tau = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} dv + \ldots \tag{13}$$

wo die Punkte unendlich kleine Glieder andeuten, die mit höheren Potenzen von dv behaftet sind. Hiernach und nach (12) hat die geodätische Krümmung in P den Wert

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{G_u}{2G} \tag{14}$$

Andererseits kann man, da jetzt $E = 1$, $F = 0$, $D = \sqrt{G}$ ist, nach (11) die tangentiale Krümmung der Kurve c in P leicht berechnen, denn für die Kurve c oder (u) ist $u' = u'' = 0$ und nach (12):

$$v' = \frac{dv}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}},$$

so daß kommt:

$$\frac{\sin\omega}{r} = \frac{G_u}{2G}.$$

Dies aber ist der Wert (14). Somit folgt:

Satz 40: Die tangentiale Krümmung einer Flächenkurve ist dasselbe wie ihre geodätische Krümmung.

Weil die geodätische Krümmung auf der Fläche die naturgemäße Verallgemeinerung der Krümmung in der Ebene ist, gibt der Kreis in der Ebene als Kurve konstanter Krümmung (vgl. Satz 29, I S. 51) Anlaß zu einer naturgemäßen Verallgemeinerung; er führt zu den Kurven konstanter geodätischer Krümmung

auf der Fläche. Man kann sie geodätische Kreise nennen[1], muß aber dabei beachten, daß der Kreisbegriff auch eine andere naturgemäße Verallgemeinerung zuläßt, nämlich zu den Kurven konstanter geodätischer Entfernung auf der Fläche führt, die deshalb auch geodätische Kreise genannt worden sind, wie wir auf S. 510 bemerkt haben. Daß sich beide Begriffe im allgemeinen nicht decken, ist leicht zu sehen. Ist nämlich die Fläche aut geodätische Polarkoordinaten u, v bezogen, so haben die Kurven (u) konstante geodätische Entfernung vom Pol A. Aber nach (14) wird ihre geodätische Krümmung nur für $G_{uu} G - G_u^2 = 0$, also bei Flächen konstanter Krümmung, konstant.

Ein wesentlicher Unterschied besteht zwischen der normalen und der tangentialen oder geodätischen Krümmung: Die normale Krümmung drückt sich nach (9) mittels der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung aus. Dagegen enthält die Formel (11) für die geodätische Krümmung nur die Fundamentalgrößen erster Ordnung nebst ihren Ableitungen. Deshalb gilt für die geodätische Krümmung ein wichtiger Satz: Wir betrachten zwei aufeinander verbiegbare Flächen. Nach Satz 7, S. 353, gibt es auf beiden Flächen Parameter u und v derart, daß entsprechende Punkte zu demselben Paare von Parameterwerten gehören und die Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G auf beiden Flächen übereinstimmen. Einer Kurve der einen Fläche mit der Bogenlänge s, bei der also u und v Funktionen von s sind, die der Bedingung

$$E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2 = 1$$

Genüge leisten, entspricht bei der Verbiegung eine Kurve der anderen Fläche mit derselben Bogenlänge s, und u', u'', v', v'' sind bei beiden Kurven dieselben Funktionen von s. Somit folgt aus (11):

Satz 41:[2] Bei der Verbiegung einer Fläche bleibt die geodätische Krümmung jeder Flächenkurve ungeändert.

Insbesondere gehen Kurven konstanter geodätischer Krümmung wieder in Kurven konstanter geodätischer Krümmung über. Ein speziellerer Fall ist der der geodätischen Kurven, die nach S. 543 die

[1] So tat es Lie in der Abhandlung: „Bestimmung des Bogenelements aller Flächen, deren geodätische Kreise eine infinitesimale Berührungstransformation gestatten", Archiv for Math. og Naturvidenskab 9. Bd. (1884), in der insbesondere für die geodätischen Kreise auf Flächen konstanter Krümmung wichtige Sätze aufgestellt wurden.

[2] In Mindings oben, S. 543, genannter Arbeit zwar nicht ausdrücklich formuliert, aber doch im wesentlichen schon enthalten.

Kurven von der geodätischen Krümmung Null sind (vgl. Satz 11, S. 484). Daß die Kurven konstanter geodätischer Entfernung von einer Stelle (vgl. S. 510) bei Verbiegung in ebensolche Kurven übergehen, leuchtet, nebenbei bemerkt, sofort ein. Daß die geodätische Krümmung bei Verbiegung ungeändert bleibt, geht auch aus ihrer Definition auf der Fläche durch den Quotienten $d\tau : ds$ hervor, wenn man bedenkt, daß die Verbiegung eine in den kleinsten Teilen kongruente Abbildung ist (nach S. 352).

Nachdem wir in (9) und (11) die normale und die geodätische Krümmung

$$\frac{\cos\omega}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\sin\omega}{r}$$

berechnet haben, finden wir daraus auch leicht $\operatorname{tg}\omega$ und die Krümmung $1:r$ der Flächenkurve. Es kommt:

$$(15)\quad \operatorname{tg}\omega = \frac{\begin{vmatrix} Eu' + Fv' & \frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + (F_v - \frac{1}{2}G_u)v'^2 + Eu'' + Fv'' \\ Fu' + Gv' & (F_u - \frac{1}{2}E_v)u'^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2 + Fu'' + Gv'' \end{vmatrix}}{D(Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2)}$$

und:

$$(16)\quad \left(\frac{1}{r}\right)^2 = (Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2)^2 +$$
$$+ \frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} Eu' + Fv' & \frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + (F_v - \frac{1}{2}G_u)v'^2 + Eu'' + Fv'' \\ Fu' + Gv' & (F_u - \frac{1}{2}E_v)u'^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2 + Fu'' + Gv'' \end{vmatrix}^2.$$

Im reellen Falle gibt die positive Quadratwurzel hieraus den Wert der Krümmung (vgl. I S. 231).

Schließlich wollen wir noch die Torsion $1:\varrho$ der Flächenkurve berechnen. Sie tritt auf, wenn wir die zweite Formel (8):

$$\sin\omega = \mathbf{S}X\lambda$$

nach der Bogenlänge s differenzieren, weil dann nach III (C) kommt:

$$\omega'\cos\omega = \mathbf{S}X'\lambda + \frac{1}{\varrho}\mathbf{S}Xl,$$

woraus, da $\mathbf{S}Xl = \cos\omega$ nach (8) ist, durch Auflösung der Gleichung nach $1:\varrho$ folgt:

$$(17)\quad \frac{1}{\varrho} = \omega' - \frac{\mathbf{S}X'\lambda}{\cos\omega}.$$

Nun ist ω durch (9) und (11) bestimmt, und (15) gibt sofort ω'. Es erübrigt also nur noch die Berechnung der Summe $\mathbf{S}X'\lambda$. Diese

finden wir so: Wenn wir aus III (B) die Werte von λ, μ, ν entnehmen, kommt:

$$\mathbf{S}\, X'\lambda = r \begin{vmatrix} X' & x' & x'' \\ Y' & y' & y'' \\ Z' & z' & z'' \end{vmatrix}$$

Zur Vereinfachung multiplizieren wir, was ja oft nützlich ist, diese Gleichung mit D, indem wir rechts statt D die in XI (L) angegebene Determinante benutzen. Es ergibt sich dann zunächst:

$$\mathbf{S}\, X'\lambda = \frac{r}{D} \begin{vmatrix} X' & x' & x'' \\ Y' & y' & y'' \\ Z' & z' & z'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix}.$$

Multiplizieren wir Reihe mit Reihe, so geht eine Determinante hervor, in der in einer Reihe die Elemente

$$\mathbf{S}\, X'X, \quad \mathbf{S}\, x'X$$

auftreten, die wegen XI (H) und XI (I) gleich Null sind. Daher kommt:

$$\mathbf{S}\, X'\lambda = \frac{r\,\mathbf{S}\, x''X}{D} \begin{vmatrix} \mathbf{S}\, X'x_u & \mathbf{S}\, X'x_v \\ \mathbf{S}\, x'x_u & \mathbf{S}\, x'x_v \end{vmatrix}.$$

Nach XII (C) ist aber wegen $X' = X_u u' + X_v v'$:

$$\mathbf{S}\, X'x_u = -Lu' - Mv', \quad \mathbf{S}\, X'x_v = -Mu' - Nv'$$

und nach XI (A) wegen $x' = x_u u' + x_v v'$:

$$\mathbf{S}\, x'x_u = Eu' + Fv', \quad \mathbf{S}\, x'x_v = Fu' + Gv',$$

endlich noch nach III (B) und (8):

$$r\,\mathbf{S}\, x''X = \mathbf{S}\, Xl = \cos\omega,$$

so daß die Formel hervorgeht:

$$\mathbf{S}\, X'\lambda = -\frac{\cos\omega}{D} \begin{vmatrix} Lu' + Mv' & Mu' + Nv' \\ Eu' + Fv' & Fu' + Gv' \end{vmatrix}.$$

Erinnern wir uns an XII (U) und XII (V), so finden wir:

$$\mathbf{S}\, X'\lambda = \frac{\cos\omega}{D} \begin{vmatrix} v'^2 & E & L \\ -u'v' & F & M \\ u'^2 & G & N \end{vmatrix}.$$

Setzen wir diesen Wert in (17) ein, so ergibt sich für die Torsion der Wert:

$$(18)\qquad \frac{1}{\varrho} = \omega' - \frac{1}{D}\begin{vmatrix} v'^2 & E & L \\ -u'v' & F & M \\ u'^2 & G & N \end{vmatrix},$$

worin wir den aus (15) durch Differentiation nach s hervorgehenden Wert von ω' einsetzen können.

Einige einfache Schlüsse knüpfen sich hier an:

Ist die Flächenkurve eine Krümmungskurve, so liegt zunächst ein Irrtum nahe, auf den hingewiesen werden muß: Der zu einem Punkte der Kurve gehörige Hauptkrümmungskreis der Fläche ist durchaus nicht immer der Krümmungskreis der Krümmungskurve. Er wäre es nur dann, wenn die Flächennormale die Hauptnormale wäre, also wenn die Krümmungskurve eine geodätische Kurve wäre. Nach XII (U) ist für die Krümmungskurven die in (18) auftretende Determinante gleich Null, so daß bei ihnen die Torsion den Wert ω' hat.

Für eine geodätische Kurve ist die normale Krümmung die Krümmung der Kurve selbst, da dann die Hauptnormale zugleich Flächennormale ist, während die geodätische Krümmung, wie gesagt, gleich Null ist.

Eine Flächenkurve ist nach S. 232 Haupttangentenkurve, wenn ihre Hauptnormalen Tangenten der Fläche sind, so daß dann $\cos\omega = 0$ wird. Daraus folgt:

Satz 42: Die nicht geradlinigen Haupttangentenkurven einer Fläcne, die weder Minimalkurven erster noch solche zweiter Ordnung sind, kann man als die Flächenkurven definieren, deren normale Krümmung gleich Null ist.

Da hier auch $\omega' = 0$ wird, gibt (18) für diese Haupttangentenkurven:

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} v'^2 & E & L \\ -u'v' & F & M \\ u'^2 & G & N \end{vmatrix}.$$

Auf anderem Wege wurde diese Torsion auf S. 237 bestimmt.

Schließlich wollen wir noch das Kennzeichen für solche Flächenkurven aufstellen, die Minimalkurven zweiter Ordnung sind. Derartige Kurven haben zwar Richtungskosinus α, β, γ für ihre Tangenten, aber von Richtungskosinus l, m, n der Binormalen kann hier nicht die Rede sein. Da diese Kurven nicht geradlinig sind

(vgl. I S. 242), dürfen für sie nicht alle drei Richtungskosinus α, β, γ oder

$$x_u u' + x_v v', \quad y_u u' + y_v v', \quad z_u u' + z_v v'$$

konstant sein, vgl. (5). Außerdem muß für sie nach I S. 242

$$\mathsf{S}(y'z'' - z'y'')^2 = 0$$

oder also nach (11), I S. 194

$$\mathsf{S}\,x'^2\,\mathsf{S}\,x''^2 - (\mathsf{S}\,x'x'')^2 = 0$$

sein. Nun ist aber $\mathsf{S}\,x'^2 = \mathsf{S}\,\alpha^2 = 1$, also $\mathsf{S}\,x'x'' = 0$. Daher ist zu fordern:

$$\mathsf{S}\,x''^2 = 0.$$

Der Wert von x'' steht in (5). Danach wird die Bedingung diese:

$$\mathsf{S}(x_{uu}u'^2 + 2x_{uv}u'v' + x_{vv}v'^2 + x_u u'' + x_v v'')^2 = 0.$$

Man kann sie mit Hilfe der Formeln XVI (D) und (E) für

$$\mathsf{S}\,x_{uu}^2, \quad \mathsf{S}\,x_{uv}^2, \quad \mathsf{S}\,x_{vv}^2, \quad \mathsf{S}\,x_{uu}x_{uv}, \quad \mathsf{S}\,x_{uu}x_{vv}, \quad \mathsf{S}\,x_{uv}x_{vv},$$

mit Hilfe der Formeln XVI (C) für

$$\mathsf{S}\,x_{uu}x_u, \quad \mathsf{S}\,x_{uu}x_v, \quad \mathsf{S}\,x_{uv}x_u, \quad \mathsf{S}\,x_{uv}x_v, \quad \mathsf{S}\,x_{vv}x_u, \quad \mathsf{S}\,x_{vv}x_v$$

und mit Hilfe der Formeln

$$\mathsf{S}\,x_u^2 = E, \quad \mathsf{S}\,x_u x_v = F, \quad \mathsf{S}\,x_v^2 = G$$

nach XI (A) in u', v', u'', v'', in den Fundamentalgrößen E, F, G, L, M, N und in den partiellen Ableitungen erster Ordnung von E, F, G ausdrücken. Aber die Berechnung wäre sehr umständlich. Bequemer ist folgender Weg: Die Gleichung III (D) für die Krümmung $1:r$ einer Raumkurve lautet so:

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\mathsf{S}\,x''^2},$$

wenn die Striche die Differentiation nach der Bogenlänge andeuten. Bei einer Minimalkurve zweiter Ordnung kann man nun zwar nicht von der Krümmung sprechen, aber für sie ist $\mathsf{S}\,x''^2 = 0$. Daraus schließen wir nach der vorstehenden Formel, daß die Bedingung $\mathsf{S}\,x''^2 = 0$ durch Nullsetzen desjenigen Wertes hervorgehen wird, den (16) für das Quadrat der Krümmung angibt. Also gilt der

Satz 43: Eine Flächenkurve, bei der u und v Funktionen der Bogenlänge s sind, also

$$Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = 1$$

ist, wenn der Strich der Differentiation nach s andeutet, ist dann und nur dann eine Minimalkurve zweiter Ordnung, wenn einerseits die drei Summen

$$x_u u' + x_v v', \quad y_u u' + y_v v', \quad z_u u' + z_v v'$$

nicht sämtlich konstant sind und anderseits der Ausdruck

$$(Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2)^2$$
$$+ \frac{1}{D^2} \begin{vmatrix} Eu' + Fv' & \frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + (F_v - \frac{1}{2}G_u)v'^2 + Eu'' + Fv'' \\ Fu' + Gv' & (F_u - \frac{1}{2}E_v)u'^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2 + Fu'' + Gv'' \end{vmatrix}^2$$

den Wert Null hat. —

In der Tafel XXI sind die Formeln für geodätische Kurven, in der Tafel XXII die für Zentraflächen und in der Tafel XXIII die für beliebige Flächenkurven zusammengestellt. Die letzte Tafel XXIV soll den Übergang zu anderen Lehrbüchern der Flächentheorie erleichtern; man findet darin diejenigen Bezeichnungen, die in den wichtigeren Lehrbüchern anstelle der von uns angewandten benutzt werden.

Anhang.

(Fortsetzung des Anhangs zum ersten Band.)

Tafel XI.

Formeln für die Fundamentalgrößen erster Ordnung und für die Richtungskosinus der Normale.

x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten des Flächenpunktes.
u, v seine Parameter.
ds das Bogenelement der Fläche.
E, F, G die Fundamentalgrößen erster Ordnung.
X, Y, Z die Richtungskosinus der Flächennormale.
ω der Winkel der Parameterlinien.

(A) (S. 15)[1] $E = \mathsf{S}\, x_u^2, \quad F = \mathsf{S}\, x_u x_v, \quad G = \mathsf{S}\, x_v^2.$

(B) (S. 15) $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$

(C) (S. 17) $D = \sqrt{EG - F^2} \neq 0$ (im reellen Falle positiv).

Gleichung der Tangentenebene in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$:

(D) (S. 21)
$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x} - x & x_u & x_v \\ \mathfrak{y} - y & y_u & y_v \\ \mathfrak{z} - z & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0$$

oder:

(E) (S. 32) $X(\mathfrak{x} - x) + Y(\mathfrak{y} - y) + Z(\mathfrak{z} - z) = 0.$

(F) (S. 32) $X = \frac{y_u z_v - z_u y_v}{D}, \quad Y = \frac{z_u x_v - x_u z_v}{D}, \quad Z = \frac{x_u y_v - y_u x_v}{D}.$

(G) (S. 17) $D^2 = \mathsf{S}\,(y_u z_v - z_u y_v)^2.$

---

[1] Bezeichnung der Seite, auf der die Formeln zum ersten Male vorkommen.

(H) (S. 32) $\quad \mathbf{S}\, X^2 = 1, \quad \mathbf{S}\, X X_u = 0, \quad \mathbf{S}\, X X_v = 0.$

(I) (S. 32) $\quad \mathbf{S}\, X x_u = 0, \quad \mathbf{S}\, X x_v = 0.$

(K) (S. 32)
$$\begin{cases} Y z_u - Z y_u = \dfrac{E x_v - F x_u}{D}, & Y z_v - Z y_v = \dfrac{F x_v - G x_u}{D}, \\ Z x_u - X z_u = \dfrac{E y_v - F y_u}{D}, & Z x_v - X z_v = \dfrac{F y_v - G y_u}{D}, \\ X y_u - Y x_u = \dfrac{E z_v - F z_u}{D}, & X y_v - Y x_v = \dfrac{F z_v - G z_u}{D}. \end{cases}$$

(L) (S. 32)
$$\begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix} = D.$$

(M) (S. 36) $\quad \sin\omega = \dfrac{D}{\sqrt{E}\sqrt{G}}, \quad \cos\omega = \dfrac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}$ (Wurzeln im reellen Falle positiv).

Der Kosinus des Winkels α der zu $k = dv:du$ und $\varkappa = dv:du$ gehörigen Fortschreitungsrichtungen ist:

(N) (S. 39)
$$\cos\alpha = \frac{E + F(k + \varkappa) + G k \varkappa}{\sqrt{E + 2 F k + G k^2}\sqrt{E + 2 F \varkappa + G \varkappa^2}}$$

Differentialgleichung der Minimalkurven:

(O) (S. 46) $\quad E du^2 + 2 F du\, dv + G dv^2 = 0$

oder zerlegt, falls $E \neq 0$ ist:

(P) (S. 77) $\quad [E du + (F + iD) dv]\,[E du + (F - iD) dv] = 0.$

Tafel XII.

Formeln für die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung und für die Krümmung.

L, M, N die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung.

k_1, k_2 die Werte von $dv:du$ für die beiden Hauptkrümmungsrichtungen.

$\varkappa_1$, $\varkappa_2$ die Werte von $dv:du$ für die beiden Haupttangentenrichtungen.

R der Krümmungsradius des zu irgend einer Fortschreitungsrichtung ($dv:du$) oder (k) gehörigen Normalschnittes.

φ der Winkel seiner Ebene mit der Normalebene durch die erste Hauptkrümmungsrichtung.

R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien.

K das Krümmungsmaß.
H die mittlere Krümmung.

(*A*) (S. 122) $L = \mathbf{S}\, X x_{uu}, \quad M = \mathbf{S}\, X x_{uv}, \quad N = \mathbf{S}\, X x_{vv}.$

(*B*) (S. 122) $$L = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{uu} & x_u & x_v \\ y_{uu} & y_u & y_v \\ z_{uu} & z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad M = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad N = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{vv} & x_u & x_v \\ y_{vv} & y_u & y_v \\ z_{vv} & z_u & z_v \end{vmatrix}.$$

(*C*) (S. 122) $L = -\mathbf{S}\, X_u x_u, \quad M = -\mathbf{S}\, X_u x_v = -\mathbf{S}\, X_v x_u, \quad N = -\mathbf{S}\, X_v x_v.$

(*D*) (S. 122) $$\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2}.$$

(*E*) (S. 132) $$\left.\begin{cases} (EM - FL) - (GL - EN)k + (FN - GM)k^2 = 0 \\ \text{oder:} \\ \begin{vmatrix} k^2 & E & L \\ -k & F & M \\ 1 & G & N \end{vmatrix} = 0 \end{cases}\right\} \text{für } k = k_1, k_2.$$

(*F*) (S. 133) $$k_1 + k_2 = \frac{GL - EN}{FN - GM}, \quad k_1 k_2 = \frac{EM - FL}{FN - GM}.$$

(*G*) (S. 133) $$\begin{cases} E + F(k_1 + k_2) + G k_1 k_2 = 0, \\ L + M(k_1 + k_2) + N k_1 k_2 = 0. \end{cases}$$

(*H*) (S. 134) $$k_1 = -\frac{MR_1 - F}{NR_1 - G}, \quad k_2 = -\frac{MR_2 - F}{NR_2 - G}.$$

(*I*) (S. 134) $$(LN - M^2)R^2 - (EN - 2FM + GL)R + (EG - F^2) = 0$$
für $R = R_1, R_2$.

(*K*) (S. 135) $$\begin{cases} K = \dfrac{1}{R_1}\,\dfrac{1}{R_2} = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = \dfrac{LN - M^2}{D^2}, \\ H = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} = \dfrac{EN - 2FM + GL}{D^2}. \end{cases}$$

(*L*) (S. 146) $L + 2M\varkappa + N\varkappa^2 = 0$ für $\varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2$.

(*M*) (S. 155) $$\begin{cases} LN - M^2 = D\begin{vmatrix} X & X_u & X_v \\ Y & Y_u & Y_v \\ Z & Z_u & Z_v \end{vmatrix} = D^2 K. \\ LN - M^2 = D\dfrac{Y_u Z_v - Z_u Y_v}{X} = D\dfrac{Z_u X_v - X_u Z_v}{Y} = D\dfrac{X_u Y_v - Y_u X_v}{Z}. \end{cases}$$

Für die Winkel α der Haupttangenten mit der ersten Hauptkrümmungsrichtung ist:

(*N*) (S. 161) $$\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}}.$$

Gleichung der Schnittkurve der Fläche mit der zur Tangentenebene benachbarten parallelen Ebene im Abstande ε:

(*O*) (S. 169) $$L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2 = 2\,\varepsilon.$$

(*P*) (S. 160) $$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}.$$

Sind α und β die Winkel konjugierter Richtungen (k) und ($\varkappa$) mit der ersten Hauptkrümmungsrichtung, so ist:

(S. 191) (*Q*) (S. 193)
$$\begin{cases} L + M(k+\varkappa) + N k \varkappa = 0, \\ \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = -\dfrac{R_2}{R_1}. \end{cases}$$

(*R*) (S. 197)
$$\begin{cases} X_u = \dfrac{1}{D^2}[(FM - GL)x_u + (FL - EM)x_v], \\ Y_u = \dfrac{1}{D^2}[(FM - GL)y_u + (FL - EM)y_v], \\ Z_u = \dfrac{1}{D^2}[(FM - GL)z_u + (FL - EM)z_v], \\ X_v = \dfrac{1}{D^2}[(FN - GM)x_u + (FM - EN)x_v], \\ Y_v = \dfrac{1}{D^2}[(FN - GM)y_u + (FM - EN)y_v], \\ Z_v = \dfrac{1}{D^2}[(FN - GM)z_u + (FM - EN)z_v]. \end{cases}$$

(*S*) (S. 197)
$$\begin{cases} \mathsf{S}\,X_u^2 = \dfrac{1}{D^2}[GL^2 - 2\,FLM + EM^2] = HL - KE, \\ \mathsf{S}\,X_u X_v = \dfrac{1}{D^2}[GLM + EMN - FM^2 - FLN] = HM - KF, \\ \mathsf{S}\,X_v^2 = \dfrac{1}{D^2}[EN^2 - 2\,FMN + GM^2] = HN - KG. \end{cases}$$

(*T*) (S. 199)
$$\begin{cases} \mathsf{S}\,dX\,dx = -(L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2), \\ \mathsf{S}\,dX^2 = H(L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2) - \\ \qquad - K(E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2). \end{cases}$$

Differentialgleichung der Krümmungskurven:

(*U*) (S. 211)
$$\begin{vmatrix} dv^2 & E & L \\ -du\,dv & F & M \\ du^2 & G & N \end{vmatrix} = 0$$

oder:

(V) (S. 213) $$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & L\,du + M\,dv \\ F\,du + G\,dv & M\,du + N\,dv \end{vmatrix} = 0$$

oder:

(W) (S. 214) $$\begin{vmatrix} dx & X & dX \\ dy & Y & dY \\ dz & Z & dZ \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dX} = \frac{dy}{dY} = \frac{dz}{dZ}.$$

Differentialgleichung der Haupttangentenkurven:

(X) (S. 232) $$L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0.$$

Tafel XIII.

Formeln für die Darstellung $z = f(x, y)$ der Fläche.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

(A) (S. 15) $$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2.$$

(B) (S. 18) $$D = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$ (im reellen Falle positiv).

(C) $$X = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad Y = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

(D) (S. 124) $$L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

(E) (S. 125) $$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{(1+p^2)\,dx^2 + 2\,p\,q\,dx\,dy + (1+q^2)\,dy^2}.$$

(F) $$\begin{cases} K = \dfrac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \\ H = \dfrac{(1+p^2)\,t - 2\,p\,q\,s + (1+q^2)\,r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}^{\,3}}. \end{cases}$$

Differentialgleichung der Minimalkurven:

(G) (S. 47) $$(1 + p^2)\,dx^2 + 2\,p\,q\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2 = 0.$$

Differentialgleichung der Krümmungskurven:

(H) (S. 221) $$\begin{vmatrix} dy^2 & 1 + p^2 & r \\ -dx\,dy & pq & s \\ dx^2 & 1 + q^2 & t \end{vmatrix} = 0$$

oder:

(*I*) (S. 222) $$dp(dy + q\,dz) = dq\,(dx + p\,dz).$$

Differentialgleichung der Haupttangentenkurven:

(*K*) $$r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

Tafel XIV.

Sphärische Abbildung der Fläche.

Die lateinischen Buchstaben beziehen sich auf die Fläche, die deutschen auf die Bildkugel.

(*A*) (S. 256) $$\mathfrak{x} = X, \quad \mathfrak{y} = Y, \quad \mathfrak{z} = Z.$$

(*B*) S. 257) $$d\mathfrak{s}^2 = \mathsf{S}\,dX^2 = \mathfrak{E}\,du^2 + 2\,\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{G}\,dv^2.$$

(*C*) (S. 257, 258) $$\begin{cases} \mathfrak{E} = \mathsf{S}\,X_u^{\,2} = HL - KE = \frac{1}{D^2}[EM^2 - 2\,FLM + GL^2], \\ \mathfrak{F} = \mathsf{S}\,X_u X_v = HM - KF = \frac{1}{D^2}[EMN - F(LN + M^2) + GLM], \\ \mathfrak{G} = \mathsf{S}\,X_v^{\,2} = HN - KG = \frac{1}{D^2}[EN^2 - 2\,FMN + GM^2]. \end{cases}$$

(*D*) (S. 261) $$\mathfrak{D} = \sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2} = \varepsilon KD,$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist und zwar im reellen Falle, je nachdem $K \gtreqless 0$ ist.

(*E*) (S. 262) $$\mathfrak{X} = \varepsilon X, \quad \mathfrak{Y} = \varepsilon Y, \quad \mathfrak{Z} = \varepsilon Z.$$

(*F*) (S. 262) $$\mathfrak{L} = -\varepsilon\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{M} = -\varepsilon\mathfrak{F}, \quad \mathfrak{N} = -\varepsilon\mathfrak{G}.$$

Tafel XV.

Parallelflächen.

Die überstrichenen Buchstaben beziehen sich auf die Elemente der Parallelfläche einer gegebenen Fläche (x, y, z) im Abstande a.

(*A*) (S. 301) $$\bar{x} = x + Xa, \quad \bar{y} = y + Ya, \quad \bar{z} = z + Za.$$

(*B*) (S. 302) $$\begin{cases} \bar{E} = (1 - a^2K)E - a(2 - aH)L, \\ \bar{F} = (1 - a^2K)F - a(2 - aH)M, \\ \bar{G} = (1 - a^2K)G - a(2 - aH)N. \end{cases}$$

$$(C)\ (\text{S. }303)\quad \begin{cases} \bar{L} = a\,K\,E + (1 - a\,H)\,L, \\ \bar{M} = a\,K\,F + (1 - a\,H)\,M, \\ \bar{N} = a\,K\,G + (1 - a\,H)\,N. \end{cases}$$

$$(D)\ (\text{S. }302)\quad \bar{D} = (1 - a\,H + a^2 K)\,D.$$

$$(E)\ (\text{S. }303)\quad \begin{cases} \bar{K} = \dfrac{K}{1 - a\,H + a^2 K}, \\ \bar{H} = \dfrac{H - 2\,a\,K}{1 - a\,H + a^2 K}. \end{cases}$$

Tafel XVI.

Die Ableitungen zweiter Ordnung der rechtwinkligen Koordinaten der Fläche.

$$(A)\ (\text{S. }332)\quad \begin{cases} x_{uu} = \dfrac{L}{D}(y_u z_v - z_u y_v) + \dfrac{1}{2\,D^2}(E_u G + E_v F - 2\,F_u F)\,x_u + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2\,D^2}(-E_u F - E_v E + 2\,F_u E)\,x_v, \\ x_{uv} = \dfrac{M}{D}(y_u z_v - z_u y_v) + \dfrac{1}{2\,D^2}(E_v G - G_u F)\,x_u + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2\,D^2}(-E_v F + G_u E)\,x_v, \\ x_{vv} = \dfrac{N}{D}(y_u z_v - z_u y_v) + \dfrac{1}{2\,D^2}(-G_v F - G_u G + 2 F_v G)\,x_u + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2\,D^2}(G_v E + G_u F - 2\,F_v F)\,x_v \end{cases}$$

oder:

$$(B)\ (\text{S. }336)\quad \begin{cases} x_{uu} = L\,X + \dfrac{1}{2\,D^2}\,[(E_u G + E_v F - 2\,F_u F)\,x_u + \\ \qquad\qquad + (-E_u F - E_v E + 2\,F_u E)\,x_v], \\ x_{uv} = M\,X + \dfrac{1}{2\,D^2}\,[(E_v G - G_u F)\,x_u + (-E_v F + G_u E)\,x_v], \\ x_{vv} = N\,X + \dfrac{1}{2\,D^2}\,[(-G_v F - G_u G + 2\,F_v G)\,x_u + \\ \qquad\qquad + (G_v E + G_u F - 2\,F_v F)\,x_v]. \end{cases}$$

Die Formeln (A) und (B) gelten auch, wenn x und X durch y und Y oder durch z und Z ersetzt werden.

$$(C)\ (\text{S. }330)\quad \begin{cases} \mathsf{S}\,x_{uu} x_u = \tfrac{1}{2} E_u, & \mathsf{S}\,x_{uv} x_u = \tfrac{1}{2} E_v, \quad \mathsf{S}\,x_{vv} x_u = F_v - \tfrac{1}{2} G_u, \\ \mathsf{S}\,x_{uu} x_v = F_u - \tfrac{1}{2} E_v, & \mathsf{S}\,x_{uv} x_v = \tfrac{1}{2} G_u, \quad \mathsf{S}\,x_{vv} x_v = \tfrac{1}{2} G_v. \end{cases}$$

(*D*) (S. 388)

$$\left\{\begin{aligned}
\mathsf{S}\, x_{uu}^2 &= L^2 + \frac{1}{4D^2}(E_u^2 G + 2E_u E_v F + E_v^2 E - \\
&\qquad - 4E_u F_u F - 4E_v F_u E + 4F_u^2 E), \\
\mathsf{S}\, x_{uv}^2 &= M^2 + \frac{1}{4D^2}(E_v^2 G - 2E_v G_u F + G_u^2 E), \\
\mathsf{S}\, x_{vv}^2 &= N^2 + \frac{1}{4D^2}(G_u^2 G + 2G_u G_v F + G_v^2 E - \\
&\qquad - 4G_u F_v G - 4G_v F_v F + 4F_v^2 G).
\end{aligned}\right.$$

(*E*) (S. 389)

$$\left\{\begin{aligned}
\mathsf{S}\, x_{uu} x_{uv} &= LM + \frac{1}{4D^2}(E_u E_v G + E_v^2 F - 2E_v F_u F - \\
&\qquad - E_u G_u F - E_v G_u E + 2F_u G_u E), \\
\mathsf{S}\, x_{uu} x_{vv} &= LN + \frac{1}{4D^2}(-E_u G_v F - E_u G_u G + 2E_u F_v G - \\
&\qquad - E_v G_v E - E_v G_u F + 2E_v F_v F + \\
&\qquad + 2F_u G_v E + 2F_u G_u F - 4F_u F_v F), \\
\mathsf{S}\, x_{uv} x_{vv} &= MN + \frac{1}{4D^2}(G_u^2 F + G_u G_v E - 2G_u F_v F - \\
&\qquad - G_u E_v G - G_v E_v F + 2E_v F_v G).
\end{aligned}\right.$$

Tafel XVII.

Die drei Fundamentalgleichungen der Fläche.

(*A*) (S. 338)

$$\left\{\begin{aligned}
L_v - M_u = {} & \frac{1}{2D^2}[E_v G - G_u F]L - \\
& - \frac{1}{2D^2}[E_u G - G_u E + 2(E_v - F_u)F]M - \\
& - \frac{1}{2D^2}[-E_u F - E_v E + 2F_u E]N.
\end{aligned}\right.$$

(*B*) (S. 338)

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{LN - M^2}{D^2} = K = {} & \frac{1}{2D^2}(2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu}) + \\
& + \frac{E}{4D^4}(G_u^2 + E_v G_v - 2G_v F_u) + \\
& + \frac{G}{4D^4}(E_v^2 + E_u G_u - 2E_u F_v) + \\
& + \frac{F}{4D^4}(E_u G_v - E_v G_u - 2F_u G_u - 2F_v E_v + 4F_u F_v).
\end{aligned}\right.$$

(*C*) (S. 339)

$$\left\{\begin{aligned}
N_u - M_v = {} & \frac{1}{2D^2}[G_u E - E_v F]N - \\
& - \frac{1}{2D^2}[G_v E - E_v G + 2(G_u - F_v)F]M - \\
& - \frac{1}{2D^2}[-G_v F - G_u G + 2F_v G]L.
\end{aligned}\right.$$

Andere Form der zweiten Fundamentalgleichung (B):

$$(D)\quad \frac{LN-M^2}{D}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{-E_uF-E_vE+2F_uE}{2DE}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{-E_vF+G_uE}{2DE}$$

Tafel XVIII.

Formeln für Flächen, deren Parameterlinien Minimalkurven sind.

(A) (S. 44) $$E=G=0,\quad D=iF.$$

Fundamentalgleichungen:

(B) (S. 336 u. 369)
$$\begin{cases} L_v-M_u=-\dfrac{F_u}{F}M,\\ \dfrac{LN-M^2}{F}=\dfrac{\partial^2\log F}{\partial u\,\partial v}\quad\text{oder}\quad K=-\dfrac{1}{F}\dfrac{\partial^2\log F}{\partial u\,\partial v},\\ N_u-M_v=-\dfrac{F_v}{F}M.\end{cases}$$

(C) (S. 436) $$K=\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}=\frac{LN-M^2}{-F^2},\qquad H=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{2M}{F}$$

(D) (S. 334)
$$\begin{cases} x_{uu}=-\dfrac{iL}{F}(y_uz_v-z_uy_v)+\dfrac{F_u}{F}x_u=LX+\dfrac{F_u}{F}x_u,\\ x_{uv}=-\dfrac{iM}{F}(y_uz_v-z_uy_v)\qquad\qquad\quad=MX,\\ x_{vv}=-\dfrac{iN}{F}(y_uz_v-z_uy_v)+\dfrac{F_v}{F}x_v=NX+\dfrac{F_v}{F}x_v.\end{cases}$$

Diese Formeln (D) gelten auch, wenn x und X durch y und Y oder durch z und Z ersetzt werden.

(E) (S. 334)
$$\begin{cases} X_u=-\dfrac{1}{F}(Mx_u+Lx_v),\quad X_v=-\dfrac{1}{F}(Nx_u+Mx_v),\\ Y_u=-\dfrac{1}{F}(My_u+Ly_v),\quad Y_v=-\dfrac{1}{F}(Ny_u+My_v),\\ Z_u=-\dfrac{1}{F}(Mz_u+Lz_v),\quad Z_v=-\dfrac{1}{F}(Nz_u+Mz_v).\end{cases}$$

(F) $$\mathbf{S}\,X_u^2=\frac{2LM}{F},\qquad \mathbf{S}\,X_uX_v=\frac{LN+M^2}{F},\qquad \mathbf{S}\,X_v^2=\frac{2MN}{F}$$

Differentialgleichung der Krümmungskurven:

(G) $$L\,du^2-N\,dv^2=0.$$

Tafel XIX.

Formeln für Flächen, deren Parameterlinien die Krümmungskurven sind.

(*A*) (S. 221) $F = M = 0, \quad D = \sqrt{E}\sqrt{G}.$

Fundamentalgleichungen:

(*B*) (S. 445)
$$\begin{cases} L_v = \frac{1}{2} E_v \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right), \\ LN = -\frac{1}{2} E_{vv} - \frac{1}{2} G_{uu} + \frac{1}{4} \frac{E_v^2 + E_u G_u}{E} + \frac{1}{4} \frac{G_u^2 + E_v G_v}{G} \\ N_u = \frac{1}{2} G_u \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right) \end{cases}$$

oder:

(*C*) (S. 445)
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\sqrt{E}}{R_1} = \frac{1}{R_2 - R_1} \frac{\partial R_1}{\partial v}; \\ -\frac{\sqrt{E}\sqrt{G}}{R_1 R_2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\sqrt{G}}{R_2} = \frac{1}{R_1 - R_2} \frac{\partial R_2}{\partial u}. \end{cases}$$

(*D*) (S. 442) $R_1 = \frac{E}{L}, \quad R_2 = \frac{G}{N}.$

(*E*)
$$\begin{cases} x_{uu} = \frac{L}{D}(y_u z_v - z_u y_v) + \frac{E_u}{2E} x_u - \frac{E_v}{2G} x_v = LX + \frac{E_u}{2E} x_u - \frac{E_v}{2G} x_v, \\ x_{uv} = \frac{E_v}{2E} x_u + \frac{G_u}{2G} x_v, \\ x_{vv} = \frac{N}{D}(y_u z_v - z_u y_v) - \frac{G_u}{2E} x_u + \frac{G_v}{2G} x_v = NX - \frac{G_u}{2E} x_u + \frac{G_v}{2G} x_v. \end{cases}$$

Diese Formeln (*E*) gelten auch, wenn x und X durch y und Y oder durch z und Z ersetzt werden.

(*F*) (S. 446)
$$\begin{cases} X_u = -\frac{x_u}{R_1}, \quad Y_u = -\frac{y_u}{R_1}, \quad Z_u = -\frac{z_u}{R_1}, \\ X_v = -\frac{x_v}{R_2}, \quad Y_v = -\frac{y_v}{R_2}, \quad Z_v = -\frac{z_v}{R_2}. \end{cases}$$

(*G*) $\mathbf{S}\, X_u^2 = \frac{E}{R_1^2}, \quad \mathbf{S}\, X_u X_v = 0, \quad \mathbf{S}\, X_v^2 = \frac{G}{R_2^2}$

(*H*) $\mathbf{S}\, X_u^2 = \frac{L^2}{E}, \quad \mathbf{S}\, X_u X_v = 0, \quad \mathbf{S}\, X_v^2 = \frac{N^2}{G}$

Differentialgleichung der Minimalkurven:

(*I*) $E\,du^2 + G\,dv^2 = 0.$

Differentialgleichung der Haupttangentenkurven:

$$(K) \qquad L\,du^2 + N\,dv^2 = 0.$$

Tafel XX.

Differentialparameter.

$$(A)\ (\text{S. }421, 427) \qquad \Delta_{ff} = \frac{E f_v^2 - 2 F f_v f_u + G f_u^2}{D^2}.$$

$$(B)\ (\text{S. }429) \qquad \Delta_{fg} = \frac{E f_v g_v - F(f_v g_u + g_v f_u) + G f_u g_u}{D^2}.$$

$$(C)\ (\text{S. }423, 427) \qquad \nabla_{ff} = H \cdot \frac{L f_v^2 - 2 M f_v f_u + N f_u^2}{D^2}.$$

Werden $\bar{u} = f(u, v)$ und $\bar{v} = g(u, v)$ als Parameter auf der Fläche benutzt, so sind die zugehörigen Fundamentalgrößen erster Ordnung:

$$(D)\ (\text{S. }459) \quad \begin{cases} \bar{E} = \dfrac{\Delta_{gg}}{\Delta_{ff}\Delta_{gg} - \Delta_{fg}^2}, \qquad \bar{F} = \dfrac{-\Delta_{fg}}{\Delta_{ff}\Delta_{gg} - \Delta_{fg}^2}, \\ \bar{G} = \dfrac{\Delta_{ff}}{\Delta_{ff}\Delta_{gg} - \Delta_{fg}^2}. \end{cases}$$

Insbesondere ist:

$$(E) \quad \begin{cases} E = \dfrac{\Delta_{vv}}{\Delta_{uu}\Delta_{vv} - \Delta_{uv}^2}, \qquad F = \dfrac{-\Delta_{uv}}{\Delta_{uu}\Delta_{vv} - \Delta_{uv}^2}, \\ G = \dfrac{\Delta_{uu}}{\Delta_{uu}\Delta_{vv} - \Delta_{uv}^2}. \end{cases}$$

Tafel XXI.

Geodätische Kurven.

Differentialgleichung der geodätischen Kurven, wenn u und v Funktionen eines Parameters sind und nach diesem differenziert wird:

$$(A)\ (\text{S. }475) \quad \begin{vmatrix} Eu' + Fv' & \frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + (F_v - \frac{1}{2}G_u)v'^2 + Eu'' + Fv'' \\ Fu' + Gv' & (F_u - \frac{1}{2}E_v)u'^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2 + Fu'' + Gv'' \end{vmatrix} = 0.$$

Oder, wenn u als Parameter längs der Kurven benutzt wird:

$$(B)\ (\text{S. }477) \quad \begin{vmatrix} E + F\dfrac{dv}{du} & \dfrac{1}{2}E_u + E_v\dfrac{dv}{du} + \left(F_v - \dfrac{1}{2}G_u\right)\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2 + F\dfrac{d^2v}{du^2} \\ F + G\dfrac{dv}{du} & F_u - \dfrac{1}{2}E_v + G_u\dfrac{dv}{du} + \dfrac{1}{2}G_v\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2 + G\dfrac{d^2v}{du^2} \end{vmatrix} = 0,$$

wobei jedoch die Kurven (u) ausgeschlossen sind.

Bedingung für die orthogonalen Trajektorien $\lambda(u, v) =$ konst. von einfach unendlich vielen geodätischen Kurven:

(C) (S. 504) $$\Delta_{\lambda\lambda} = f(\lambda).$$

Bogenelement-Quadrat bei geodätischem Parametersystem:

(D) (S. 505) $$ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2.$$

Für den Winkel α einer beliebigen geodätischen Kurve mit den geodätischen Kurven (v) ist im Falle (D):

(E) (S. 508) $$\frac{d\alpha}{dv} = -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

Bei der Annahme (D) ist:

(F) (S. 512) $$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Liegen geodätische Polarkoordinaten vor, so ist in (D) noch:

(G) (S. 511, 514) $$\Big[G\Big]_{u=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right]_{u=0} = 1.$$

Tafel XXII.

Zentraflächen.

Die Parameterlinien (u), (v) auf der Urfläche (x, y, z) sollen die Krümmungskurven sein. Die auf den ersten oder zweiten Mantel der Zentrafläche bezüglichen Größen haben den Index 1 oder 2.

(A) (S. 521) $$x_1 = x + R_1 X, \quad y_1 = y + R_1 Y, \quad z_1 = z + R_1 Z.$$

(B) (S. 521) $$x_2 = x + R_2 X, \quad y_2 = y + R_2 Y, \quad z_2 = z + R_2 Z.$$

(C) (S. 522) $$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = X\dfrac{\partial R_1}{\partial u}, & \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = X\dfrac{\partial R_1}{\partial v} + \dfrac{R_2 - R_1}{R_2}x_v, \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial u} = Y\dfrac{\partial R_1}{\partial u}, & \dfrac{\partial y_1}{\partial v} = Y\dfrac{\partial R_1}{\partial v} + \dfrac{R_2 - R_1}{R_2}y_v, \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial u} = Z\dfrac{\partial R_1}{\partial u}, & \dfrac{\partial z_1}{\partial v} = Z\dfrac{\partial R_1}{\partial v} + \dfrac{R_2 - R_1}{R_2}z_v, \end{cases}$$

(D) (S. 527) $$E_1 = \left(\frac{\partial R_1}{\partial u}\right)^2, \quad F_1 = \frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_1}{\partial v}, \quad G_1 = \left(\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2 G.$$

(E) (S. 527) $$D_1 = \varepsilon_1\frac{\partial R_1}{\partial u}\cdot\frac{R_2 - R_1}{R_2}\cdot\sqrt{G} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

(*F*) (S. 527) $X_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}} x_u, \quad Y_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}} y_u, \quad Z_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}} z_u.$

(*G*) (S. 528) $L_1 = \varepsilon_1 \sqrt{E}\, \frac{\partial \log R_1}{\partial u}, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = -\varepsilon_1 \frac{G}{\sqrt{E}} \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\partial \log R_2}{\partial u}.$

(*H*) (S. 529) $ds_1^2 = dR_1^2 + \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2 G\, dv^2.$

(*I*) (S. 530) $K_1 = -\frac{1}{(R_2 - R_1)^2} \cdot \frac{\frac{\partial R_2}{\partial u}}{\frac{\partial R_1}{\partial u}}, \quad K_2 = -\frac{1}{(R_1 - R_2)^2} \cdot \frac{\frac{\partial R_1}{\partial v}}{\frac{\partial R_2}{\partial v}}.$

Differentialgleichung der Haupttangentenkurven auf dem ersten Mantel:

(*K*) (S. 530) $E R_2^2 \frac{\partial R_1}{\partial u} du^2 - G R_1^2 \frac{\partial R_2}{\partial u} dv^2 = 0.$

Die auf den zweiten Mantel bezüglichen Formeln gehen durch Vertauschung von u mit v, von 1 mit 2, von E mit G und von L mit N hervor.

Tafel XXIII.

Die allgemeine Flächenkurve.

Die Parameter u, v seien als Funktionen der Bogenlänge s der Kurve gegeben, so daß

(*A*) (S. 540) $E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2 = 1$

ist, wenn die Striche die Differentiation nach s andeuten.

ω der Winkel der Hauptnormale mit der Flächennormale, $1 : r$ die Krümmung, $1 : \varrho$ die Torsion.

Normale Krümmung:

(*B*) (S. 542) $\frac{\cos \omega}{r} = L u'^2 + 2 M u' v' + N v'^2.$

Tangentiale oder geodätische Krümmung:

(*C*) (S. 543) $\frac{\sin \omega}{r} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} Eu' + Fv' & \frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u' v' + (F_v - \frac{1}{2}G_u) v'^2 + Eu'' + Fv'' \\ Fu' + Gv' & (F_u - \frac{1}{2}E_v) u'^2 + G_u u' v' + \frac{1}{2} G_v v'^2 + Fu'' + Gv'' \end{vmatrix}.$

(*D*) (S. 550) $\operatorname{tg} \omega = \frac{\begin{vmatrix} Eu' + Fv' & \frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u' v' + (F_v - \frac{1}{2}G_u) v'^2 + Eu'' + Fv'' \\ Fu' + Gv' & (F_u - \frac{1}{2}E_v) u'^2 + G_u u' v' + \frac{1}{2} G_v v'^2 + Fu'' + Gv'' \end{vmatrix}}{D (L u'^2 + 2 M u' v' + N v'^2)}.$

(E) (S. 550)
$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 = (Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2)^2 + \\ + \frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} Eu' + Fv' & \frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + (F_v - \frac{1}{2}G_u)v'^2 + Eu'' + Fv'' \\ Fu' + Gv' & (F_u - \frac{1}{2}E_v)u'^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2 + Fu'' + Gv'' \end{vmatrix}^2.$$

(F) (S. 552)
$$\frac{1}{\varrho} = \omega' - \frac{1}{D}\begin{vmatrix} v'^2 & E & L \\ -u'v' & F & M \\ u'^2 & G & N \end{vmatrix}.$$

Tafel XXIV.

Bezeichnungen.

In der Tafel sind die Bezeichnungen angegeben, die in folgenden alphabetisch geordneten Werken über Flächentheorie statt der unsrigen benutzt worden sind, soweit in ihnen überhaupt stehende Bezeichnungen für die betreffenden Größen vorkommen:

Bianchi, „Vorlesungen über Differentialgeometrie". Deutsch von Lukat, 2. Aufl. Leipzig 1910.

Darboux, „Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal". I.—IV. partie, Paris 1887—1896.

Gauss, „Disquisitiones generales circa superficies curvas". Commentationes Soc. Scient. Gottingensis recentiores Vol. VI (ad a. 1823—1827), Göttingen 1828. Siehe auch Gauss' Werke, 4. Bd., und die Übersetzung in Ostwalds Klassikern Nr. 5.

Hoppe, „Lehrbuch der analytischen Geometrie in zwei Teilen. Zweiter Teil: Prinzipien der Flächentheorie". 2. Aufl., Leipzig 1890.

Joachimsthal, „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung". 3. Aufl., bearb. von Natani, Leipzig 1890.

Knoblauch, „Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen". Leipzig 1888.

v. Lilienthal, „Vorlesungen über Differentialgeometrie". 2. Bd., 1. Teil, Leipzig 1913.

Stahl und Kommerell, „Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie". Leipzig 1893.

	Bianchi	Darboux	Gauss	Hoppe	Joachimsthal	Knoblauch	v. Lilienthal	Stahl und Kommerell
$u\,v$	$u\,v$	$u\,v$	$p\,q$	$u\,v$	$u\,v$	$u\,v$	$u\,v$	$u\,v$
$E\,F\,G$	$E\,F\,G$	$E\,F\,G$[1]	$E\,F\,G$	$e\,f\,g$	$E\,F\,G$	$E\,F\,G$	$E\,F\,G$	$e\,f\,g$
D	—	H [2]	Δ	t	—	T	—	δ
$X\,Y\,Z$	$X\,Y\,Z$	$c\,c'\,c''$	$X\,Y\,Z$	$p\,q\,r$	$\lambda\,\mu\,\nu$ [3]	$X\,Y\,Z$[4]	$X\,Y\,Z$	$a\,b\,c$
$L\,M\,N$	$D\,D'\,D''$	$\frac{D}{H}\,\frac{D'}{H}\,\frac{D''}{H}$	$\frac{D}{\Delta}\,\frac{D'}{\Delta}\,\frac{D''}{\Delta}$	$E\,F\,G$	[5]	$L\,M\,N$	$L\,M\,N$	$d\,d'\,d''$
$R_1\,R_2$	$r_1\,r_2$	$R\,R'$	—	$\varrho_1\,\varrho_2$	$\varrho_1\,\varrho_2$	$\varrho_1\,\varrho_2$	$R_1\,R_2$	$r_1\,r_2$
K	K	—	k	—	—	K	—	k
H	H	—	—	—	—	H	—	h

[1] Auch A^2, $AC\cos\alpha$, C^2.

[2] Auch Δ.

[3] Auch $\frac{A}{\sqrt{EG-F^2}}$, $\frac{B}{\sqrt{EG-F^2}}$, $\frac{C}{\sqrt{EG-F^2}}$.

[4] Auch $\frac{A}{T}$, $\frac{B}{T}$, $\frac{C}{T}$.

[5] Benutzt dieselben Fundamentalgrößen zweiter Ordnung wie Gauss, vgl. die Anm. zu S. 122.

Sachregister.[1]

A

B

[1] Zahlen in Klammern deuten auf Stellen in Anmerkungen.

I

K

L

M

O

P

Q

R

Berichtigung zum ersten Bande (1910 und Neudruck 1921).

Einer Mitteilung von Loria ist der Hinweis auf einen störenden Rechenfehler zu verdanken. Wenn auch dieser Fehler das Ergebnis nicht berührt, muß doch in Kürze gesagt werden, wie es sich damit verhält: Auf S. 296 nämlich gehen nicht die dort für $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\varrho}$ angegebenen Werte hervor, sondern

$$\bar{\lambda} = \varepsilon\eta\lambda, \quad \bar{\mu} = \varepsilon\eta\mu, \quad \bar{\nu} = \varepsilon\eta\nu, \quad \bar{\varrho} = \eta\varrho,$$

wo η eine der beiden Zahlen $+1$ oder -1 bedeutet. Weiterhin folgt, wie dort richtig gesagt ist, aus II (D), daß η den Wert $+1$ hat. Im Falle $\varepsilon = +1$ ist alles in Ordnung, im Falle $\varepsilon = -1$ dagegen, d. h. wenn $\bar{r} = -r$ ist, muß derjenige Schluß gemacht werden, der sich auf S. 298 unten und S. 299 oben findet und dort nur eine Art von Anhang war, jetzt aber infolge jenes Rechenfehlers wesentliche Bedeutung bekommt. Dort wird nämlich gezeigt: Wenn $\bar{r} = -r$ ist, genügt es, $-s$ als neue Veränderliche einzuführen, um zu den Koordinaten x, y, z wie im Falle $\bar{r} = +r$ zu gelangen. Übrigens ist auf S. 299, 1. Zeile von oben, „mit $\bar{\sigma}$ statt mit σ“ an Stelle von „$\bar{\sigma}$ statt $-\sigma$“ zu lesen. Die Betrachtungen auf S. 298 unten und S. 299 gehören somit jetzt als wesentlicher Bestandteil der Beweisführung an den Schluß der S. 296.

